Ecritures des nombres

par André Cauty

Professeur des Universités à Bordeaux 1, équipe CELIA du CNRS[1]

*

*   *

SOMMAIRE

1. Diversité de la syntaxe et de la morphologie des nombres

Tout[2] le monde sait distinguer *premier*, *second* et *dernier*, ou encore *un*, *deux* et *beaucoup*. Mais comment construire le nombre abstrait, c'est-à-dire développer et articuler entre elles : la capacité « ordinale » de distinguer des entités sur la seule base de leur rang dans une suite, et la capacité « cardinale » de déterminer des quantités hétéroclites par la seule propriété d'avoir le même nombre d'éléments ou d'être de même mesure ? On comprend qu'il s'agit d'une longue aventure humaine collective en observant comment s'écrivent les grands nombres dans différentes parties du monde.

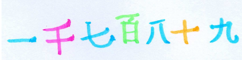
Prenons par exemple le nombre « mille sept cent quatre-vingts neuf » que des milliards d'hommes écrivent 1789 et prononcent selon leur langue. Un scribe – égyptien, chinois, mésopotamien ou maya – l'aurait conceptualisé autrement, en formant des paquets de taille différente –dix, vingt ou soixante–, et il aurait disposé autrement ses chiffres de forme et constitution bien différentes :

TYPE ARTICULATION (HYBRIDE)

Les chiffres et les nombres d'appui sont tous transcrits : on écrit comme on parle les nombres

Numération chinoise

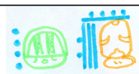
Décimal ; chiffres iconiques ; appuis iconiques



1 1000 7 100 8 10 7 (unité)

Numération maya (durées en kin)

Vigésimal ; chiffres répétitifs ; appuis iconiques (attention : 1 *tun* = 18 *uinals*)

 4. tun 17. uinal 9. kin 4. 360 17. 20 9. kin	 4. tun 17.-9.uinal (unité) 4. 360 17.-9.20 (unité)

Numération maya (durées en tun)

Vigésimal ; chiffres répétitifs ; appuis multiplicatifs (les opérateurs sont marqués)

4.bak.tun 9.ka.tun 9.tun
4.400.tun 9.20.tun 9.tun

TYPE REPETITION (ADDITIF)

Seuls les nombres d'appui sont inscrits ; il n'y a pas de chiffres inscrits, leur valeur est rendue par la *répétition des appuis* ou des *mesures* ; on écrit comme on voit les quantités

Numération aztèque

Vigésimal ; appuis répétitifs

400 400 400 400 20 20 20 20 20 20 20 20 20 1 1 1 1 1 1 1 1 1

Numération égyptienne

Décimal ; appuis répétitifs

1000 100 100 100 100 100 100 100 10 10 10 10 10 10 10 10 1 1 1 1 1 1 1 1 1

TYPE POSITION

Seuls les chiffres sont inscrits ; il n'y a aucun nombre d'appui inscrit, leur valeur est rendue par la *position des chiffres*

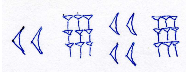
Numération décimale	***maya (codex, tables)***	***mésopotamienne***
Décimal ; chiffres iconiques	Vigésimal ; chiffres répétitifs	Sexagésimale ; chiffres répétitifs
1789 1 (1000) 7 (100) 8 (10) 9 (unité)	•••• 1 1 1 1.(bak) = 4 (bak) •••• 1 1 1 1 5 (kal) = 9 (kal) •••• 1 1 1 1 5 (unité) = 9 (unité)	 10 10 1 1 1 1 1 1 1 1 1.(60) 10 10 10 10 1 1 1 1 1 1 1 11.(unité) = 29 (60) 49 (unité)

Figure : Trois types d'écriture de 1789 en conceptualisation polynomiale ($n = \Sigma[c_iP_i]$) de style *séxagésimal* : 1789 = [29 x 60 + 49] (unité), *vigésimal* : 1789 = [4 x 400 + 9 x 20 + 9] (unité) ou *décimal* : 1789 = [1 x 1000 + 7 x 100 + 8 x 10 + 9] (unité)

Qu'y a-t-il de commun et de différent dans ces façons d'écrire un grand nombre ? Toutes partagent le fait que la quantité à représenter est préalablement décomposée en paquets régulièrement formatés de dix (cent, mille etc.), de vingt (quatre cents, huit mille, etc.) ou de soixante (trois mille six cents, deux cents seize mille, etc.). Partout, le scribe dispose d'une syntaxe (polynomiale) qui lui permet d'énoncer et/ou d'écrire le compte des différents paquets : un-millier sept-centaines huit-dizaines neuf-unités. Partout, il le fait en plaçant les comptes dans l'ordre (croissant ou décroissant) des paquets. Cette standardisation n'est ni le fruit du hasard, ni un cadeau des dieux.

Les écritures numériques précédentes diffèrent par la façon de représenter les comptes d'unités successives. Seulement par leur place ou position (ce qui revient à ne pas marquer les unités successives) dans l'écriture des numérations de position (ce qui pousse plus ou moins vite à inventer un chiffre *zéro*). Ou en les marquant explicitement comme dans la numération de la Chine, celle de l'Égypte qui différencie les unités, et celle de la Mésopotamie qui ne le fait pas. Elles diffèrent aussi par la forme des chiffres (un, deux, etc.) et, lorsqu'ils sont

représentés, par celle des nombres d'appui (les nœuds ou puissances de la *base* : dix, cent, mille, etc., ou les mesures).
Il y a deux manières (iconique, répétitive) de représenter les chiffres qui servent à marquer le compte des paquets : soit on donne à chacun une figure propre (comme 1, 2, 3, etc.), soit on construit sa figure par répétition d'un symbole (II, III, IIII, etc.) de valeur convenue (l'unité un et/ou les autres unités : nœuds de la numération ou mesures des systèmes métrologiques). Bref, partout le scripteur doit disposer d'une liste finie de symboles iconiques propres à sa culture, et, éventuellement, d'une morphologie, c'est-à-dire de règles permettant d'écrire les chiffres non iconiques ou de représenter la grandeur des différents nœuds.
On sait qu'une numération de position avec zéro exige un nombre de chiffres égal à la base utilisée (soixante chiffres en numération sexagésimale). Et que la dynamique de l'économie des numérations est soumise à deux contraintes générales : celle de l'infinité des entiers (pouvoir écrire n'importe quel nombre, même arbitrairement grand), et celle de la généralisation (pouvoir noter avec les mêmes chiffres et la même syntaxe polynomiale le nombre ou la mesure des collections d'entités les plus diverses). Elle est aussi soumise à deux contraintes particulières et contradictoires : a) ne pas allonger exagérément la longueur de l'écriture des grands nombres (d'où l'intérêt d'une grande base et des procédés iconiques, et l'inconvénient d'une surcharge de mémoire), et b) ne pas augmenter démesurément le nombre des symboles élémentaires (d'où l'intérêt d'une petite base) ou le nombre des règles morphologiques (d'où l'intérêt des procédés répétitifs et additivo-multiplicatifs qui soulagent l'apprentissage). Une *Histoire comparée des numérations écrites* (Guitel, 1975) montre que tous les compromis sont possibles et que, de fait, ils furent expérimentés. Nous verrons aussi que la standardisation de la forme polynomiale des systèmes de numération est le fruit abouti d'une histoire de pouvoir et de civilisation qui commença par la saisie des premiers nombres. Une histoire longue et complexe en Mésopotamie. Courte et seulement liée à la mesure du temps chez les Mayas, en Méso-Amérique.

