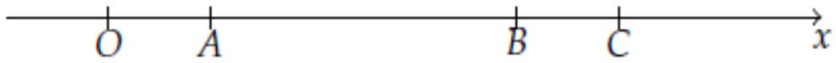
Energie Potentielle

Définition forces conservatives (ou pas) :

On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A au point B ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les points A et B. Dans ce cas, le travail de la force du point A au point B ne dépend que des positions des points A et B.

Le chemin suivi pour aller de A à B peut passer par C :



On a vu avec le calcul des travaux que la force de rappel élastique et celle de gravité sont conservatives (idem pour la force de coulomb).
Les forces de frottement ne le sont pas !!

Ex: Frottement solide : $\|\vec{f}\| = k_c\|\vec{R}\| = k_c mg$

$$W_{O\to A}(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\overrightarrow{OA} = -k_c mg\|\overrightarrow{OA}\|$$

et si on fait un détour? (cf poids, élastique en opposition)

Energie Potentielle

Que devient l'énergie du travail d'une force ? Ex : travail du poids

<u>Définition de l'énergie potentielle :</u>

Lorsqu'une force est **conservative**, on peut lui associer une énergie potentielle Ep(M) qui est une fonction de la position M. L'énergie potentielle est une fonction telle que :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$$

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -f(x) = -\vec{F}(x)\cdot\vec{i}.$

On dit que cette force F dérive d'un potentiel $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x)\cdot\vec{i}\mathrm{d}x = E_p(x_A) - E_p(x_B)$

Cela implique que $E_p(x) = -\int_0^x \vec{F}(s)\cdot\vec{i}\mathrm{d}s + C$

L'énergie potentielle est définie à une constante près. On doit choisir l'origine de celle-ci (illustré par la pesanteur et la hauteur du support).

Cela n'a pas d'influence car on ne s'intéressera qu'aux variations d'énergie potentielle.

Energie mécanique

Définition de l'énergie mécanique :

L'énergie mécanique E_m du système est la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p. Pour un point matériel de masse m et de vitesse v, on aura donc :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + E_p}$$

Théorème de l'énergie mécanique :

La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces non conservatives qui s'appliquent sur le système, le long de sa trajectoire.

$$\boxed{E_m(B) - E_m(A) = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F}).}$$

Ainsi s'il n'y a que des forces conservatives E_m se conserve (illustrer avec des systèmes oscillants)

Démonstration du théorème de l'énergie mécanique :

Le théorème de l'énergie cinétique donne $E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F}) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F})$.

La définition de l'énergie potentielle est $E_p(A) - E_p(B) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F})$.

On en déduit $$E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F})$$

Qui peut s'écrire

$$\boxed{[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F}).}$$

CQFD

Energie mécanique

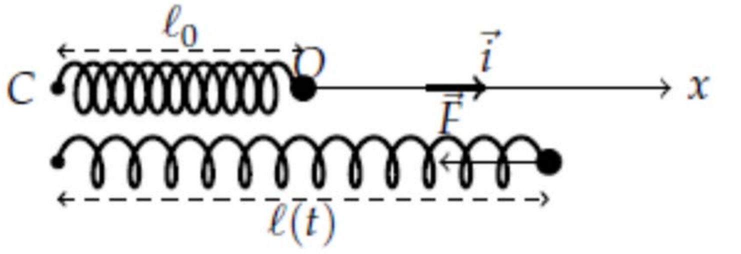
Version locale du théorème de l'énergie mécanique :

La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la somme des puissances développées par les forces non conservatives qui s'appliquent au système.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}\ \text{non-conservatives}} \vec{F} \cdot \vec{v}.}$$

Energie mécanique : exemple 1

Oscillateur amorti (bille de masse m sur support accrochée au ressort) :



Le poids et la réaction du support se compensent (mouvement horizontal) $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

Force de rappel du ressort (conservative) : $\vec{F} = -kx\vec{i}$

Force de frottement (non conservative) : $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$

L'énergie potentielle est telle que $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -\vec{F}\cdot\vec{i} = kx$ donc $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$

Si C=0 (Ep nulle à l'équilibre)

$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ et $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\cdot\vec{v} = -\lambda\vec{v}\cdot\vec{v} = -\lambda\|\vec{v}\|^2 = -\lambda\dot{x}^2$

Donc $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right] = -\lambda\dot{x}^2$ d'où

$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = -\lambda\dot{x}^2 \Leftrightarrow m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$

Energie mécanique : exemple 2

Vitesse de libération d'un satellite de masse m :

Force de gravitation $\vec{F} = -\frac{GmM}{\|\vec{OS}\|^3}\vec{OS} = -\frac{GmM}{x^2}\vec{i}_r$ d'énergie potentielle $E_p(x) = -\frac{GmM}{x} + C$

(si Ep nulle à l'infini, C=0) $$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \frac{GmM}{\|\vec{OS}\|}.$$

Cette énergie se conserve, donc $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}.$

On en déduit $v^2 = v_0^2 - 2MG\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$

$\lim_{r\to\infty} v^2 = v_0^2 - \frac{2MG}{R}$ pour que v² reste positif : $\lim_{r\to\infty} v^2 > 0 \Leftrightarrow v_0^2 - \frac{2MG}{R} > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2MG}{R}} \equiv v_\ell$

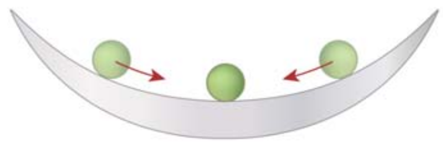
$$v_\ell = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR}.$$

Energie, équilibre et stabilité

On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs pour cette partie. La donnée de Ep en fonction de M permet de déterminer les positions où le système est à l'équilibre et d'étudier leur stabilité.

