MÉCANIQUE DU POINT
RECUEIL D’EXERCICES

Année 2023-2024

TD1 : EQUATIONS AUX DIMENSIONS

1- HOMOGÉNÉITÉ - EQUATIONS AUX DIMENSIONS

Exercice 1 Dimensions et homogénéité

a) Rappeler ce qu'on entend par « dimension d'une grandeur ».
b) Donner l'équation aux dimensions, la dimension, ainsi que l'unité usuelle: d'une force, d'une pression, d'une énergie, de l'énergie potentielle de pesanteur.
c) Quelle est l'équation aux dimensions de chacune des dérivées suivantes:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2(x^2)}{dt^2}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

x désigne une variable position fonction de t, variable temps.
d) Les expressions ou égalités suivantes sont-elles homogènes ?
(m désigne une masse, l une longueur et t un temps)

$$i)\ m_1^2 + m_2 = m_1 m_2, \qquad ii)\ l_1 t_1^2 - \frac{l_1^2 t_2^3}{l_2 t_1} = 0\,, \quad iii)\ 1 - \mathrm{Ln}\left(\frac{t_1}{t_2}\right) = \frac{t_3}{t_1},$$

$$iv)\ t_1 - cos(t_2) = t_3 \qquad v)\ \frac{m_1}{m_2}\sqrt{Ln\left|\frac{l1}{l2}\right|}\exp\left(-\frac{t_2}{t_1}\right) = 1$$

e) Soit l'expression $l = l_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Que représentent ω et φ ? Quelles sont leurs dimensions respectives ? Leurs unités respectives ?

Exercice 2 Tension superficielle

On définit la tension superficielle σ d'un liquide comme l'énergie par unité de surface nécessaire pour créer une interface entre ce liquide et l'atmosphère.
a) Montrer que la quantité $\sqrt{(\sigma/\rho g)}$ a la dimension d'une longueur, ρ étant la masse volumique du liquide et g l'accélération de la pesanteur.
b) Calculer cette longueur dans le cas de l'eau (σ= 0.070 $J.m^{-2}$). A quoi pensez-vous qu'elle peut correspondre?
c) On mesure la tension superficielle en mesurant une force. Comment s'exprime la tension superficielle à partir d'une force?

Exercice 3

Une masse m suspendue à une tige verticale, de masse négligeable, de longueur l est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ. En absence de toute autre force que celle de son poids et pour des faibles valeurs de l'amplitude angulaire θ, la masse m a un mouvement d'oscillations avec une période P.
1) Devinette : dans ces conditions, quels sont les paramètres qui peuvent modifier les valeurs de la période ?
2) Donner les dimensions de l, m, g, θ. Quelles sont leurs unités respectives ?
3) En faisant une analyse dimensionnelle, exprimer la période en fonction de l et de g ($norme\ de\ l'accélération\ de\ la\ pesanteur$).

TD2 : CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

1. RAPPELS SUR LES VECTEURS ET LES CALCULS DE DÉRIVÉES DE FONCTIONS

Exercice 1.1

Soient 3 vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \vec{V}$ définis dans un repère orthonormé $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ par leurs composantes :
$\overrightarrow{u_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{u_2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{V}(-2,-1)$

1- Représenter graphiquement les 3 vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \vec{V}$

2- Montrer que $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ forment une base orthonormée du plan.

3- Décomposer $\vec{V}$ dans cette base.

4- Calculer $\|\vec{V}\|$ dans les deux bases et commenter.

Exercice 1.2

Dans un repère orthonormé Oxyz associé à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, un point M de coordonnées X,Y,Z est repéré par le vecteur position $\vec{r}$, avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}$

1- Calculer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ suivant la direction $\overrightarrow{OM}$ dans le repère cartésien $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en fonction de X,Y,Z.

2- Calculer les cosinus des angles entre $\vec{r}$ et chacun des trois axes du repère. (cosinus directeurs de $\vec{r}$) pour $M(4,-3,1)$

Exercice 1.3

Une particule de charge q est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme. À l'instant t, elle possède une vitesse $\vec{v}$. Dans l'espace rapporté au repère orthonormé ($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$), $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont définis par :

$\vec{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$ $\quad\quad$ $\vec{B} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$

1- Calculer $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{B}\|$

2- Déterminer l'angle θ que font entre eux les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$

3- Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{B}$

Exercice 1.4

On rappelle la notation différentielle de la dérivée de la fonction $f(x)$: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes puis les écrire en utilisant la notation différentielle, $a \text{ et } \omega \text{ sont des constantes}$

a) $y(x) = ln(x)$; b) $z(x) = e^{ax}$; c) $w(x) = \sin(\omega x)$; d) $u(x) = \cos(\omega x)$

e) $f(t) = ln(t)$;f) $g(t) = \exp^{(at^2)}$; g) $x(t) = cos(\omega t)$; h) $y(t) = sin^2(\omega t)$

2) Soit le vecteur $\vec{V} = \text{a}\cos(\omega t)\,\vec{\imath} + b\sin(\omega t)\,\vec{\jmath}$, avec $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ des vecteurs unitaires d'une base orthonormée.

Quelles sont les composantes du vecteur dérivé de $\vec{V}$.

2. CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

Exercice 2.1

Une rame de métro partant du repos a une accélération de $2\ ms^{-2}$ pendant 10 secondes. Elle roule ensuite pendant 50 s à vitesse constante, puis freine avec une accélération égale à $-1{,}5\ m.s^{-2}$ pour s'arrêter à la station suivante.

1) Représenter graphiquement l'accélération
2) Déterminer l'expression de la vitesse dans chaque phase et la représenter sur le graphique
3) Déterminer l'expression de la position fonction du temps dans chaque phase et la représenter graphiquement.
4) Déduire la distance entre les deux stations.

