L2 S3 **Université Paris Sud**
Meu 204 **2023-2024**

Feuille 3

Exercice 1 : Soit $G = \{e, a, b\}$ un groupe formé de trois éléments , e est l'élément neutre . Dresser la table de pythagore .

$*$	e	a	b
e			
a			
b			

Exercice 2 : Soit $G = \{1, a, b, c, d, e\}$ un groupe , 1 désigne l'élément neutre . Compléter le tablea suivant :

$*$	1	a	b	c	d	e
1						
a			d			c
b		e		d	c	
c		d				
d			a		e	1
e		b		a		

Exercice 3 : On muni $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ d'une loi définie par : $(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$.

1. Montrer que $G, \star$ est un groupe non abélien .
2. Montrer que $(]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \star)$ est un sous groupe de $(G, \star)$.

Exercice 4 : Soit G un groupe. On définit le centre de G par $Z = \{z \in G, gz = zg, \forall g \in G\}$.

1. Montrer que Z est un sous groupe de G.
2. Que vaut Z si G est abélien ?

Exercice 5 : Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$. On suppose que $G \neq 0$.

1. On pose $N = G\cap]0, +\infty[$. Montrer que N est non vide et minoré . Soit b la borne inférieure de N.

2. Montrer que $b \in G$.
3. On suppose que $b > 0$. Montrer que $G = b\mathbb{Z}$.
4. On suppose que $b = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.[Facultatif]
5. Soit $H = \{m + n\sqrt{2}, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que H est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$. Que vaut la borne inferieure b dans ce cas ? Conclusion ?

Exercice 6 : Soit G un groupe fini , a, b deux éléments de G.

1. Montrer que a et a^{-1} ont le même ordre .
2. Idem pour a et bab^{-1}
3. Idem pour ab et ba.

Exercice 7 : Soit G un groupe. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est abélien
2. L'application de $x \to x^{-1}$ est un morphisme.
3. L'application $x \to x^2$ est un morphisme.

Exercice 8 : Donner un exemple d'élément de $GL_2(\mathbb{R})$ d'ordre 4.

Exercice 9 : Dresser la table de composition du groupe S_3.

Exercice 10 : Soit E l'ensemble des parties de $\{0, 1\}$, ie $E = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. On définit sur E deux lois de compositions $\cup, \cap$. Dresser la table de composition pour chacune de ces deux lois et dire à chaque si elle vérifient toutes ou une partie des propriétes qui définissent un groupe .

Exercice 11 : Soient H, K deux sous groupes d'un groupe G. Montrer que $H \cup K$ est un sous groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 12 : Soient G, G' deux groupes , H un sous groupe de G et K un sous groupe de G'.

1. Montrer que $H \times K$ est un sous groupe de $G \times G'$.
2. Montrer que $\{(a, a), a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exercice 13 : Soit G un groupe fini de cardinal $\mid G \mid = 2n$. On définit sur G une relation $xRy \iff x = y$ ou $x = y^{-1}$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence .

2. Montrer qu'il existe un élément $x \in G$ d'ordre 2. [utiliser le fait que les classes d'équivalences forment une partition de G.

Exercice 14 : Soit G un groupe, $x \in G$ d'ordre $n, x \neq e$, quel est l'ordre de x^2? [discuter selon la parité de n].

Exercice 15 : Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élement neutre) sont d'ordre 2. Montrer que G est abélien . Donner un exemple d'un tel groupe .

Exercice 16 : Soit G un groupe abélien , x resp y deux éléments de G d'ordre p resp q avec p, q deux nombres premiers .

1. Montre que xy est d'ordre pq.
2. Soit $H = GL_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que A est d'ordre 4 et que B est d'ordre 3. Calculer AB. Montrer par récurrence que $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Conclusion ?
3. Soit $x \in G$ d'ordre p premier . Quel est l'ordre de x^{-1}? et l'ordre de xx^{-1} ? Conclusion ?

Exercice 17 : Soit G un groupe , H resp K deux sous groupes de G d'ordre p resp q avec p, q deux nombres premiers .

1. Montrer que l'on a : $H = K$ ou $H \cap K = \{e\}$.
2. On suppose que G est d'ordre 35 . Montrer qu'il existe des éléments d'ordre 5 et des éléments d'ordre 7.