2. La graphie à l'intersection des langues et des techniques

Au moins depuis 35 000 ans en Europe, et peut-être 80 000 ans en Afrique[3], l'homme est capable de produire ses propres systèmes de signaux, symboles et autres signes. Certains furent transmis de génération en génération et enregistrés dans la culture matérielle.
On infère de ces faits que les créateurs des systèmes symboliques artificiels étaient capables, non seulement de communiquer, mais aussi de *parler* (au sens du langage) pour *dire* aux autres : leur identité, leur statut, leur appartenance à un sexe, à une classe d'âge, à un groupe ethnique, mais aussi leurs opinions, leurs jugements, leurs désaccords. Pourquoi ?
Parce que les langues naturelles sont les seuls systèmes de communication qui incluent intrinsèquement un métalangage permettant la création, le développement et la transmission des codes symboliques, mais aussi leur fonctionnement (interprétation, levée des quiproquos, subversion des 'messages').

---

[3] Datés de 75 000 ans, des coquillages percés découverts par lots de 2 à 17 dans les couches Middle Stone Age de Blombos (Afrique du Sud) sont les plus anciens objets de parure connus. L'analyse microscopique révèle des traces d'usure clairement dues à leur port comme bijoux.

Une fois créés, cependant, les systèmes symboliques – dont les écritures au sens strict[4] – comme par exemple ceux utilisés pour la divination ou la gestion des biens se détachent des langues qui permirent leur émergence, puis des langues qui accompagnent leur usage. Ils développent des règles propres de plus en plus autonomes par rapport aux langues. Par exemple des règles d'orthographe et de typographie qui confèrent aux écritures alphabétiques une véritable dimension idéographique. Ces règles sont de plus en plus asservies aux domaines d'expérience qu'ils permettent de présenter, simuler ou modéliser ; l'écriture des nombres par exemple est ainsi de plus en plus asservie aux domaines de la mesure.
Il est donc réducteur et sans doute faux : a) de fonder l'étude des écritures ou des systèmes symboliques seulement sur le lien qu'ils entretiennent avec les langues dans lesquelles est prononcé ce qu'elles transcrivent, et b) de décrire leur développement comme un parcours idéalement linéaire allant de la pictographie à l'alphabet, en passant par le rébus et la syllabe. Un contre-exemple peut suffire : un système au moins n'a pas suivi ce schéma idéal, puisque l'écriture dite du chinois est restée largement idéographique ; ce qui permet d'ailleurs à des millions de lecteurs de se comprendre à l'écrit, alors qu'ils parlent des langues différentes. C'est aussi le cas des écritures spécialisées, par exemple l'écriture mathématique imprononçable mais néanmoins attachée aux langues naturelles : chacun comprend en particulier les nombres posés en numération décimale de position, 10 ou 1789, indépendamment de leur prononciation ou de leur formation dans la numération parlée que sa langue comporte. C'est un fait largement répandu : de par leurs origines hétérogènes et leurs motivations diverses, les numérations parlée et écrite sont souvent des produits métis et pluriculturels, dont les règles et le système sont exceptionnellement identiques. Elles ont chacune leur syntaxe. En français, par exemple, on dit **quatre–vingts**, c'est-à-dire '4 vingtaines', mais on écrit **80**, c'est-à-dire '8 dizaines'.
Prenons l'exemple de la notation des premiers nombres en chiffres romains[5] : I, II, III, IIII, V, VI, etc. C'est une représentation non médiatisée par le latin, mais qui montre directement ce qu'elle vise à transcrire : l'icône de un ou de cinq, la répétition des quantités.
Il est presque sûr que la forme des chiffres (I, V) ou des expressions (II, VI) n'a été motivée ni par les numéraux latins (*unus*, *quinque ; duo*, *sex*), ni par les mots ou les lettres d'une langue de l'antiquité romaine (latin ou étrusque, par exemple). Pourquoi ? Parce que, partout dans le monde, les hommes ont découvert et utilisé le procédé 'enfantin' qui consiste à mettre une marque par chose ou entité à retenir ou compter. Les techniques de l'entaille, de l'appariement ou de la mise en paquets sont plus universelles, anciennes et durables que le latin, langue morte aujourd'hui. Or, ces techniques et les solutions ou contenus qu'elles véhiculent se transmettent, non pas indépendamment de toute langue, mais à coup sûr indépendamment du latin ou de telle autre langue particulière. Elles se transmettent, en situation de contact des peuples et des cultures, par emprunt, imitation, apprentissage ou traduction. Dans le sens de ceux qui savent vers ceux qui ne savent pas.
D'où la conclusion que la motivation des premiers nombres de la numération romaine est moins à rechercher dans les langues[6] que dans ces techniques 'universelles'. De même,

[4] Utilisé pour 'écrire', le système doit transcrire pour la vue (ou un autre sens) les conceptualisations du scripteur, y compris les phrases qu'il énonce dans sa langue (ou les langues qu'il connaît). Utilisé pour 'lire', le système doit permettre à tous les lecteurs de produire, à partir d'un même 'texte', les mêmes énoncés. Toute langue est caractérisée par la propriété de « double articulation » (Martinet), ce qui veut dire que tout énoncé s'analyse en 'mots' signifiants – morphèmes lexicaux et grammaticaux – et ces derniers en éléments distinctifs – phonèmes ou syllabes –. De ce fait, toute écriture au sens strict comporte en proportion variable, d'une part, des moyens logographiques permettant de représenter les morphèmes (lexicaux et grammaticaux), et, d'autre part, des moyens sonographiques permettant de représenter les sons (syllabiques ou phonétiques).
[5] Ou encore en chiffres : égyptiens, babyloniens, mayas, aztèques, chinois, etc.

