# ***Les transformées de Laplace***

## Définitions

1) Soit *f* une fonction définie pour $t \geq 0$, on appellera transformée de Laplace de *f* :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

où $p \in \mathbb{C}$.

2) *F*(*p*) est l'image de *f*(*t*) par la transformation de Laplace.

3) *f*(*t*) est appelée **originale** de *F*(*p*).

## Propriétés

1) si *f*(*t*)=0, alors *F*(*p*)=0

2) Si *f* et *g* sont deux fonctions telles que $\mathcal{L}\{f\}$ et $\mathcal{L}\{g\}$ existent alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \beta \in \mathbb{C}, \mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\} = \alpha F(p) + \beta G(p)$$

## Originales et transformées de Laplace de référence

| Originale : f(t) | Transformée de Laplace : F(p) |
|---|---|
| $f(t) = a$ où a est une constante réelle | $F(p) = \frac{a}{p}$ |
| $f(t) = t^n$ où $n \in \mathbb{N}$ | $F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| $f(t) = e^{at}$ où a est une constante réelle | $F(p) = \frac{1}{p - a}$ |
| $f(t) = \sin(\omega t)$ où ω est une constante réelle | $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ |
| $f(t) = \cos(\omega t)$ où ω est une constante réelle | $F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ |

## Propriétés

1) Règle de similitude (changement d'échelle)
   Soit $g(t) = f(at)$ avec a>0
   alors :

$$G(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

2) Règle de translation en *p*
   $g(t) = e^{-at} f(t)$ où a est une constante réelle

$$G(p) = F(p + a)$$

3) Règle de translation en *t*
   Soit
   $g(t) = f(t - t_0)$, où $t_0$ est une constante

$$G(p) = e^{-pt_0} F(p)$$

**Transformée de Laplace des fonctions dérivées**

Si, $f, f', f^{(2)}, \ldots f^{(n-1)}$ sont continues sur $[0; +\infty[$

Si leur transformée de Laplace est définie,

Si $f^{(n)}$ existe, alors on a :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \mathcal{L}(f(t)) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots . - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

**Transformée de Laplace de primitive**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0; +\infty[$ , soit $g$ définie par :

$$g(t) = \int_0^t f(u)\, du$$

Alors :

$$G(p) = \frac{1}{p} F(p)$$