L2 S3 **Université Paris Sud**
Meu 204 **2023-2024**

Feuille 1

Exercice 1 : Soit n un entier naturel non nul , on suppose que $n+1$ est un multiple de 4 ; montrer que n^2+3 est aussi un multiple de 4.

Exercice 2 : Soit n un entier dont l'écriture décimale est $4a3b$, déterminer toutes les valeurs de a, b pour que n soit un multiple de 12 .[On utilisera le résultat suivant : n est un mutiple de 3 et de 4], en déduire tous les nombres n multiples de 12.

Exercice 3 : Etant donnés cinq nombres consécutifs, on trouve toujours parmi eux (vrai ou faux et pourquoi):

1. au moins deux multiples de 2.
2. Au plus trois nombres pairs.
3. au moins deux multiples de 3.
4. exactement un multiple de 5.
5. au moins un multiple de 6.
6. au moins 1 nombre premier

Exercice 4 : Parmi les affirmations suivantes , lesquelles sont vraies , lesquelles sont fausses

1. Si un entier est divisibles par deux entiers , il est divisibles par leur produit .
2. Si un entier est divisible par deux entiers premiers entre eux , il est divisible par leur produit .
3. Si un entier est divisible par deux entiers , il est divisible par leur PPCM.
4. Si un entier divise le produit de deux autres entiers , il divise au moins l'un des deux .
5. Si un nombre premier divise le produit de deux entiers , il divise au moins l'un des deux.
6. Si un entier est divisible par deux entiers , il est divisible par leur somme .

Exercice 5 : Soient a, b deux entiers premiers entre eux , montrer que $ab, a+b$ sont premiers entre eux .

Exercice 6 : Déterminier tous les entiers n qui vérifient $n-4 \mid 3n-17$ [Rep -1, 3, 5 , 9]

Exercice 7 : Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

Exercice 8 : Un nombre palindrome est un nombre qu'on peut lire de droite comme de gauche dans son écriture décimale , 2002 et 12321 sont des exemples . [En francais des phrases : " Et la marine va à Malte " ou encore " elu par cette crapule " Montrer qu'un nombre palindrome qui possède un nombre pair de chiffres est divisible par 11.

Exercice 9 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$.

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $x^2 - y^2 - x + 3y = 30$.
3. $x^2 - 5y^2 = 3$.

Exercice 10 : Montrer que pour tout entier n on a :

1. $11 \mid 2^{6n+3} + 3^{2n+1}$.
2. $6 \mid 5n^3 + n$.
3. $8 \mid 5^n + 2.3^{n-1} + 1, n \geq 1$.

Exercice 11 : Soit p un nombre premier , $p > 3$. Montrer que $p^2 - 1$ est un multiple de 24.

Exercice 12 : Montrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout entier naturel n.

Exercice 13 : montrer que $49 \mid 2^{3n+3} - 7n - 8$ pour tout entier $n \geq 1$.