l'étude des systèmes symboliques (écritures et numérations comprises) devrait prendre aussi en compte leur origine « technique ».
Posons pour cela que tous les systèmes symboliques furent nés à la croisée de deux chemins au moins : celui des langues, bien sûr, mais aussi celui du corps et de la main d'hommes en situation de problème qui en contraint les formes, les usages et la logique. Tout système symbolique est le coproduit des interactions du corps et de la parole, de la technique et du langage. Aucun ne s'appuie exclusivement sur la langue d'un individu, car il repose aussi sur les techniques que les collectifs (souvent multilingues) développent pour présenter, conserver, traiter ou communiquer[7] les 'vouloir dire' du scripteur et les 'faire dire' des lecteurs, et pour s'approprier les solutions les mieux adaptées à leurs besoins de modéliser ou simuler.
En tout cas, les plus anciens systèmes découverts par les préhistoriens sont des « dessins » sur différents supports, et des artefacts que d'Errico (1998) appelle des « systèmes artificiels à mémoire », c'est-à-dire des objets matériels créés et utilisés par une société pour enregistrer, stocker, traiter, transmettre et lire de l'information.
La plupart de ces anciens systèmes sont perdus [8] ou ne peuvent plus être interprétés. Comment savoir, par exemple, que des entailles sur un bâton, des galets mis dans un sac ou des perles enfilées en collier le furent pour se souvenir du nombre des animaux d'un troupeau ou des jours séparant deux événements, ou pour d'autres raisons que le besoin de compter ou de traiter de l'information : envoyer par exemple un message d'amour comme le font certains peuples bantous qui enfilent à cet effet des perles de couleurs dûment codées[9] ? Parfois, cependant, les objets du paléolithique supérieur portent des traces d'actions humaines qui permettent de les identifier comme des systèmes artificiels à mémoire. Certains peuvent même être interprétés. C'est souvent le cas des systèmes de notation du nombre, qui réussirent – comme les incisions à l'origine probable des chiffres romains – à durer jusqu'à une époque historique[10].
Selon d'Errico (2002), l'analyse des systèmes artificiels à mémoire du paléolithique révèle que quatre facteurs peuvent intervenir dans leur code : la *forme* (mais aussi la couleur, la dimension, etc.) des substituts (les éléments porteurs d'information), leur *distribution* spatiale sur un support, leur *accumulation* au cours du temps et leur *nombre*. Le rosaire catholique, par exemple, fonctionne avec un code fondé sur la distribution spatiale des éléments porteurs de l'information et sur leur forme : l'ordre des grains indique l'ordre des prières, la grosseur des grains et la longueur des segments entre les grains indiquent le type de prière à réciter. La technique de l'entaille (une marque par fait ou objet à retenir ou compter) est un code répétitif fondé sur l'accumulation dans le temps des éléments porteurs d'information. Les données ethnographiques montrent que chaque code inclut un, deux, trois ou même les quatre facteurs ; et qu'ils s'organisent de façon hiérarchique comme dans le cas des quipus de l'empire inca.
D'Errico montre que les systèmes artificiels à mémoire étaient largement utilisés dès l'arrivée en Europe[11] de l'homme anatomiquement moderne : des codes fondés sur la combinaison de

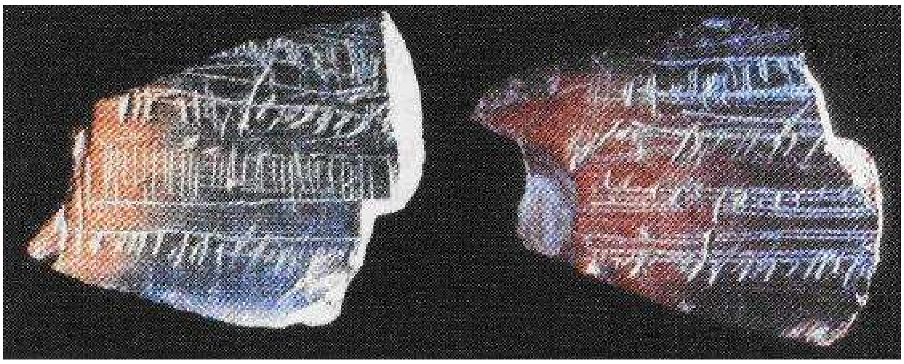
---

[6] Ce qui n'exclut pas la possibilité que d'autres chiffres, apparus à un autre stade de développement de la numération romaine, furent motivés ou re-motivés par le numéral correspondant (en latin par exemple le C de cent ou le M de mille).
[7] Quel que soit le type de cette communication, verbale ou non verbale (gestuelle, corporelle, visuelle, tactile).
[8] Notamment ceux qui utilisent un support périssable (peinture ou gestuelle corporelle, inscription sur le sable, signaux de fumée, signaux sonores, rituels, etc.).
[9] Pour une présentation des messages d'amour : Wickler, W. et Seibt, U., 2005, *Pour La Science*, Dossier n° 47 (*Mathématiques exotiques*), avril/juin 2005, pp.78-83.
[10] Dans ce cas, l'historien dispose en principe de toutes sortes de documents (notamment écrits) qui permettent de reconstituer les contextes d'usage de ces marques, et, par là, d'infirmer ou de démontrer les conjectures interprétatives.
[11] Vers 35 000 ans.

deux ou trois facteurs apparaissent à cette époque et sont utilisés tout au long du paléolithique supérieur. Ils coexistèrent pendant 20 millénaires avec des codes fondés sur un seul facteur (accumulation dans le temps). Au cours de cette période, des changements (organisation des codes, type d'information stockée) se sont produits. On observe une augmentation du volume d'information stockée due à l'accroissement du nombre de marques et à la réduction de leur taille. A la fin du paléolithique supérieur, plus d'un millier de petites incisions sont disposées sur un fragment de côte de huit centimètres provenant du site magdalénien de Taï (Drôme). Les codes se complexifient grâce à une organisation hiérarchique de l'information qui utilise les différences morphologiques entre signes et disposition des signes On passe aussi d'une lecture tactile à une lecture visuelle.
La continuité dans le choix des matériaux, des techniques d'incision ou des compétences gestuelles mises en œuvre indique que les systèmes artificiels à mémoire se développèrent dans des contextes sociaux similaires. Il est vraisemblable que seuls peu d'individus aient été pleinement conscients des codes les plus complexes. Ces quelques personnes spécialisées dans la conservation de la mémoire ou la divination – anciens, initiés, chamans ? – étaient sans doute celles qui fabriquaient les objets d'enregistrement et transmettaient les codes associés. Ce qui semble corroboré par le petit nombre de systèmes artificiels à mémoire comparé à celui des autres objets dégagés par les fouilles, et par le fait qu'ils sont fabriqués sur une pièce unique, solide et transportable, souvent un outil prévu pour un usage long ou aménagé pour être suspendu ou porté (comme parure, marque de pouvoir ?). La multiplication des systèmes artificiels à mémoire va de pair avec la diversification et la division des sociétés. Ceux qui, à la fin du paléolithique supérieur, servirent à noter le nombre (si/quand cela peut être démontré !) sont vraisemblablement les premiers outils des premières pratiques d'une sorte de proto-arithmétique.