Exercice 2.2

A) Un point matériel se déplace avec un mouvement rectiligne le long de l'axe des x suivant la loi :

$$x = 3t^3 + 2t^2 + 4\,, \quad [x] = L$$

1) Quelles sont sa vitesse et son accélération à l'instant t.
2) Calculer sa position, sa vitesse, son accélération à $t = 1s,\ t = 2s$

B) Un point matériel P est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans le repère cartésien Oxyz :

$\overrightarrow{OP} = \frac{e^{-5t}}{10}\vec{\imath} + \frac{e^{-3t}}{3}\vec{\jmath} + e^{-t}\vec{k}$

1) Déterminer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}$ et accélération $\overrightarrow{a}$ à l'instant t.
2) Exprimer le module de $\overrightarrow{V}$ à l'instant t

Exercice 2.3

Soit un mouvement avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ de norme v et faisant un angle θ avec l'axe ox d'un référentiel lié à la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On définit $\vec{u}$ comme le vecteur unitaire tangent à la trajectoire à chaque instant.

1) Écrire le vecteur vitesse en fonction de $\vec{u}$ et l'exprimer en fonction de ses cosinus directeurs.
2)
a) Calculer le vecteur accélération $\overrightarrow{a}$ en fonction de v et de θ ainsi que $\dot{v}$ et $\dot{\theta}$
b) Vérifier que pour un mouvement accéléré on a $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{a} > 0$ et s'il est décéléré $\vec{v}.\vec{a} < 0$.
c) Montrer que pour un mouvement uniforme on a nécessairement $\overrightarrow{v}$ normal à $\overrightarrow{a}$, le vecteur accélération.

Exercice 2.4

Une particule M se déplace le long d'une courbe définie, dans un repère Oxyz, par les équations paramétriques suivantes :

$$x(t) = 2\,\mathrm{a}.\cos(2\omega t)\ ;\ y(t) = 4\,\mathrm{a}.\sin(2\omega t)\ ;\ z(t) = 0$$

1) Tracer l'allure de la trajectoire dans le plan Oxy.
   Prendre $a = 1\,cm\,,\ \omega = 1\,rad/s$
2) Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse. Calculer les valeurs des demi-axes de l'ellipse. En déduire son équation.
3) Quel est le temps mis par la particule pour faire un tour complet ?
4) Etablir l'expression de la vitesse et celle de l'accélération de la particule.
5) Reporter les vecteurs vitesse et accélération sur le graphe pour les valeurs de t suivantes : $t = 0\,s,\ \ t = \frac{\pi}{4}s,\ t = \frac{\pi}{2}s, t = \frac{3\pi}{4}s.$ Commenter.

Exercice 2.5
Soit un point P en mouvement sur un axe ox, repéré à chaque instant par sa coordonnée $x(t)$:
$x(t) = bcos(kt + \frac{\pi}{4})$, avec b, k des constantes positives.
1) Décrire qualitativement le mouvement de P.
2) Calculer les valeurs extrémales de $x(t)$?
3) On mesure la période T du mouvement : T=3.56 s. En déduire la valeur de k.
4) Déterminer les temps t_{max} et t_{min} pour lesquels $x(t)$ est maximal (minimal resp).
5) Quelle est l'expression du vecteur vitesse ?
6) Quelles sont les valeurs maximale et minimale de $\overrightarrow{\|v\|}$? Pour quelles valeurs du temps sont-elles atteintes ?
7) Représenter graphiquement x(t) et $\overrightarrow{\|v\|}$ dans l'intervalle [–T, T].

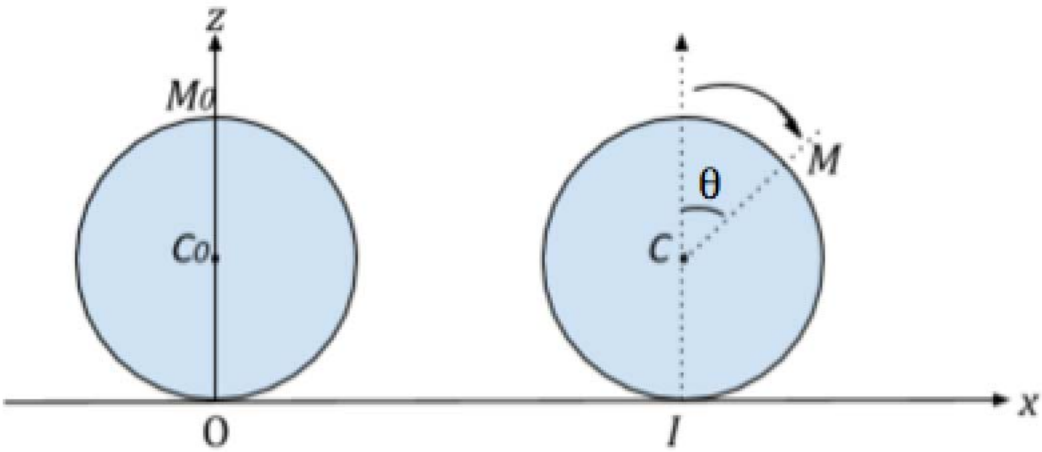
Exercice 2.6
Un point M décrit la parabole $y = \frac{x^2}{2p}$ du plan xOy dans le sens des x croissants avec une vitesse $\vec{v}$ de norme constante v_0.
1) Quelle est la dimension de la constante p ?
2) Montrer que la paramétrisation : $x = ct, y = {(ct)^2}/{2p}$ avec $c = cste$, n'est pas possible.
3) Donner les expressions de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du point M en fonction du temps, de v_0 et de $\alpha(t)$, α désigne l'angle de la tangente en M avec ox.

Exercice 2.7

On s'intéresse au mouvement d'une balle de masse m qui se déplace dans le plan vertical Oxy.
À l'instant initial $t_i = 0$ la balle est au point d'altitude h.
Les composantes du vecteur position dans une base cartésienne sont :
$$x(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \ , \qquad y(t) = \frac{-\beta t^2}{2} + \gamma$$
α, β, γ: sont des constantes positives valant 6, 9, 3 dans le S.I.
1) Quelles sont les dimensions de α, β, γ ?
2) Déterminer l'équation de la trajectoire de la balle
3) Déterminer en fonction de t et de α, β, γ les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ de la balle.
4) Déterminer en fonction de t et de α, β, γ les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$ de la balle.
5) Que remarquez-vous concernant le mouvement de la balle ?
6) a) Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}_i$ et le vecteur accélération $\vec{a}_i$ à l'instant initial (direction et norme).
   b) Que représentent les constantes α, β, γ ?
   c) Quelle est la nature du mouvement de la balle ?
   d) Les valeurs numériques semblent-elles raisonnables ?
7) a) Tracer soigneusement la trajectoire de la balle pour $y > 0$.
   b) Représenter les vecteurs $\vec{v}_i \ et \ \vec{a}_i$ sur le graphe.