Définitions :

Position d'équilibre : Un point matériel est à l'équilibre si la **somme des forces** appliquées est **nulle**. La position Me du point correspondante est appelée position d'équilibre.

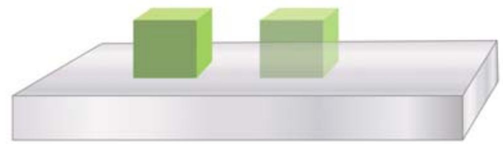


Équilibre stable

Equilibre stable : La position d'équilibre Me est une position d'équilibre **stable**, si lorsqu'on écarte le système de Me, les forces tendent à le **rapprocher** de Me.

Équilibre instable

Equilibre **instable** : La position d'équilibre Me est une position d'équilibre **instable**, si lorsqu'on écarte le système de Me, les forces tendent à **l'éloigner** de Me.



Équilibre neutre

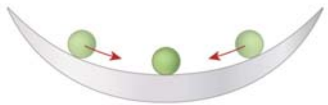
Energie, équilibre et stabilité

Extrema de l’énergie potentielle :

Une position d’équilibre Me est un extremum de l’énergie potentielle.
La position d’équilibre est stable si Me est un minimum local et l’équilibre est instable si Me est un maximum local de l’énergie potentielle.

Démonstration 1 : $$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -f(x) = -\vec{F}(x)\cdot\vec{i}.$$

Donc si $\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = 0;$ alors $\vec{F}(x_e) = \vec{0}$ position d’équilibre = extremum



Équilibre stable

Équilibre instable

Équilibre neutre

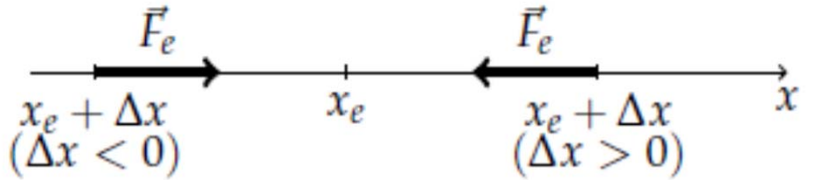
Energie, équilibre et stabilité

Démonstration 2 :

La position d'équilibre est stable si Me est un minimum local et l'équilibre est instable si Me est un maximum local de l'énergie potentielle.

Considérons la position d'équilibre x=xe $\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = 0$

Ecartons de Δx, le système de cette position. Si le système est stable, la composante de la force va s'opposer au déplacement :



$$\vec{F}(x_e + \Delta x) \cdot \vec{i}\Delta x < 0,$$

Donc si le système est stable $-\Delta x \left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} < 0 \Leftrightarrow \Delta x \left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} > 0,$

dEp/dx est de même signe que Δx, c'est un minimum !

À SAVOIR

- **Calculer une énergie (mécanique, cinétique, potentielle)**
- **Calculer le travail d’une force**
- **Connaître les relations liant ces grandeurs**

Sur l’énergie :
https://www.cea.fr/comprendre/Pages/energies/essentiel-sur-energies.aspx

Applications et ordres de grandeur

Comment l’être humain se fournit en énergie ?

Je mange une barre de céréales de 21g

Valeur énergétique 99 kcal (Cal) = 414 kJ !!!!
Besoin = 2 000 kcal/jour

Et avec ça ? (température, transformations chimiques, stockage, énergie mécanique …)

Attention, la morphologie du corps humain fait consommer de l’énergie même sans fournir de travail (cf. gainage)

1 calorie = 4,184 J

Applications et ordres de grandeur

Et si je soulève une masse M?

La masse aura acquis de l’énergie potentielle (Mgh) rappel $g=9{,}81\ ms^{-2}$
A quoi correspond 1 Joule? Mh = 0,1 c’est donc une masse de 100g élevée d’un mètre (par exemple), c’est aussi la décharge maximum autorisée d’une clôture électrique

Et 200 kg sur 2m ?
4000J (1/100 de barre de céréales)

Ou si je monte en voiture en haut du Mont Ventoux?
(1 tonne sur 1100 m)
~10^7J sans les frottements

Applications et ordres de grandeur

Autres sources d’énergie :

Je brule une feuille de papier 84 000 joules

Un litre d'essence contient **9,63 kWh d'énergie, soit 8 285 kcal = 34 668 000 J**
Si 6l/100 km alors 1l~15 km uniquement des frottements si pas de montée et vitesse constante

1g d’uranium 72 10^9 J

Roger Balian, « L'énergie de demain »: une centrale nucléaire de puissance 1000MW électrique consomme 27 tonnes d'uranium par an, une centrale thermique de même puissance consomme 170 tonnes de fuel par heure, et qu'une centrale hydraulique de même puissance nécessiterait la chute de 100m de haut de 1200 tonnes d'eau par seconde

« Energie » solaire 1000 W/m² (quelle surface, quelle durée?)

Problèmes de rendement ….

Applications et ordres de grandeur

Consommations d'énergie :

Bouilloire 1000 W (=1000 J/s), il faut ~335 000 J pour faire bouillir 1l d'eau (~5 min)
Pour réchauffer un litre d'eau d'un degré il faut 4 180 J
Douche (écart de température : 36 - 15 = 21 °C; volume d'eau : 50 litres)

Batterie de téléphone portable
Technologie : Li-Ion, Capacité : 3000 mAh, Tension : 4.4 V
Energie = tension*courant*durée=3*3600*4.4= 47 500 J (1/10 barre de céréales)

Puissance en vélo ~200 W (4 minutes pour charger la batterie)