3. Le bâton d'Ishango

Découvert dans les années cinquante dans l'ex-Congo belge, le bâton d'Ishango a été daté de 20 000 à 25 000 ans. Il porte trois lignes d'entailles (168) perpendiculaires à son axe. La longueur des entailles et leur disposition suggèrent un arrangement en groupes et sous-groupes ponctués par des « blancs » plus ou moins réguliers.



Le Bâton d'Ishango

Ce bâton parle-t-il ? Que cherche-t-on à lui faire dire ?
Pour son inventeur, l'archéologue belge Jean de Heinzelin, il s'agirait d'un jeu arithmétique comme il en existe encore dans les cultures africaines. D'autres pensent à un compte lunaire, ou aux premiers pas d'un peuple se débattant dans le choix des nombres d'appui pour créer un système numérique. Dirk Huylebrouck (2005) en fait, un peu vite, le plus ancien document mathématique du monde et y voit la preuve que les mathématiques seraient nées en Afrique,

dans la région des Grands Lacs, ou, plus modestement : « *le témoignage rudimentaire d'un peuple créant son système numérique et gravant le bâton selon ses habitudes pour compter […] dans une communauté où les bases 10 et 6 (ou 3 et 4) étaient toujours mêlées et utilisées de conserve* ».
Ces opinions ont en commun le présupposé que les groupes d'entailles représentent des nombres. Par exemple, les nombres 60, 48 et 60 obtenus par un lecteur moderne en totalisant les marques ligne par ligne. Leur diversité trahit la fragilité des interprétations proposées. La prudence voudrait que l'on reconnaisse que le code n'a pas été donné avec le bâton ; et que c'est l'imagination qui fait parler les marques d'un bâton muet faute de pouvoir être confronté à d'autres documents et placés dans des séries certaines.
Regardons vers la Mésopotamie et la Méso-Amérique, où, grâce aux fouilles des dernières décennies, les chercheurs disposent de témoins nombreux allant chaotiquement de la préhistoire à l'histoire des multiples formes que revêtent les nombres et leurs notations.

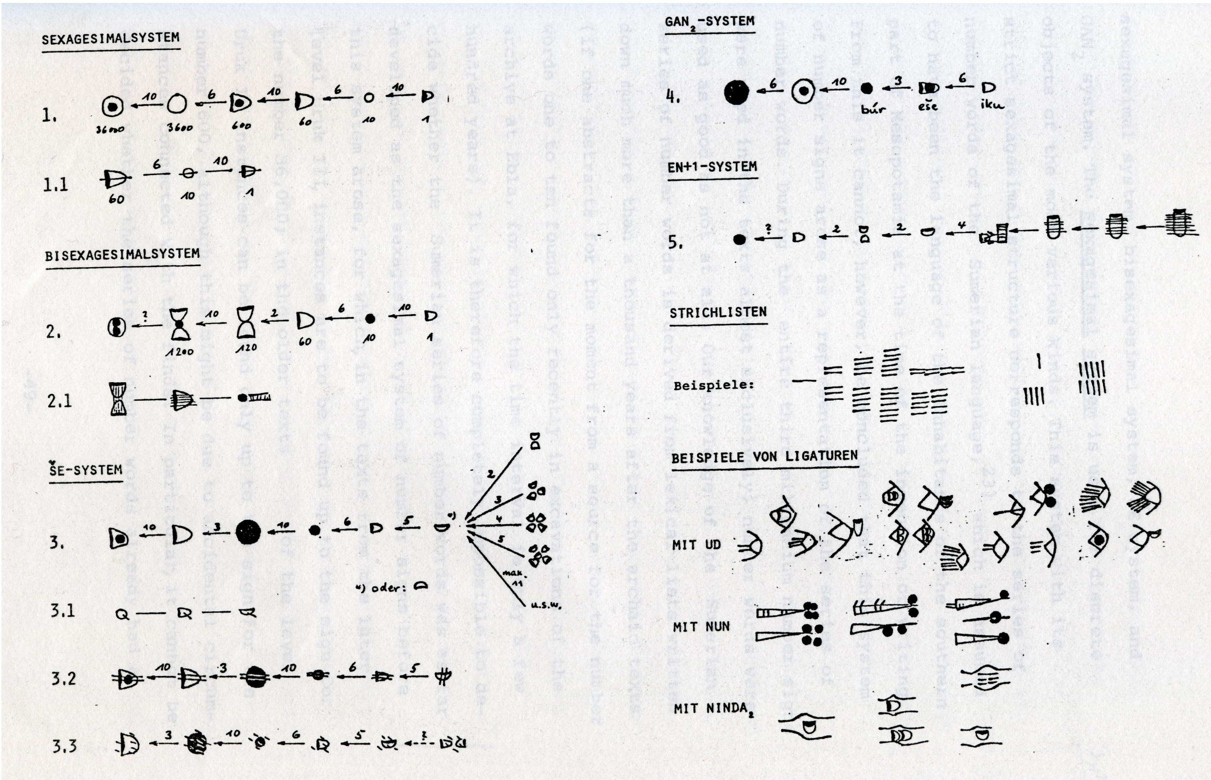
4. Naissance du nombre en Mésopotamie : une histoire de métrologies enchevêtrées

