Corrigé des exercices : Demande de travail

Björn Nilsson

1. A)

Le profit de la firme : $\pi = PY - wE$

Elle maximise son profit lorsque la productivité marginale du travail en valeur est égale au salaire. Autrement dit, quand $w = f'_E \times P$.

De façon équivalente, elle maximise son profit quand le coût marginal est égal au prix du bien. Ce coût marginal est donné par : $\frac{w}{f'_E}$, d'où : $\frac{w}{f'_E} = P$. On voit facilement que les deux expressions sont équivalentes.

1. B)

La productivité marginal du travail en valeur est égale à :

$f'_E P = 0,5E^{-0,5} \times P = \frac{5 \times 0,5}{\sqrt{E}}$.

On a donc, en égalisant productivité marginale et salaire :

$w = \frac{2,5}{\sqrt{E}} \Leftrightarrow \mathrm{E}^* = 2,5^2 = 6,25$

Avec ce niveau d'emploi, la firme réalise une production de

$Y = f(E) = 6,25^{0.5} = 2,5$

Son profit est égal à $\pi = 5 \times 2,5 - 1 \times 6,25 = 6,25$

2. A)

La firme maximise son profit quand $\frac{w}{r} = \frac{f'_E}{f'_K}$, cest-à-dire quand le rapport des productivités marginales est égal au rapport des prix des facteurs de production.

On a, pour $\frac{f'_E}{f'_K}$, le suivant :

$\frac{2\times0,4L^{-0,6}K^{0,6}}{2\times0,6K^{-0,4}L^{0,4}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\frac{K}{L}$

D'où, à l'optimum :

$\frac{6}{3} = \frac{2}{3}\frac{K}{L} \Leftrightarrow K^* = 3L^*$

'

La firme va employer trois fois plus de capital que de travail.

2. B)

Il suffit de remplacer K par 3L dans la fonction de production, et d'égaliser celle-ci à 100 :

$100 = 2 \times (3L)^{0,6}L^{0,4} \Leftrightarrow 100 = 2 \times 1,933L$

D'où $L^* \approx 25,87$.

On peut maintenant remplacer L dans la fonction de production :

$100 = 2 \times K^{0,6}25,87^{0,4} \Rightarrow 100 = 2 \times 3,67K^{0,6}$.

D'où $K^* = (\frac{100}{2\times3,67})^{10/6} \approx 77,6$

Quel prix la firme doit-elle demander pour ne pas faire de perte ? Le prix minimal est tel que le profit de la firme est nul. Ainsi, on peut écrire :

$0 = P \times 100 - 6 \times 25,87 - 3 \times 77,6$

$100P \approx 388 \Rightarrow P_{min} \approx \frac{388}{100} \approx 3,9$

2. C)

On a désormais :

$\frac{8}{3} = \frac{2}{3}\frac{K}{L} \Leftrightarrow K^* = 4L^*$

La firme emploie désormais 4 fois plus de capital que de travail.

Pour produire 100 unités, il lui faut :

$100 = 2 \times (4L)^{0,6}L^{0,4} \Leftrightarrow 100 = 2 \times 4^{0,6}L$

D'où : $L^* = \frac{100}{2\times4^{0,6}} \approx 21,76$.

Pour trouver K^* on remplace L dans la fonction de production :

$100 = 2 \times K^{0,6} 21,76^{0,4} \Rightarrow \frac{100}{6,856} \approx K^{0,6}$

D'où $K^* = (\frac{100}{6,856})^{\frac{10}{6}} = 87,07$

Le prix minimal doit maintenant vérifier :

$0 = 100P - 3 \times 87,07 - 8 \times 21,76 \Leftrightarrow 100P = 435,3$

D'où $P_{min} = \frac{435,3}{100} \approx 4,35.$

3. A)

Avec 50 travailleurs non-qualifiés et 20 travailleurs qualifiés, vérifions d'abord la production de la firme :

Y = $E_Q \times \sqrt{E_{NQ}} = 20 \times \sqrt{50} = 141,4.$

Les coûts encourus pour réaliser cette production sont égaux à $C = 20 \times 20 + 4 \times 50 = 600$. Maintenant, un investisseur arrive et double le capital de la firme qui peut désormais engager 1200 dans la production. Quelle sera cette production ?

On sait qu'à l'optimum, on a $\frac{w_Q}{w_{NQ}} = \frac{f'_Q}{f'_{NQ}}$. Calculons les productivités marginales :

$f'_Q = E_{NQ}^{0,5}$, et $f'_{NQ} = 0,5 E_Q E_{NQ}^{-0,5}$

D'où, à l'optimum :

$\frac{20}{4} = \frac{E_{NQ}}{0,5 E_Q} \Leftrightarrow E_{NQ} = 2,5 E_Q$

La firme emploie donc 2,5 fois plus de travailleurs non-qualifiés que de travailleurs qualifiés. **Mais ceci était déjà le cas avant!**. En effet, il n'y avait ici pas besoin de calculer le rapport car il était visible dans l'énoncé de la question (20 travailleurs qualifiés et 50 travailleurs non-qualifiés, cela fait un rapport de 2,5). Avec les nouveaux fonds, la firme se place sur une nouvelle courbe isocoût, mais qui a la même pente qu'avant, car les prix des deux facteurs de production n'ont pas changé. On sait dès lors que si les fonds investis doublent, les quantités de travail qualifié et non-qualifié le font aussi :

$1200 = 20E_Q + 4 \times 2,5E_Q \Leftrightarrow E_Q^* = \frac{1200}{30} = 40.$

$1200 = 20 \times 40 + 4 \times E_{NQ} \Leftrightarrow E^*_{NQ} = \frac{400}{4} = 100.$

La nouvelle production est ainsi de : $Y^* = 40 \times \sqrt{100} = 400.$

On en conclut que les rendements d'échelle de la fonction de production sont croissants car la production a plus que doublé quand les facteurs de production ont doublé. On n'avait cependant pas besoin de faire de calcul pour le voir. La fonction de production étant une fonction de type Cobb-Douglas, de la forme $X_1^\alpha X_2^\beta$, la somme de α et β nous renseigne sur la nature des rendements d'échelle.

Ici, on a $E_Q^1 E_{NQ}^{0,5}$, *i.e.* $\alpha + \beta$ vaut 1,5. Les rendements sont alors croissants.

3. B)

Le travail qualifié devient plus cher. Le nouveau critère d'optimalité se lit :

$\frac{30}{4} = \frac{E_{NQ}}{0{,}5E_Q} \Leftrightarrow E_{NQ} = 3,75E_Q$

La fonction de coût donne les valeurs d'équilibre du travail qualifié et non-qualifié :

$1200 = 30E_Q + 4 \times 3,75E_Q \Leftrightarrow E^*_Q \frac{1200}{45} = 26\frac{2}{3}$

$1200 = 30 \times 26\frac{2}{3} + 4 \times E_{NQ} \Leftrightarrow E^*_Q \frac{400}{4} = 100$

Remplaçant dans la fonction de production on obtient :

$Y = 26\frac{2}{3} \times \sqrt{100} = 266,6$

L'élasticité-croisée du travail non-qualifié par rapport au travail qualifié est donnée par :

$\epsilon_{\frac{E_{NQ}}{w_Q}} = \frac{\frac{\delta E_{NQ}}{E_{NQ}}}{\frac{\delta w_Q}{w_Q}} = \frac{\frac{0}{100}}{\frac{10}{20}} = 0.$

Ceci implique que les deux facteurs sont indépendants (ni des substituts, ni des compléments). La demande de travail non-qualifié se fait indépendamment de celle de travail qualifié et vice-versa.