Exercice 2.8

Un caillou est accroché à la surface de la roue d'une bicyclette de rayon R. La roue roule sur un chemin horizontal avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$, et la bicyclette avance avec une vitesse uniforme $\overrightarrow{V}$ parallèle à l'horizontale. Soit Oxz le plan vertical lié à la base $\vec{\imath}, \vec{k}$ dans lequel se fait le mouvement. On désigne par M la position du caillou. À $t = 0$, le point M est en M_0 et le centre C de la bicyclette en C_0.
Le mouvement est un roulement pur ce qui signifie que la distance parcourue par chaque point de la circonférence de la roue en rotation est égale à la longueur horizontale parcourue par le centre C de la roue.



1) a) Calculer la distance $x(t)$ entre C_0 et C, parcourue par le centre C pendant un temps t.
   b) Écrire l'expression du vecteur vitesse du centre C
2) a) Exprimer la longueur $l(t)$ de l'arc défini par un angle $\theta(t)$ sur la circonférence, en fonction de R.
   b) En déduire une relation entre V, R, θ, t.
   c) Vérifier l'homogénéité de cette relation.
3) En vous aidant de la figure, exprimer les composantes $x_c et\ z_c$ du vecteur position $\overrightarrow{OC}$ du centre C à chaque instant t.
4) Toujours en vous aidant de la figure, montrer que les composantes du vecteur position du point M s'écrivent :
$$x_m = R(\theta + sin\theta)$$
$$z_m = R(1 + cos\theta)$$
5) Calculer l'expression du vecteur vitesse de M. En déduire sa norme V_m.
6) a) Calculer l'expression du vecteur accélération.
   b) On considère le cas où la vitesse angulaire est constante : $\dot{\theta} = \omega$.
   - Que devient le vecteur accélération.
   - Montrer qu'il peut se mettre sous la forme : $\overrightarrow{a_m} = -\omega^2\,\overrightarrow{CM}$
   - Exprimer alors la norme a_m en fonction de V et de R.

7) On s'intéresse maintenant à la trajectoire du point M.

Pour $\theta = \omega t \quad \omega = constante$, on étudie la trajectoire d'équations paramétriques :
$$x_m(\theta) = R(\theta + sin\theta)$$
$$z_m(\theta) = R(1 + cos\theta)$$
a) Calculer la valeur P de la période de la fonction $z_m(\theta)$?

b) Calculer les valeurs de $x_m(\theta)\ et\ z_m(\theta)$ pour des valeurs de (θ) : 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$
Déduire les points entre $2\pi\ et\ 4\pi$ en utilisant la périodicité de $z_m(\theta)$.
Pour cette question on prendra $R = 1\ SI,\ \omega = 1\ SI$.

c) Calculer les composantes du vecteur vitesse pour $\dot{\theta} = \omega$, aux valeurs des angles : 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Représenter $\overrightarrow{V_m}$ en ces points sur la trajectoire.

d) Calculer les composantes du vecteur accélération pour $\dot{\theta} = \omega$, aux valeurs des angles θ : 0, $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Représenter $\overrightarrow{a_m}$ en ces points sur la trajectoire.

On rappelle les relations suivantes, pour un angle β:
$cos2\beta = cos^2\beta - sin^2\beta$; $sin2\beta = 2sin\beta cos\beta$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sin\beta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = cos\beta$

TD3 : DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

3-1. ÉTUDES DES ÉTATS D'ÉQUILIBRE STATIQUE

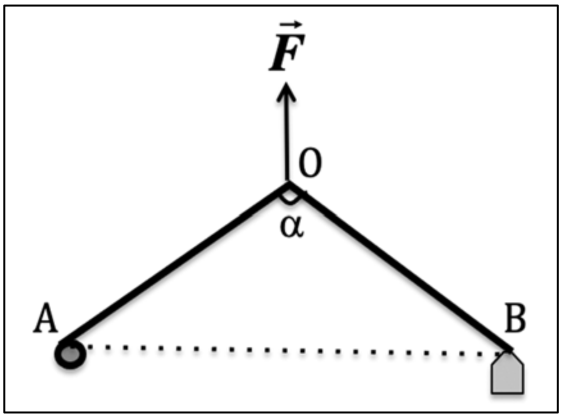
Exercice 3-1.1

Pour tirer une automobile *B* d'un fossé, on l'accroche avec une corde *AOB* dont l'autre extrémité est fixée à un arbre *A* situé à la distance D de *B*. Une force $\vec{F}$ est appliquée au centre *O* de la corde perpendiculairement à *AB*. Soit l, la longueur de la corde.

1) Quelle est la valeur de la tension ***T*** de la corde en fonction de D et de l ?

2) La valeur de la tension maximale supportée par la corde vaut $\boldsymbol{T_{max}}$. Quelle est alors la valeur limite de l'angle α ?

On donne : $F = 500\ N$, $T_{max} = 1000\ N$



Exercice 3-1.2

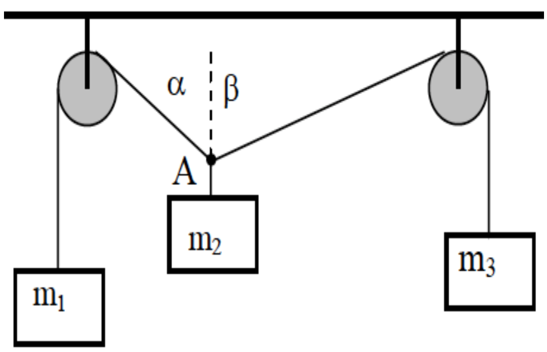
Considérons deux ressorts de longueurs L1 et L2 au repos, et de constantes de raideur k1 et k2 respectivement. Ils sont réunis par l'une de leurs extrémités, et tendus horizontalement par les deux autres accrochées chacune à un mur fixe. La distance entre les deux murs est $D > L_1 + L_2$. L'ensemble du système est immobile.

1- Quel est l'allongement de chaque ressort.

2- Quelles sont les forces exercées par chacun des ressorts sur le mur. Discuter.