Plus de trois mille ans avant notre ère, en Mésopotamie, sur les territoires actuels de l'Iran et de l'Irak, les scribes utilisèrent l'argile comme support de leurs écritures. Sa durabilité exceptionnelle fait que l'on dispose de très longues séries de documents propres à tester les hypothèses sur l'origine de l'écriture et/ou du nombre dans cette partie du monde.
Un peu après l'invention des sceaux cylindriques, sorte d'équivalent de notre signature, le sort de l'écriture s'est joué rapidement, vers 3400 avant J.-C. Environ un siècle après les plus anciennes sources inscrites découvertes, les tablettes administratives archaïques (3400-3200) comportent déjà le nom du responsable administratif d'une distribution, des marques numérales précisant des quantités, et le nom (souvent abrégé) des destinataires des denrées.
Fait remarquable, entre les premières tablettes couvertes de pictogrammes et les dernières en écriture cunéiforme, les Mésopotamiens inventèrent les bulles-enveloppes d'argile dans lesquelles ils enfermaient des jetons[12] qui représentaient diverses quantités de biens (moutons, mesures de blé, d'huile, etc.). Sur leur surface extérieure, les premières bulles portent l'empreinte des sceaux de deux ou trois personnes ; ces bulles sont donc des documents administratifs servant à enregistrer de manière authentique les transactions ou les distributions de biens. L'inconvénient des premières bulles c'est qu'il faut les casser, en cas de contestation, pour vérifier le compte des biens engagés. Il est rapidement contourné par l'innovation qui consiste à mettre, sur l'extérieur de la bulle, l'empreinte des jetons qu'elle renferme. Le compte des biens devient ainsi lisible sans casser la bulle. Du coup, la présence effective des jetons est redondante, et les bulles, en tant que récipients de jetons, perdent leur raison d'être. Finalement, les bulles disparaissent, et, avec elles, la simulation directe des quantités matérialisée par des jetons ou marquée sur l'extérieur par leur empreinte ; à leur place des tablettes dûment formatées par exemple selon les standards administratifs sur lesquelles les quantités ou les noms sont représentées par des signes croqués au calame.
Pendant la période archaïque les signes numériques relèvent de plusieurs systèmes et ont des valeurs numériques différentes renvoyant à des quantités ou des mesures différentes. C'est le contenu concret de la tablette qui permet de décider de l'interprétation et de la valeur de ces signes numériques fortement polysémiques : chaque chiffre est lié à des unités particulières et on n'écrit pas de la même façon le 4 de « quatre moutons » ou de « quatre mesures de grain ».

[12] Les jetons étaient connus dans la vallée de l'Indus 5000 ans avant ceux de Suse. Voir par exemple Schmandt-Besserat (1978).

Avec le temps, ils évoluent et se diversifient au rythme des innovations techniques et sous la pression centralisatrice des empires. Ils aboutissent, à force d'être utilisés dans des calculs (calculer des surfaces à partir des longueurs, diviser les rations entre les ouvriers ou évaluer le temps nécessaire à une construction), à la numération (sexagésimale) qui permet de noter les quantités et les mesures indépendamment de ce qu'elles représentent, et à l'écriture (cunéiforme). Ecriture et numération sont alors dotées chacune d'une grammaire propre les rendant aptes à supporter la diversité linguistique et culturelle de la région.

En ce qui concerne le nombre, les spécialistes ont démêlé une douzaine de systèmes métrologiques réservés à différents domaines d'expérience : compte des entités discrètes comme le bétail, mesures des grains, des liquides, des longueurs, des surfaces, du temps, etc.



Exemples (Damerow, communication personnelle septembre 1984)

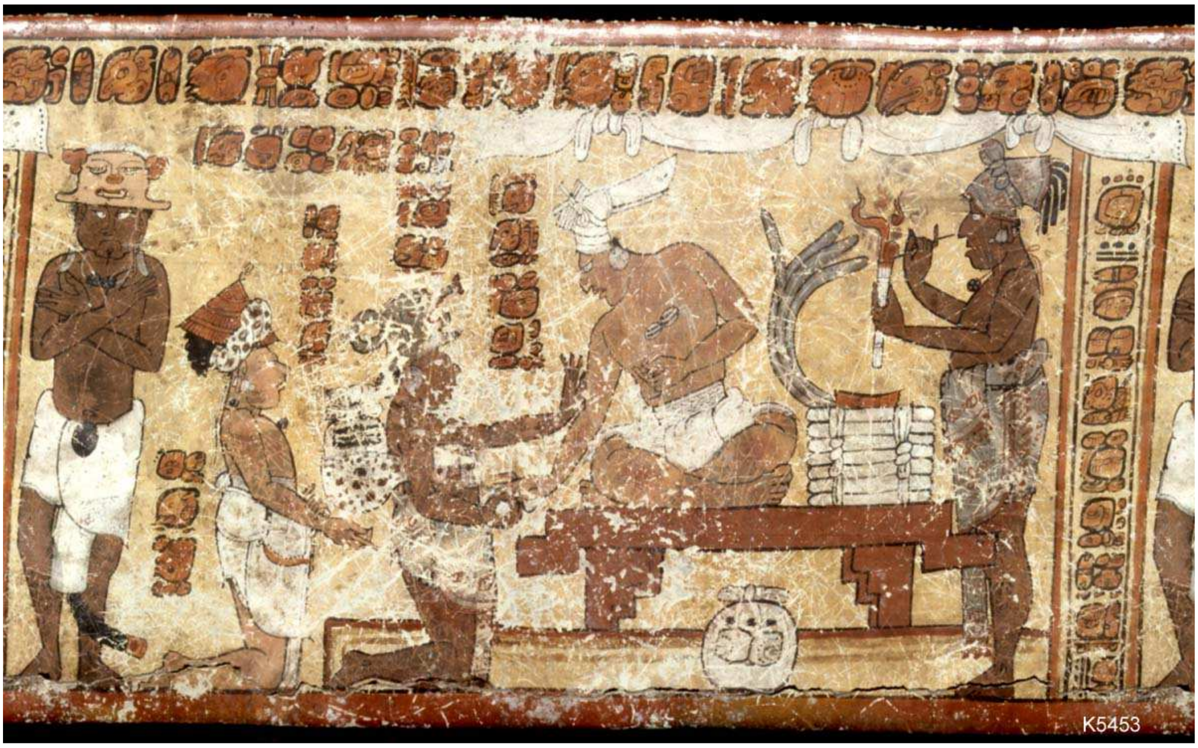
La période protodynastique (2800-2350 av. J.-C.) voit décroître le nombre des systèmes métrologiques utilisés et augmenter les occasions d'emploi de certains d'entre eux. Ces derniers deviennent ainsi plus généraux. Le pouvoir met en place à une plus grande échelle un système unifié d'écriture et de comptabilité. Un système numérique unique, inspiré du système S des entités discrètes, devient dominant en ce sens qu'il sert à écrire les nombres qui interviennent dans les calculs, indépendamment des mesures qu'ils représentent ; la conversion dans un système adéquat, ainsi que la notation de l'unité correspondante, se faisant seulement à la fin. Ce système est la première numération de position de l'humanité, elle est sexagésimale et elle est longtemps restée sans zéro.

