Université Paris-Saclay | 2023-2024
Centre d'Orsay | M1 - MEEF - 2nd degré - PLC
Mathématiques

Nombres réels : travail à rendre par groupes

Exercice 1 - [**] Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ par pliage de papier.

Exercice 2 - [**] Soit $Z(z,0)$ le point d'intersection de l'axe Ox avec la tangente au point $A_k(x_k, x_k^2-2)$ à la parabole d'équation $\{y=x^2-2\}$. Donner une valeur approchée de z en fonction de x_k.

Exercice 3 - [*] Démontrer que la distance de 1,999... à 2 est inférieure à tout rationnel strictement positif ϵ, $|2-1{,}9999....| < \epsilon$.

Exercice 4 - [*] Démontrer la propriété d'Archimède : soient $0 < x < y$ deux réels strictement positifs. Il existe un entier naturel n tel que $y \leq nx$.

Exercice 5 - [**] Démontrer la densité des rationnels : dans tout intervalle ouvert non vide $]a,b[$, où $a < b \in \mathbb{R}$, il y a des rationnels.

Exercice 6 - [*] Soit $x = 3,\overline{142857}\,\overline{142857}\,\overline{142}...$ le rationnel dont le développement décimal, après 3,, est périodique de période 142857. Écrire x sous forme de fraction irréductible.

Exercice 7 - [*] Soit $x = \frac{5}{13}$. Quel est son développement décimal illimité ?

Exercice 8 - [*] Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a,b[$ où $a < b \in \mathbb{R}$ contient des nombres irrationnels.

Exercice 9 - [**] Critère d'irrationalité. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x est irrationnel, si et seulement si il existe des suites d'entiers p_n et q_n telles que $q_n x - p_n \neq 0$ et $q_n x - p_n$ tend vers 0.

Coupler un exercice court [*] avec un exercice long [**].