Exercice 3-1.3

Soit le système en équilibre représenté sur la figure ci-contre. On néglige les frottements et les masses des poulies et des fils. Calculer les angles α et β indiqués sur la figure en fonction des trois masses.



Exercice 3-1.4

La force d'attraction F qu'exerce la Terre sur une masse ponctuelle m est de norme

$F = \frac{GmM}{r^2}$ avec : M la masse de la Terre, r la distance entre la masse m et le centre de la Terre.

1- Exprimer la norme du poids p subi par la masse m située à la surface de la terre, en fonction du rayon R de la terre et des autres données du problème.

2- Déduire une expression de l'accélération de la pesanteur g en fonction de G, M, R.

3- Calculer la valeur de g, sachant que :

$R = 6400\ km\ ; M = 6{,}0\ 10^{24}\ kg; \quad G = 6{,}7\ 10^{-11}\ S.I$

Exercice 3-1.5

Un solide de masse m est posé au repos sur une surface plane inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale :

1) Représenter sur un schéma les forces agissant sur m. Écrire la condition d'équilibre statique de m. Choisir un système d'axes approprié et indiquer les projections des forces.

2) On augmente progressivement l'angle α. A quelle condition sur α, m reste-t-elle à l'équilibre ?

3-2. DYNAMIQUE

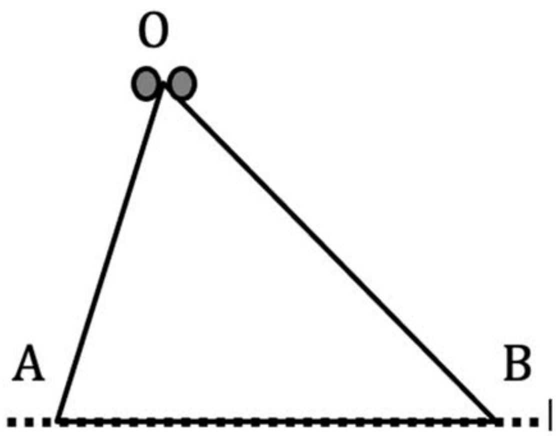
3-2.1 Une voiture de masse m=1600 kg se déplace en mouvement horizontal rectiligne avec une vitesse initiale $v_0 = 120\ km/h$. Quelle force de freinage constante faut-il appliquer au véhicule pour l'arrêter en 2 min ?

3-2.2 Course de billes

Deux billes identiques sont lâchées simultanément d'un point O d'altitude h sur deux glissières rectilignes de pentes différentes.

On considère leur passage en deux points A et B situés sur la même horizontale. On néglige les frottements. Comparer en A et B :

a) les accélérations des deux billes
b) leurs temps de parcourt depuis O
c) leurs vitesses



3-2.3 Le skieur

Un skieur de masse m se trouve sur une piste faisant un angle α avec l'horizontale et de dénivelé h.

1) Justifier qu'en absence de frottement, le skieur ne peut rester immobile.

En réalité, il existe un frottement solide de coefficient statique k_s et dynamique (cinétique) k_d

2) Rappeler ce qu'est un frottement solide puis écrire la loi du frottement sec.
3) a) Faire le bilan des forces s'exerçant sur le skieur
   b) Les représenter sur une figure ainsi que leurs projections sur un système d'axes (x, y) approprié et bien indiqué.
   c) Écrire la condition d'équilibre du skieur. En déduire l'expression de la réaction du support et la condition sur k_s pour que le skieur demeure immobile.
4) La condition d'équilibre ci-dessus n'est en réalité pas vérifiée, et le skieur descend sous l'effet de son poids. Il veut remonter la pente. Il s'accroche donc à un fil parallèle à la pente exerçant sur lui une force de traction $\vec{T}$. On considère que le fil est inextensible et de masse négligeable.
   a) Quelle est la relation entre k_s et k_d ?
   b) Faire le bilan des forces s'exerçant sur le skieur dans ces conditions. Faire un schéma indiquant toutes ces forces et leurs projections
   c) Le skieur remonte avec une vitesse constante. Quelle est l'expression de la force T en fonction de m, g, k_d, α ?
   d) Calculer la valeur de T pour : $m = 80\ kg,\ \ \alpha = 30°,\ \ k_d = 0{,}15,\ \ g = 10\ m.s^{-2}$

3-2.4 Balistique

A l'instant $t = 0$, on lance du point 0 un projectile ponctuel de masse m, avec une vitesse initiale $\vec{\boldsymbol{V}}_{\mathbf{0}}$ faisant un angle α_0 avec l'horizontale Ox. On suppose que l'accélération de la pesanteur $\vec{\boldsymbol{g}}$ est indépendante de l'altitude z. Ce projectile est soumis à une force de freinage proportionnelle à sa vitesse: $\vec{\boldsymbol{F}} = -k\,\vec{\boldsymbol{V}}$ (k est une constante positive).

1) Faire le bilan des forces et écrire la relation fondamentale de la dynamique.
2) Expliquer brièvement pourquoi le mouvement est plan.
3) On considère le repère cartésien (Oxz) dans ce plan: quelles sont alors les équations différentielles régissant respectivement les vitesses $V_x\ et\ V_z$? Les résoudre.
4) Déterminer les équations horaires du mouvement.
5) Montrer que pour des temps t grands devant un temps caractéristique τ , que l'on précisera, la vitesse du projectile tend vers une limite $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{l}}$ qui sera calculée. Quelle est alors la trajectoire? Comparer cette trajectoire avec celle du projectile non soumis à ce freinage.

3-2.5 Mouvement amorti

Un bateau à moteur se meut sur un lac dépourvu de courant. A l'instant $t = 0$ on arrête le moteur. On constate que le bateau suit une trajectoire rectiligne et prend une accélération opposée à sa vitesse et proportionnelle au carré de celle-ci : $\frac{dV}{dt} = -kV^2$

1) Comment peut-on interpréter l'accélération négative constatée ? Quelle en est la cause ?
2) On suppose qu'à $t = 0$, la vitesse du bateau est $V_0 = 21{,}5\ km/h$ et qu'elle passe à la valeur $V = 10{,}8\ Km/h$ en 15 s.
a) Quelle est l'expression de V en fonction de k et du temps t pour t>0 ?
b) Quelle est la valeur de k ?
c) Montrer que la distance x parcourue par le bateau pendant le temps t est telle que :
$x = ({}^{1}/_{k} \ln(V_0 kt + 1))$
3) Montrer que la vitesse V varie en fonction de x selon l'équation $V = v_0 \exp{(-kx)}$.
Donner l'allure de la courbe $V(x)$.

