L2 S3 **Université Paris Sud**
Meu 204 **2023-2024**

Feuille 2

Exercice 1 : Soit p, q deux entiers premiers entre eux et soit E l'équation $3x^3 + 4x^2 + 2x - 4 = 0$.

1. Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une solution de E , alors $p \mid 4$ et $q \mid 3$.

2. En déduire que E possède une unique solution rationnelle .

Exercice 2 : Montrer que si n est un entier , le nombre $n^5 - n$ est un multiple de 30.

Exercice 3 : Soit a, b deux nombres rationnels tel que $a + b$ et ab sont des entiers . On écrit $a = \frac{p_1}{q_1}, b = \frac{p_2}{q_2}$ avec $pgcd(p_1, q_1) = pgcd(p_2, q_2) = 1, q_1 > 0, q_2 > 0$.

1. Montrer que $q_1 \mid q_2$

2. En déduire que $q_1 = q_2$

3. Prouver que a, b sont des entiers .

Exercice 4 : Soient a, b deux entiers premiers entre eux . Déterminer le pgcd $(a + b, a - b)$. [Discuter selon la parité de a, b].

Exercice 5 : Trouver tous les entiers x, y qui vérifient l'équation $15x - 22y = 1$.

Exercice 6 : Trouver tous les entiers qui vérifient l'équation $15x + 24y = 5$.

Exercice 7 : Soit n un entier qui n'est divisible ni par 2 ni par 5 . Montrer qu'il existe un entier m tel que le produit nm s'écrit 1111111...1.[ind : poser $n_i = 11111 \cdots 1, i$ chiffres et regarder le reste de la division euclidienne de n_i par n].

Exercice 8 : Soit j le jour de naissance d'un étudiant , m le mois de naissance [$1 \leq j \leq 31,\ 1 \leq m \leq 12$]. On multiplie j par 31 et m par 12 et on fait la somme et on trouve 308. Quelle est la date de naissance de l'étudiant ?

Exercice 9 :

1. Trouver le $pgcd(1995, 2975)$.

2. On divise 2003 par n , le reste est égal à 8 , on divise 3002 par n , le reste est égal à 27. quel est ce nombre n ?

Exercice 10 : Soit c un nombre premier tel que $11c+1$ soit le carré d'un nombre entier . Déterminer c .

Exercice 11 : Trouver les entiers naturels a, b tel que : $pgcd(a,b) = 24, ppcm(a,b) = 1344$.

Exercice 12 : Résoudre dans $\mathbb{N}$

1. $$\begin{cases} xy & = & 1512 \\ ppmc(x,y) & = & 252 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x+y & = & 276 \\ ppmc(x,y) & = & 1440 \end{cases}$