Avec ce système, les Mésopotamiens opèrent sur des nombres (et non plus sur des nombres-de) dont l'écriture et le maniement ne dépendent plus des systèmes métrologiques et donc de la nature des quantités mesurées ou des entités dénombrées.

On peut conclure que le nombre, en Mésopotamie, s'est lentement dégagé d'une forêt de systèmes métrologiques particuliers, sous la pression de l'administration et les nécessités de la comptabilité, et grâce aux progrès de l'écriture et de ses outils. La naissance du nombre abstrait, dans cette partie du monde, est donc liée au développement des pratiques comptables écrites, lesquelles régulaient et contrôlaient les échanges de biens par le biais de milliers de registres consignant, dans l'argile des bulles puis des tablettes, les signes qui simulaient de plus en plus abstraitement les quantités échangées. Cette naissance est aussi liée aux nécessités de la formation des scribes, c'est-à-dire au développement de didacticiels pour l'apprentissage de l'écriture, de la métrologie, et de l'arithmétique.

5. Naissance du nombre en Méso-Amérique : une histoire de dates et de durées

Contrairement aux Mésopotamiens, les Mayas n'ont développé qu'un seul système métrologique, celui des mesures de temps. Les grands nombres mayas représentent toujours des durées qui dépassent communément le million de jours. Bien que les nécessités de l'administration semblent l'exiger là comme ailleurs, aucun document maya parvenu jusqu'à nous ne porte l'inscription d'une grande mesure ou d'une grande quantité de biens. Malgré les recherches entreprises, seuls de rares exemples, peu convaincants, de notation d'une grande quantité peuvent être présentés. La scène suivante, peinte sur le vase Kerr 5453, montre un messager (agenouillé) venant apporter des nouvelles de Calakmul à un prince assis sur un siège. Sous le siège, un sac sur lequel est inscrit le chiffre 3 au-dessus d'un syllabogramme de valeur **pi,** noté par le signe « double cauac ». Les spécialistes estiment que le sac contient des fèves de cacao, dont on sait qu'elles servirent de monnaie. Comment lire l'inscription « 3-**pi** 'cacao' » ?

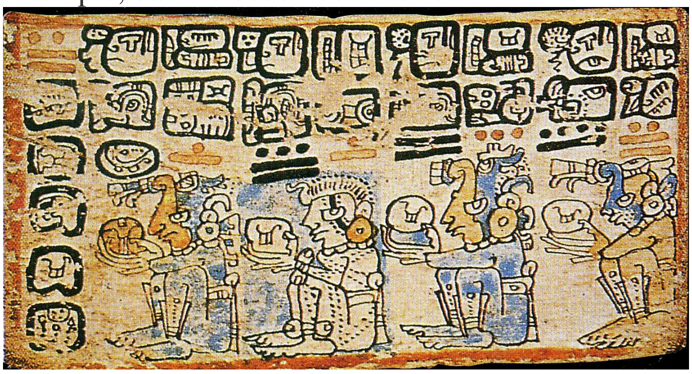


Dans la notation des durées en Compte Long, le double cauac est l'un des glyphes ordinaires du *baktun* (400 *tuns* ou années de 360 jours). On en infère que l'inscription du sac est 3 x 400, soit 1 200 fèves de cacao. Certains épigraphistes pensent que **pi** est l'abréviation de **pik,** c'est-à-dire du numéral 8 000 en langue yucatèque, d'où le total 3 x 8 000 soit 24 000. Mais le sac semble un peu petit pour contenir autant de fèves, d'autant que la valeur 1 200 est déjà une somme importante : elle permettait d'acheter une douzaine d'esclaves. Quoi qu'il en soit de la valeur numérique à retenir (1 200 ou 24 000), cette étiquette peut difficilement être considérée, sans autre preuve, comme la représentation d'un grand nombre, puisqu'il s'agit à strictement parler de la notation de « 3 de quelque chose, fèves de cacao », comme lorsque l'on dit « 3 des animés, hommes ». Qu'un éléphant soit immense par rapport à une puce ne prouve pas que « 3 des animés, éléphants » est un plus grand nombre[13] que « trois des animés, puces » ! Tournons-nous vers les données mieux assurées.

Notation numérique 'à la romaine' dans les almanachs

On trouve, dans les codex mayas, des dizaines d'almanachs divinatoires. Ce sont des tableaux qui font parcourir, un peu comme dans un jeu de l'oie ou de Monopoly, les 260 jours de l'année religieuse ; à chaque 'station', le scribe émet une sentence (malédiction par exemple) associée à l'image d'une divinité. Les parcours sont indiqués par des nombres en noir comme **20** ou **13**. Les jours, par exemple 6 **Cimi,** sont indiqués par leur rang (qui peut varier de 1 à 13) écrit en rouge, le plus souvent sans indication du nom **Cimi** de la 'treizaine' (sorte de semaine ou de mois de l'année religieuse). Seuls les jours de départ sont notés en-dessous de leur coefficient 12 mis en 'facteur commun'. Tout almanach est une suite alternée de ces deux données : date d_1, durée T_1, date d_2, durée T_2, date d_3, etc.

Exemple, dans le codex de Madrid :



Soit la transcription :

12								
Cimi								
Etzna b	**2 0**	**6**	**1 3**	**6**	**1 0**	**3**	**9**	**1 2**
Oc								
Ik								
Ix								

Très concises, les informations doivent être développées. Chacun sait qu'un déplacement de 3 jours fait passer d'un *mardi 14 juillet* à un *vendredi 17 juillet*. Un scribe savait que l'on passe, en 20 jours, d'un **12 Cimi** à un **6 Cimi**, d'où l'on arrive, en 13 jours, à un **6 Cauac**. En écrivant les données sous-entendues, on obtient la lecture suivante de l'almanach :