3-2.6 Le Parachutiste

On considère un parachutiste qui saute d'un avion. Si on néglige les frottements qu'il subit de la part de l'air, son mouvement vertical serait uniformément accéléré. Dans la réalité, ce n'est pas le cas et les frottements jouent un rôle important.
On donne: coefficient de viscosité de l'air $\eta = 1{,}81\ 10^{-5}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$, accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$, masse volumique de l'air $\rho_a = 1{,}29\ kg.m^{-3}$
Si certaines valeurs numériques vous paraissent manquantes, estimez les.

1) Si ces frottements sont de type fluide, la force de frottement exercée par l'air est de la forme $\vec{F} \simeq -20\eta L\vec{V}$ avec: L la taille typique du parachutiste, η la viscosité de l'air, $\vec{V}$ la vitesse du parachutiste. On néglige la poussée d'Archimède dans l'air.

Montrer en considérant le mouvement vertical que le parachutiste atteint une vitesse verticale limite que l'on estimera sans et avec parachute. Calculer cette vitesse limite en $m.s^{-1}$ et $km.h^{-1}$. Commenter.

2) Si les valeurs de la vitesse sont grandes, les frottements ne sont pas proportionnels à la vitesse, la force de frottement peut s'exprimer sous la forme: $\vec{F} = -C\rho_a L^2 |V| \vec{V}$
a) Quelle est la dimension de C ? On prendra C=1 SI dans la suite.
b) En considérant un mouvement purement vertical, trouver la vitesse limite à laquelle descend le parachutiste. Vous n'avez pas besoin de résoudre l'équation différentielle.

3-2.7 Oscillations harmoniques libres

La fréquence propre d'une masse de 100g oscillant au bout d'un ressort vertical est de 5Hz.

1) Quelle est la force exercée par le ressort sur la masse quand le ressort est allongé de 5cm ?

2) Quel est l'allongement du ressort à l'équilibre ?

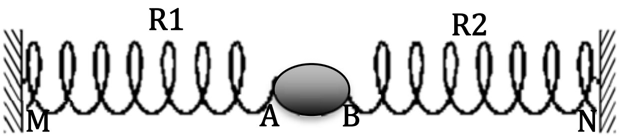
3) À l'instant t=0, on augmente l'allongement du ressort en déplaçant la masse de 1 cm par rapport à sa position d'équilibre. Déterminer l'allongement du ressort au cours du temps quand on lâche la masse sans vitesse initiale.

4) Reprendre la question 3) mais en réduisant l'allongement du ressort de 1 cm par rapport à sa position d'équilibre.

5) À l'instant t=0, on impose une vitesse initiale v_0 à cette même masse à l'équilibre. Quelle devrait être la valeur de v_0 pour obtenir des oscillations de même amplitude ?

3-2.8 Oscillations de deux ressorts couplés

Un palet de masse $m = 50\ g$ est mobile sur une table soufflante horizontale. En deux points du palet, diamétralement opposés, A et B on accroche une extrémité de chacun des deux ressorts R_1 et R_2, les deux autres extrémités étant fixées en deux points M et N alignés avec A et B. Les deux ressorts sont alors tendus et leur longueur commune $l_1 = l_2 = 30\ cm$ est supérieure à leur longueur à vide $l_0 = 25\ cm$. La constante de raideur de chaque ressort vaut $K = 7{,}2\ Nm^{-1}$.



1) Ecrire l'équation différentielle régissant le mouvement du centre de masse G du palet, puis calculer la période du mouvement obtenu lorsqu'on libère le palet après lui avoir fait subir un petit déplacement.

2) Déterminer la constante de raideur du ressort unique vertical qui, supportant la même masse m, présenterait la même période d'oscillations.

CONTRÔLE1 de 2019-20

MÉCANIQUE 1
Contrôle 1 - Durée 1:30 h

- ***Attention : seules les calculatrices de type collège sont autorisées***
- ***La plupart des questions peuvent être traitées de manière indépendante.***

QUESTIONS DE COURS

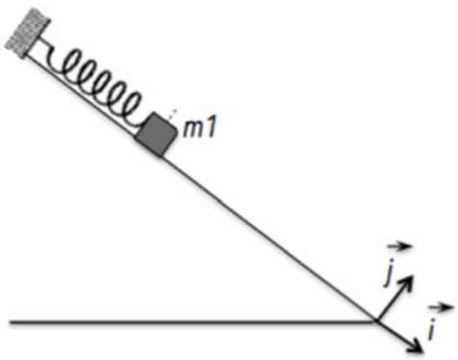
a) Rappeler l'énoncé de la 1ère et la 2ème Lois de Newton.

b) Donner la définition du travail d'une force $\overrightarrow{F}$ quelconque. Quelle est son expression dans le cas particulier d'une force constante sur un chemin rectiligne $\overrightarrow{AB}$.

c) Énoncer le théorème de l'énergie cinétique

EXERCICE 1

Une masse $m1$ est posée sur un plan incliné d'un angle φ par rapport à l'horizontale. On l'accroche à l'extrémité d'un ressort de raideur K et de longueur au repos l_0. On néglige tous les frottements avec la surface du plan.



1) Faire le bilan des forces sur $m1$. Les représenter sur la figure.

2) a) Quelle est l'expression de la force de rappel du ressort ?

b) Exprimer la longueur du ressort quand $m1$ est à l'équilibre, en fonction des données ci-dessus.

On écarte $m1$ de sa position d'équilibre. On va s'intéresser à son mouvement dans la suite des questions.

Le mouvement de $m1$ dans la direction ox est décrit par l'équation :

$$x(t) = x_0 cos\left(\sqrt{\frac{K}{m1}}t + \theta\right)$$

x_0 : position initiale de $m1$ et θ la phase initiale.

3) a) Vérifier l'homogénéité de cette expression.

b) Déterminer la période du mouvement en fonction de $K, m1$

c) Quelles sont les valeurs limites de $x(t)$?

d) Représenter schématiquement la trajectoire de $m1$

4) Déterminer l'expression de la vitesse. Quelle est sa norme ?

