Feuille 4

Exercice 1 : Soit A un anneau commutatif. On que dit que $x \in A$ est nilpotent s'il existe un $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que x, y sont nilpotents .

1. Montrer que xy est nilpotent
2. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. Montrer que $1 - x$ est inversible .

Exercice 2 : On pose $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un anneau .
2. On note $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que $N(xy) = N(x)N(y)$
3. En déduire que les élements inversibles de A sont les élements $a + b\sqrt{2}$ tel que $a^2 - 2b^2 = 1$ ou -1.

Exercice 3 : On appelle nilradical d'un anneau commutatif A l'ensemble des éléments nilpotents . Montrer que le nilradical est un idéal de A.

Exercice 4 : On considère $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un morphisme d'anneau qui vérifie $f(x) = x$ pour tout réel x. Montrer que $f(z) = z$ ou $f(z) = \bar{z}$ pour tout nombre complexe z.

Exercice 5 : Soit K un corps fini, $K = \{0, x_1, x_2 \cdots, x_n\}$. Calculer $\prod_{i=1}^{n} x_i$

Exercice 6 : Soit $D = \{\frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que D est un sous anneau $\mathbb{Q}$.
2. Soit I un idéal de D . Montrer que $I = aD, a \in D$. [Regarder $I \cap \mathbb{Z}$]

Exercice 7 : Soit A un anneau intégre et fini. Soit $a \neq 0$ un élément de A.

1. Montrer que l'application de A dans A définie par : $x \mapsto ax$ est bijective.
2. En déduire que A est un corps.

3. Soit A un anneau intégre qui ne possède qu'un nombre fini d'idéaux , montrer que A est un corps . [On regarde la suite d'idéaux $x^n A$]

Exercice 8 :

1. Est-ce que 18 est inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?

2. Idem pour 42 dans $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$.

Exercice 9 : Résoudre dans , $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$, les équations ou systèmes d'équations suivants :

1. $7y = 2$

2. $\begin{cases} 3x + 7y = & 3 \\ 6x - 7y & = & 0 \end{cases}$

Exercice 10 : Résoudre

1. $x^2 + x + 7 = 0$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

2. $x^2 - 4x + 3 = 0$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 11 : Le but de cet exercice est de montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4. Pour cela , on va étudier l'ordre de certains éléments dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Soit $a \in \mathbb{N}$ et p un diviseur premier de $a^2 + 1$ distinct de 2.

1. Montrer que a et p sont premiers entre eux .

2. On note x la classe de a dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que l'ordre de x est 4 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

3. En déduire que p est congru à 1 modulo 4.

4. En prenant a sous la forme $N!$, montrer qu'il existe une infinité de nombre premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 12 :

1. Dresser la liste des cubes dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

2. Soient x, y, z des entiers tels que $5x^3+11y^3+13z^3 = 0$. Montrer que $13 \mid x, y, z$.

3. L'équation $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ admet-elle des solutions non nulles dans $\mathbb{Z}^3$?

Exercice 13 : On appelle nombre de Mersenne tout entier premier qui s'écrit sous la forme $2^n - 1$.

1. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier .

2. Donner des exemples de nombres de Mersenne .

3. On pose $m = 2^n - 1, n$ premier ; soit p un diviseur premier de m . Montrer que $p = 2kn + 1$ [Etudier l'ordre de 2 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$].

Exercice 14 :

1. Montrer que la classe de 3 est un générateur du groupe $\mathbb{F}_{17}^*$.

2. On considère l'équation $5x^3 - 2 = 0$ dans $\mathbb{F}_{17}^*$. Montrer que cette équation est équivalente à $x^3 = 14 = -3$.

3. Soit x une solution de cette équation, on pose $x = 3^k$, montrer que $x = 10$.

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5x^3 - 2 = 0[17]$.

Exercice 15 :

1. Donner la décomposition de $2^{11} - 1$. [Utiliser exo 9, question 3].

2. Soit G le groupe des carrés de $\mathbb{F}_{23}^*$. Montrer que G est cyclique et en trouver un générateur .