12 Cimi	**+ 20**	**6** (Cimi)	**+ 13**	**6** (Cauac)	**+ 10**	**3** (Muluc)	**+ 9**	**12** (Etznab)
12 Etznab	**+ 20**	**6** (Etznab)	**+ 13**	**6** (Chuen)	**+ 10**	**3** (Imix)	**+ 9**	**12** (Oc)
12 Oc	**+ 20**	**6** (Oc)	**+ 13**	**6** (Kan)	**+ 10**	**3** (Ben)	**+ 9**	**12** (Ik)
12 Ik	**+ 20**	**6** (Ik)	**+ 13**	**6** (Men)	**+ 10**	**3** (Muluc)	**+ 9**	**12** (Ix)
12 Ix	**+ 20**	**6** (Ix)	**+ 13**	**6** (Lamat)	**+ 10**	**3** (Caban)	**+ 9**	**12** (Cimi)

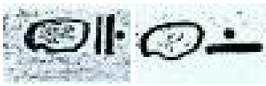
L'année religieuse, ou *tzolkin,* est ainsi divisée en 5 groupes de dates distantes entre elles de 20, 13, 10 et 9 jours. Du point de vue de l'écriture numérique, les almanachs sont des corpus de petits nombres (< 40) écrits dans un contexte particulier. Ce contexte impose une forme

[13] Par contre, l'usage d'un système métrologique implique une échelle ou un changement d'échelle, et permet de montrer que « 3 des kilos, grammes » est une plus grande quantité que « 3 des micros, grammes ». On devine ainsi que la généralisation de l'usage d'un système métrologique, son transport dans un autre domaine d'expérience que celui pour lequel il fut créé, permet de s'abstraire de la contingence et de faire un pas vers l'arithmétique, de passer de l'administration ou de la comptabilité des denrées à la théorie des nombres ou à l'arithmétique des mesures. De ce point de vue, « 3 des double cauac, fèves de cacao » est une grande quantité saisie, moins par un grand nombre, que par une grande unité, elle-même déterminée par un petit nombre. Il devient possible de saisir distinctement (sous forme d'un grand nombre à plusieurs chiffres significatifs) diverses quantités importantes : « 3 *pik* 12 *bak* 7 *ka* 5-des graines, fèves de cacao ».

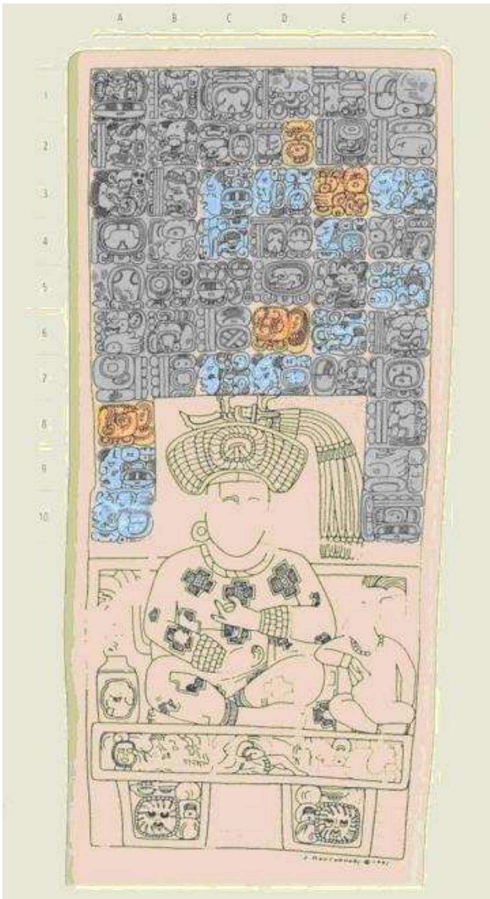
très condensée : disposition en tableau, 'mise en facteur commun' du rang 12, pas d'indication du nom X du jour mais seulement de son rang α, pas d'unité de temps P_i. Dans ce contexte, les scribes n'utilisèrent pas leur numération vigésimale de position, mais une extension du système répétitivo-additif des chiffres de style point/barre, dans lequel un point vaut 'un' et une barre 'cinq'. La numération des almanachs est de la veine de la numération romaine ou d'autres encore plus anciennes ; dans toute la Méso-Amérique et au moins depuis 500 avant J.-C., elle est utilisée, pour noter les petits nombres en logique répétitivo-additive :

	1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.	9.
10.	11.	12.	13.	14.
15.	16.	17.	18.	19.

L'extension est obtenue en ajoutant le glyphe KAL (ci-contre) aux nombres d'appui additif déjà connus, c'est-à-dire la barre simple (cinq), double (dix), ou triple (quinze). Ce glyphe a la valeur numérique 'vingt'. On lui ajoute un complément point/barre pour écrire les durées supérieures à 20 jours. Par exemple, la durée **+31** est représentée par le glyphe KAL suivi de onze (deux barres et un point), et la durée **+26** par KAL suivi de six (une barre et un point) :



Notation des grandes durées



La stèle 3 de Piedras Negras (674-711 ap. J.-C.) dit que la reine maya KATUN AHAU est née 1 million 383 mille 136 jours après le début de l'ère maya, un **5 Cib** ***14 Yaxkin***, et qu'il s'est écoulé **12-tun 10-uinal 0-kin** (4 520 jours) jusqu'à son mariage, puis encore **1-katun 1-tun 11-uinal 10-kin** (7 790 jours) jusqu'à la naissance de sa fille. A quelle date tombe l'anniversaire de la princesse KIN AHAU ? C'est le premier problème posé aux scribes. Il consiste à déterminer une date (de la forme $\alpha' X' \beta' Y'$), connaissant la distance (de la forme $\Sigma c_i P_i$) qui la sépare d'une date ($\alpha X \beta Y$) connue, soit à résoudre l'équation « date $\alpha X \beta Y$ + durée $\boldsymbol{\Sigma c_i P_i}$ = date $\alpha' X' \beta' Y'$ ». Tous les documents (almanachs, stèles, monuments, céramiques) prouvent que les scribes savaient résoudre ce problème, de même que celui qui consiste à déterminer la distance séparant deux dates même très éloignées.