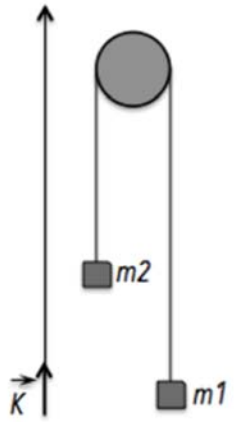
5) Déterminer l'expression de l'accélération.

6) Représenter les comportements en fonction du temps : de la position, la vitesse et l'accélération sur une période (on utilisera le papier joint).

Pour cette représentation on prend :

$$\left(\sqrt{\frac{K}{m1}} = 1\, S^{-1}, \qquad \theta = \frac{\pi}{6}\right)$$

EXERCICE 2



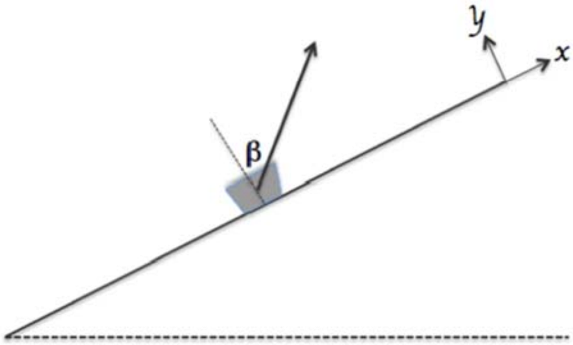
Deux masses sont accrochées aux extrémités d'un fil inextensible, de masse négligeable, passant par une poulie – voir figure ci-contre.
On néglige tous les frottements.

1) a) Faire le bilan des forces qui s'appliquent à $m1$ puis à $m2$ et les représenter sur la figure.
b) Écrire les conditions d'équilibre pour chacune des masses, puis les projeter sur l'axe indiqué. En déduire une relation entre $m1$ *et* $m2$ dans cette situation.

2) Dans le cas où cette relation n'est pas vérifiée, les deux masses ne sont plus immobiles.
a) Justifier que les deux masses ont des accélérations de normes égales. On note $\|\vec{a}\| = a$ la norme de cette accélération.
b) Quelle est la relation entre les vecteurs accélérations de $m1$ et de $m2$? Justifier.
c) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacune des deux masses $m1$ et $m2$. En utilisant l'axe indiqué sur la figure, déduire que $a = \frac{|(m1-m2)|}{(m1+m2)}\, g$, avec g l'accélération de la pesanteur.

EXERCICE 3

Un individu tire un traineau de masse m considérée ponctuelle sur une surface inclinée d'un angle α. Il exerce une force constante $\vec{F}$ de norme F. Soit β l'angle formé entre la direction de la force et la normale à la pente – voir figure ci-contre. La surface est caractérisée par le coefficient de frottement statique k_1 et la force de frottement statique $\vec{f_1}$.



Nous allons déterminer la valeur de $\vec{F}$ permettant de rester à l'équilibre statique.

1) Justifier que la force $\vec{F}$ doit être orientée vers la droite sur la figure
2) Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur le traineau. Les représenter sur la figure
3) Appliquer le principe fondamental de la dynamique au traineau à l'équilibre statique et déduire l'expression de la force de frottement solide et de la réaction normale en fonction de $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}$ ainsi que des angles $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.
4) Montrer qu'il existe une valeur maximale $\boldsymbol{F_0}$ de la force $\vec{F}$ à partir de laquelle le traineau n'est plus en contact avec le sol. Exprimer $\boldsymbol{F_0}$ en fonction de $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$
On définit l'angle $\boldsymbol{\alpha_0}$ tel que le coefficient de frottement solide $\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{tan\alpha_0}$ et on considère le cas où $\boldsymbol{\alpha_0} \leq \boldsymbol{\beta}$.
5) a) Rappeler la loi du frottement solide statique.
b) Utiliser cette loi pour montrer que la force $\vec{F}$ doit vérifier la condition :

$$mg\frac{\sin(\alpha+\alpha_0)}{\sin(\beta+\alpha_0)} \geq F \geq mg\frac{\sin(\alpha-\alpha_0)}{\sin(\beta-\alpha_0)}$$

TD4 : TRAVAIL, ENERGIE

Exercice 4.1

Un corps de masse m est astreint à se déplacer sans frottement sur une droite, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ et sous l'action d'une force constante $\vec{F}$.

1) Quel est le travail de la force pendant un temps T ?
2) Quel est l'accroissement de l'énergie cinétique ? Quelle est l'énergie cinétique finale ?
3) Calculer la puissance instantanée, ainsi que la puissance moyenne développée ? Représenter graphiquement la puissance en fonction du temps. Discuter.

On donne : $\|\vec{F}\| = 100\ N, T = 10s, m = 1kg, v_0 = \ 2m/s$

4.2 Frottement solide

Un solide de masse m, rapportée à son centre d'inertie, se déplace en frottant sur un rail rectiligne horizontal. La force de frottement $\vec{F}$ qui s'oppose à sa vitesse a pour module $F = kmg$, k est une constante positive. La position du point est repérée par son abscisse x.

A $t = 0$, le solide est en $x = 0$ et il est lancé avec la vitesse v_0.

1) Faire le bilan énergétique du mouvement: justifier brièvement la non-conservation de l'énergie mécanique.

2) Calculer le travail de $\vec{F}$ entre le point de départ et un point de coordonnée x. En déduire la variation de l'énergie cinétique.

3) Déterminer l'équation $v(t)$ de la vitesse. Exprimer $v(t)$ puis $x(t)$.

4) Montrer que le mobile s'arrête; calculer à quelle date et à quelle distante de l'origine.

4.3 Frottement solide et travail

On lâche un traîneau à partir d'un point A situé en haut d'une pente faisant un angle α avec l'horizontale. Soient $\vec{R}\ et\ \vec{F}$ les composantes normale et tangentielle de la réaction du sol.

I) *On suppose que le traîneau est immobile sur la pente.*

1) Quelle est l'expression du coefficient de frottement statique k_s en fonction de $\|\vec{R}\|\ et\ \|\vec{F}_{max}\|$, norme de la force maximale maintenant le traîneau immobile.
2) Exprimer les $\|\vec{R}\|\ et\ \|\vec{F}\|$ en fonction de m, α, g l'accélération de la pesanteur.
3) En déduire une relation entre $k_s\ et\ \alpha$ et pour que le traîneau se mette en mouvement.
4) Vérifier que cette condition est valable pour $k_s = 0{,}1\ (métal\ sur\ glace) et\ \alpha = 60°$.

II) *Le traîneau est maintenant mobile.*

La force de frottement devient $\overrightarrow{\mathrm{F_d}}$. Le mouvement se poursuit sur une piste horizontale qui démarre en un point B jusqu'à l'arrêt total en C. Soit $l = AB\ et\ l' = BC$, et le coefficient de frottement dynamique est k_d.

1) Calculer le travail total effectué sur la partie du trajet en pente AB en fonction de k_d, l, α, m, g

2) Calculer le travail effectué sur le trajet horizontal BC en fonction de k_d, l', α, m, g

3) Exprimer k_d en fonction du rapport $\frac{l'}{l}$ et de α en utilisant le théorème d'énergie cinétique.

4) Calculer l'. on donne $l = 5m, k_d = 0{,}05, \alpha = 60°$.

4.4 Travail du poids

I)

1) Calculer le travail effectué pour élever une masse M à ***vitesse constante*** :
   a) d'une hauteur verticale h
   b) d'une hauteur h en empruntant une pente d'inclinaison α.
2) Quelle est la puissance développée lors de ce déplacement ?
3) Calculer le travail du poids pendant ce déplacement. Quel est son signe ?
4) Quel serait l'effet d'une force de frottement (fluide avec l'air, ou solide avec le plan incliné) ?

II)

1) Quel travail doit-on fournir pour élever la masse M, initialement au repos, d'une hauteur h selon un ***mouvement uniformément accéléré*** d'accélération $\vec{a}$?
2) Quelle puissance doit-on développer pour faire effectuer ce déplacement à la masse ? Est-elle constante au cours du temps ?
3) Quelles sont alors les variations d'énergie potentielle et cinétique correspondantes ?
4) À la fin de l'accélération, on lâche la masse M. Jusqu'à quelle hauteur va-t-elle monter ? Quelles sont alors son énergie potentielle et son énergie cinétique ?

4.5 Calcul d'énergie potentielle

On considère une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort posé sur une table horizontale. On néglige les frottements.

1) Calculer l'énergie potentielle $E_p(x)$ dont dérive la force de rappel du ressort, dont on exprime l'allongement avec l'abscisse x(t) sur un axe horizontal Ox. Faire une représentation graphique de $E_p(x)$.
2) On accroche la masse m au ressort vertical. Calculer l'énergie potentielle totale de m. Commenter.

Exercice 4.6

1) Calculer l'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse m distante de r d'une planète de masse M.
2) Définir la vitesse de libération de m.
3) Déterminer la vitesse de libération de m. Quelle est sa valeur dans le cas de la terre ?
On donne $M = 5{,}97\ 10^{24} kg, G = 6{,}67\ 10^{-11} kg^{-1} m^3 s^{-2}$
4) Peut-on déduire pourquoi la lune n'a pas d'atmosphère ? on donne $M_{lune} = 7{,}36\ 10^{22} Kg$

Exercice 4.7

Un positron de charge e, de masse m est lancé en direction d'un ion lourd, de charge e considéré immobile en O. Le mouvement est rectiligne suivant ox. La vitesse initiale quand le proton est à l'infini est $-v_0\vec{\imath}$ avec $v_0 > 0$. La force qui s'exerce sur le proton est $\vec{F} = \frac{ke^2}{x^2}\vec{\imath}$, avec k une constante positive.

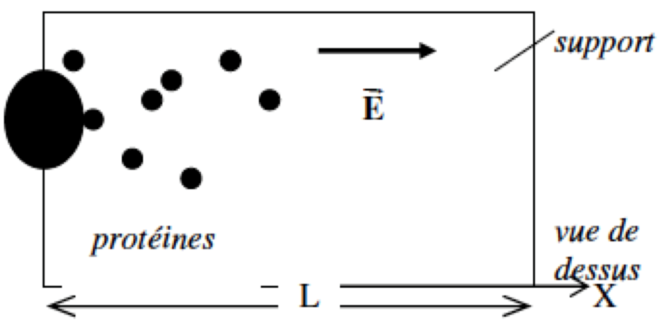
1) Décrire qualitativement le mouvement.
2) Écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$. Sait-on la résoudre ?
3) Calculer le travail de $\vec{F}$ sur le segment AB, A d'abscisse $a > 0$, B d'abscisse $b > a$. Que devient ce travail quand b tend vers l'infini.
4) Calculer l'énergie potentielle $U(x)$ avec $U(x) = 0$ quand $x \to \infty$. Vérifier le théorème de

conservation d'énergie. Tracer la courbe $U(x)$.
5) Exprimer l'énergie mécanique E_m en fonction de x, de $\dot{x}$ et des constantes. Expliquer pourquoi elle se conserve. Donner sa valeur en fonction de m et v_0
6) Montrer que x ne peut pas prendre des valeurs trop petites. Déterminer l'expression de x_{min}, la valeur minimum de x.
7) On donne $k = 9\ 10^9\ Nm^2C^{-2}, v_0 = 2\ 10^6\ ms^{-1}, e = 1.6\ 10^{-19}C, m = 9{,}1\ 10^{-31}kg$. Calculer x_{min}
8) Le proton passe deux fois au même point. Comparer les deux vitesses. Exprimer la vitesse en fonction de v_0, x, x_{min}. Calculer la vitesse quand le proton est à l'abscisse $2x_{min}$.

4.8 Électrophorèse- frottement fluide

L'électrophorèse est une méthode de séparation des grosses molécules organiques (acides nucléiques ou protéines) basée sur leur charge électrique et leur taille. Une goutte contenant un mélange de protéines est placée sur un support (en général un gel), est soumise à un champ électrique $\vec{E}$ qui exerce sur la protéine de charge q la force $\vec{F} = q\vec{E}$ et fait donc migrer les protéines. Le support exerce une force de viscosité de forme $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{V}$, r est le rayon de la protéine supposée sphérique. On négligera la gravité dans ce problème.