La représentation des durées repose sur un système d'unités de temps dites 'glyphes de périodes'. L'unité principale est le **tun** ou année de compte (360 jours) ; ses premiers multiples sont le **katun** (qui vaut 20 *tuns*), le **baktun** (400 *tuns*), le **pictun** (8 000 *tuns*), etc. Le système est complété par un sous-système comprenant le **uinal** ('mois' de 20 jours, mais valant 1/18 de *tun*) et le **kin** ou 'jour'. Toute durée s'exprime comme une combinaison de ces unités disposées dans l'ordre (croissant ou décroissant) des unités de temps, chacune est affectée d'un coefficient compris entre 0 et 19. Ce coefficient est écrit comme un chiffre de style point/barre ou de style céphalomorphe. Le zéro est attesté dès l'époque classique, à partir de 357 après J.-C.
Dans les codex, les durées s'écrivent selon la même logique vigésimale. Mais, sur ce support, les unités ne sont pas notées. Le scribe transcrit seulement la suite des chiffres d'un nombre. Seul le rang des chiffres indique la valeur de l'unité qu'ils quantifient ; et les zéros sont toujours mis. Outre de nombreuses durées, les codex contiennent des tables de multiples (multiples d'une durée, par exemple de 780 ou de 2920 liés aux révolutions de Mars ou Vénus).
Bref, la numération des codex est identique à celle des monuments, sauf que le scribe sous-entend les unités ; ce qui fait de la numération hybride des monuments une véritable numération de position des codex fort semblable à la numération méso-américaine dont elle ne diffère que par l'invention du zéro. En tout cas, les scribes écrivaient : **8-baktun 16-katun 0-tun 0-uinal 0-kin** sur les monuments, et : **9.9.16.0.0.** sur les codex.
Ces exemples peuvent se lire en *tuns* (unité principale du système des unités de temps) ou en *kins* (jours). Soit : 8 x 400 + 16 x 20 + 0 *tuns* = **3 520 *tuns*** ou 8 x 144 000 + 16 x 7 200 + 0 x 360 + 0 x 20 + 0 *kins* = **1 267 200 *kins*** ; et 9 (x 400) + 9 (x 20) + 16 *tuns* = **3796 *tuns*** ou 9 (x 144 000) + 9 (x 7 200) + 16 (x 360) + 0 (x 20) + 0 *kins* = **1 366 560 *kins***.

On peut conclure que, chez les Mayas, le nombre abstrait n'est pas sorti progressivement d'une forêt de systèmes métrologiques particuliers qui se prêtent mal aux calculs de conversion. Il semble ne rien devoir, dans cette partie du monde, au développement des pratiques comptables et administratives. Par contre, le nombre maya doit beaucoup à la magie ou à la fascination du temps, que les scribes s'efforçaient de rapporter au vouloir des divinités ou à la position des astres. Il vient des nécessités de la divination (comme dans l'usage des almanachs) ou d'une astronomie largement empreinte de préoccupations astrologiques, et plus encore de la volonté des princes d'écrire leur histoire et celle de leur cité. Une histoire toujours émaillée de dates et de durées, et toujours reliée au cycle des créations de la mythologie. Ces nécessités furent satisfaites par l'héritage d'un calendrier commun à toute la Méso-Amérique, et par le progrès d'une arithmétique reposant sur le développement d'un seul système métrologique, celui des unités de temps multiples de vingt.
Cet usage des grands nombres a conduit par ailleurs à distinguer soigneusement les aspects cardinal et ordinal du nombre, les durées et les dates. Mais aussi à la distinction, unique dans le monde, d'un zéro cardinal et d'un zéro ordinal. Le zéro des durées et celui des dates. Comme tous les zéros du monde, le zéro cardinal maya est celui des numérations de position.
Plus particulier, le zéro ordinal marque le premier jour des mois de l'année solaire (le *haab* de 365 jours, répartis en 18 mois de 20 jours et une période complémentaire de 5 jours). Chez les Mayas, on ne dit pas « Premier Juillet, Deux Juillet, etc. », mais « Zéro Pop, Un Pop, etc. ». Comme le prouve la pendeloque de Leyde, ce zéro ordinal est attesté dès l'époque classique, en 320 après J.-C., c'est-à-dire 37 ans avant le zéro cardinal des durées attesté par les stèles 18 et 19 de Uaxactún.
Fait remarquable, les scribes n'ont jamais confondu les deux notions, qu'ils distinguèrent toujours soigneusement : dans les almanachs, par exemple, en écrivant les durées en noir et

les dates en rouge. A l'occasion, ils mirent à profit le fait que le point de départ d'un cycle mensuel est aussi le point d'arrivée du précédent, en écrivant par exemple la date ***0 Mol*** sous la forme ***20 Yaxkin***, comme si nous adoptions la variante « 32 décembre » pour désigner le « premier janvier » . Il est intéressant, à ce propos, de noter que les glyphes choisis renvoient respectivement à l'idée d'accomplissement ou de fin (pour le 20 de 20 Yaxkin) et d'intronisation ou de début (pour le zéro de 0 Mol).

Cette brève comparaison de l'histoire du nombre en Mésopotamie et Méso-Amérique prouve que seules des approches résolument interdisciplinaires – archéologie, anthropologie, linguistique, sémiotique des cultures, mathématiques, etc. – permettent de démêler et d'interpréter les sens possibles des multiples cogenèses qui interfèrent dans la construction du nombre. Elle montre que le nombre est un instrument de cognition et de domination qui se fait langage de l'administration, de l'astrologie ou des sciences. L'invention ou la construction du nombre est toujours une histoire collective étroitement articulée aux besoins d'une pluralité de peuples confrontés aux défis des milieux naturels et des environnements sociaux. Des peuples qui tentent de dépasser – par les écritures et leurs techniques – la barrière de leurs langues… et de donner – par la divination, la science ou l'interprétation – un sens à leur coexistence pas toujours pacifique.

Références

A. Cauty, 2005, 'L'arithmétique maya', *Mathématiques exotiques* (Dossier n° 47 *Pour La Science*), pp.12-17.

A. Cauty et J.-M. Hoppan, 2005, 'Et un, et deux zéros mayas', *Mathématiques exotiques* (Dossier n° 47 *Pour La Science*), pp.18-21.

F. d'Errico, 1998, 'Palaeolithic origins of artificial memory systems : an evolutionary perspective', *Cognition and Material Culture : The Archaeology of Symbolic Strorage*, C. Renfrew et C. Scarre (éditeurs), McDonald Institue Monographs, Cambridge, pp. 19-50.

F. d'Errico, 2002, 'L'origine du stockage de l'information', *Du signe à l'écriture*, Dossier Pour La Science n° 33, Octobre/janvier 2002, pp.6-9.

G. Guitel, 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion, 858 p.

D. Huylebrouck, 2005, 'L'Afrique, berceau des mathématiques', *Mathématiques exotiques*, Dossier Pour La Science n° 47, Avril/juin 2005, pp.46-50.

D. Schmandt-Besserat, 1978, 'Les plus anciens précurseurs de l'écriture', *Pour La Science*, n° 10, avril 1978, pp. 12-22.