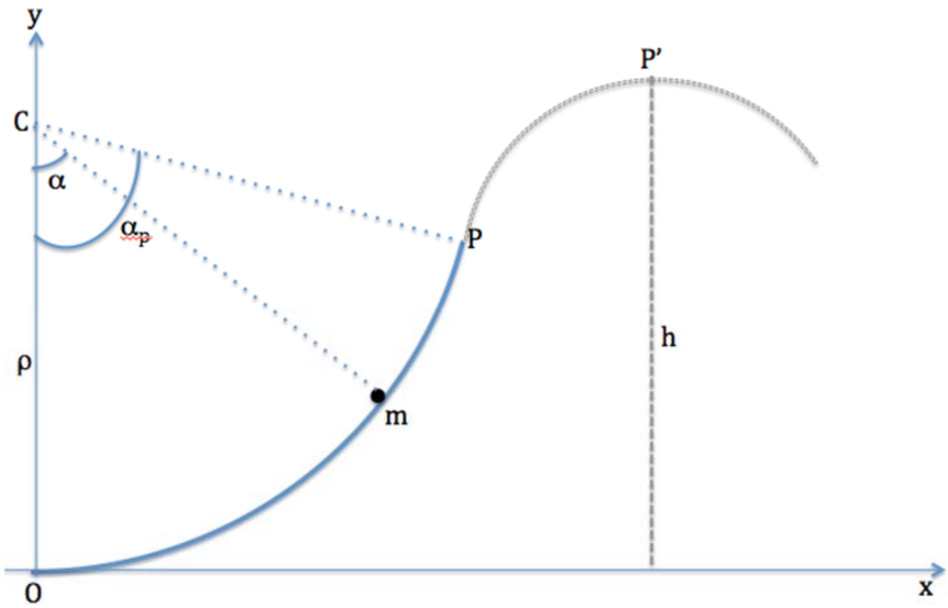
1) Faire le bilan des forces exercées sur la protéine de masse m.
2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton), écrire l'équation différentielle sur la vitesse V.
3) En déduire l'équation de la vitesse $V(t)$.



4) Montrer qu'il existe une vitesse limite V_{lim} et un temps caractéristique t. Calculer ces grandeurs en fonction des données.
5) Représenter graphiquement la courbe $V(t)$.
6) Exprimer le temps T que mettrait la protéine à parcourir la longueur L du support si elle était toujours à la vitesse V_{lim}.
Application numérique: on donne :
$m = 10^{-23}\ kg, q = 10^{-19}C, L = 10\ cm, E = 50\ Vm^{-1}, r = 10^{-2}\mu m\ et\ h = 2{,}5\ 10^{-3}\ UI$.
En déduire les ordres de grandeur de $V_{lim}, t\ et\ t/T$.
À charges égales, quelles sont les protéines qui migrent le plus loin: les plus grosses, les plus petites ?
7) Exprimer le travail W_{el} de la force électrique sur une protéine pendant l'expérience, en fonction de q, E, V_{lim} et la durée de l'expérience t_{exp}.
8) Exprimer le travail de la force de frottement W_{vis} sur la protéine pendant l'expérience, en fonction de $\eta, r, V_{lim}\ et\ t_{exp}$, puis en fonction de la variation d'énergie cinétique et du travail "électrique" W_{el}.

CONTRÔLE2 2019-20

Une masse m supposée ponctuelle, glisse sans frottement à la surface d'une cuve de forme circulaire de rayon ρ et de centre C.
La vitesse initiale de m, $\overrightarrow{v_0}$, est horizontale lorsqu'elle se trouve au point O, à la verticale de C. Au-delà du point P indiqué sur la figure, repéré par l'angle α_p la masse m n'est plus en contact avec le support circulaire.



Partie I : Mouvement au contact d'une cuve circulaire

1) Exprimer les coordonnées x, y de m en fonction de ρ et de α

2) a) Quelles sont les forces agissant sur la masse m ? Sont elles conservatives ?

b) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de α

3) a) Rappeler l'énoncé du théorème de l'énergie mécanique.

b) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et déduire que la vitesse de m en position α s'écrit : $v = \sqrt{{v_0}^2 - 2\rho \times g(1 - cos\alpha)}$

c) Quelle est la vitesse initiale minimale nécessaire pour dépasser le point P ?– l'exprimer en fonction de α_p et des constantes du problème.

Partie II : Mouvement hors de la cuve

Soit $\overrightarrow{v_p}$ la vitesse de m au moment où elle est au point P, et soit v_p sa norme.

4) Quelles sont les composantes horizontale et verticale de $\overrightarrow{v_p}$ en fonction de α_p

5) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique en deux points judicieusement choisis, déterminer la hauteur maximale $\boldsymbol{h}$ que peut atteindre m en fonction de v_0, α_p, ρ, g ?

Partie III : Mouvement après la cuve en présence de frottements

On étudie à nouveau le mouvement à partir du point P indiqué sur la figure et considéré comme origine des coordonnées. Soit $\overrightarrow{v_p}$ la vitesse de m au moment où elle est au point P, et soit v_p sa norme. Dans cette partie nous prendrons en compte les forces de frottements visqueux, modélisés par l'expression $\vec{\boldsymbol{F}} = -k\,\vec{\boldsymbol{V}}$ (k est une constante positive).

6) Faire le bilan des forces sur m à partir de P et écrire la relation fondamentale de la dynamique.

7) On considère le repère cartésien (Pxy) d'origine P: quelles sont alors les équations différentielles régissant les composantes de la vitesse $V_x\ et\ V_y$?

Mettre ces équations sous la forme : $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = A$ et définir $\tau\ et\ A$ dans chacune des deux équations.

Dans la suite, nous ne prendrons en compte que le mouvement vertical.

8) a) Résoudre l'équation précédente et déduire l'expression de $V_y(t)$

b) Représenter graphiquement l'allure de la courbe de $V_y(t)$ - indiquer les grandeurs pertinentes.

9) Déterminer l'équations horaire du mouvement $y(t)$

10) Écrire l'expression du travail de la force de frottement entre deux instants $t1\ et\ t2$

11) Pour des temps suffisamment longs l'expression précédente peut être simplifiée. Écrire l'expression dans sa forme simplifiée en justifiants les approximations.

12) Calculer le travail dans ces conditions.