Un corrigé de l'examen partiel de MDD201 2023-2024

Exercice 1. 1) C'est vrai. Si la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, alors nécessairement son terme général u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc $1/u_n$ ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum_{n\geq 1} 1/u_n$ diverge grossièrement.

2) C'est faux. Il suffit de considérer $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a bien $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et pourtant $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

3) On remarque d'abord que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$ quand $n \to +\infty$. On en déduit donc $|u_n| \sim \dfrac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. Comme la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, par équivalence la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} |u_n|$ diverge ausssi donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ ne converge pas absolument.

Pour étudier la convergence de la série, on va utiliser la méthode dite de l'éclatement. On écrit donc $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + v_n$ avec la fluctuation $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} - \dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{-\sqrt{n}}{n(n+(-1)^n\sqrt{n})} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n\sqrt{n}}$. Ce terme est toujours négatif donc le critère d'équivalence s'applique. Et comme la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ converge aussi.

Il est connu que, grâce au critère des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée qui converge. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge car u_n est la somme de 2 termes généraux de séries convergentes.

Exercice 2. 1) a) On veut utiliser le critère de Cauchy. On calcule $u_n^{1/n} = \dfrac{1+n^{1/n}}{3} = \dfrac{1+e^{\frac{\ln n}{n}}}{3}$, expression qui tend vers $\dfrac{1+e^0}{3} = \dfrac{2}{3}$ quand $n \to +\infty$. Comme $2/3$ est < 1, le critère de Cauchy dit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

b) On peut vérifier que les critères de Cauchy et de d'Alembert ne nous apprennent rien quand à la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-\ln^2 n}$. On s'oriente vers le critère de comparaison. On remarque que $n^2\, u_n = e^{2\ln n - \ln^2 n} = e^{-\ln^2 n(1-\frac{2}{\ln n})}$, expression qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc la suite $(n^2\, u_n)$ est bornée et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $(0 <)n^2\, u_n \leq C$ donc $(0 <)u_n \leq C/n^2$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge, par comparaison la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge également.

c) On va utiliser le critère des séries alternées. Pour $n \geq 1$, on a $0 < 1/n \leq 1 < \pi/2$. Donc $\sin(1/n) > 0$ pour tout $n \geq 1$ et décroit en n (car le sinus est croissant sur $[0, \pi/2]$ et $1/n$ décroit en n). Il en résulte que $|u_n| = \dfrac{1+\sin(1/n)}{n+2}$, donc $u_n = (-1)^n |u_n|$ et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est alternée. De plus, d'après la remarque précédente, il est clair que $|u_n| = \dfrac{1+\sin(1/n)}{n+2}$ décroit en n et on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $|u_n| \leq \dfrac{2}{n+2}$. Il résulte du critère des séries alternées que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

2) Pour tout $N \geq 2$, on calcule la N ième somme partielle de la série (qui est télescopique)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n}{n-1}\,\frac{n}{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{2}{2-1}\right) - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \\
&= \ln(2) - \ln\left(1+\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

L'expression tend vers $\ln(2)$ quand N tend vers $+\infty$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge donc et sa somme vaut $\ln(2)$.

Exercice 3. 1) Il s'agit de fonctions triangles qui glissent vers la droite.

2) La fonction f_n est affine donc continue sur $[0, n^2[$, sur $]n^2, 2n^2[$, sur $]2n^2, 3n^2[$ et sur $]3n^2, +\infty[$. On vérifie ensuite sans peine que $\lim_{x\to(n^2)^-} f_n(x) = 0 = f_n(n^2) = \lim_{x\to(n^2)^+} f_n(x)$, $\lim_{x\to(2n^2)^-} f_n(x) = \frac{1}{n} = f_n(2n^2) = \lim_{x\to(2n^2)^+} f_n(x)$ et $\lim_{x\to(3n^2)^-} f_n(x) = 0 = f_n(3n^2) = \lim_{x\to(3n^2)^+} f_n(x)$. La fonction f_n est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) On fixe x dans $\mathbb{R}^+$. On note n_x un entier plus grand que $\sqrt{x}$. Alors pour tous les entiers $n \geq n_x$, on a $n^2 \geq x$ et donc $f_n(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

On a montré que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f identiquement nulle.

4) On a $||f_n||_{\mathbb{R}^+} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n(2n^2) = \dfrac{1}{n}$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\mathbb{R}^+} = 0$ (car f est la fonction nulle !) et donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

5) On calcule :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \text{aire du triangle de base } [n^2, 3n^2] \text{ et de hauteur } 1/n = \frac{3n^2-n^2}{2}\,\frac{1}{n} = n.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = +\infty \neq 0 = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. (Remarque : ceci n'entre pas en contradiction avec le théorème d'interversion vu en cours car celui-ci est valable sur un intervalle fermé borné, toujours sous condition de convergence uniforme sur l'intervalle considéré.)

Exercice 4. Soit f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$, où $n \geq 1$.
1) La fonction f_n décroit (en x) sur $[0,+\infty[$. Il en résulte $||f_n||_{\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
2) Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte que la fonction f somme de la série de fonctions est définie sur $\mathbb{R}^+$ (cela résulte juste de la convergence simple de $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions, convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ qui résulte de la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$) et continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3) Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f_n'(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$ pour tout $x \geq 0$. On fixe $a > 0$. Comme $|f_n'(x)| = \frac{e^{-nx}}{n}$ décroit en x, on a $||f_n'||_{[a,+\infty[} = \sup_{x\geq a} |f_n'(x)| = |f_n'(a)| = \dfrac{e^{-an}}{n} \leq \left(e^{-a}\right)^n$. Comme $0 < e^{-a} < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geq 1} \left(e^{-a}\right)^n$ converge, et par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 1} ||f_n'||_{[a,+\infty[}$ converge. Ainsi, la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
4) Pour $a > 0$ fixé quelconque, on sait que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[a,+\infty[$, que les f_n sont C^1 sur $]a,+\infty[$ et que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $]a,+\infty[$. Il en résulte que la fonction f somme de la série est de classe C^1 sur $]a,+\infty[$ et que pour tout $x \in]a,+\infty[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

Cela est valable pour tout $a > 0$. Donc f est C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.
5) On a $||f_n'||_{[0,+\infty[} = \sup_{x\geq 0} |f_n'(x)| = |f_n'(0)| = \dfrac{1}{n}$. Donc la série harmonique $\sum_{n\geq 1} ||f_n'||_{[0,+\infty[}$ diverge, ce qui veut dire que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.
6) On fixe $n \geq 1$ pour le moment. Pour tout $x \in]0, 1/n[$, on a (en utilisant 4)) :

$$|f'(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-nx}}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-1}}{k}$$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ (la série harmonique diverge !) Soit A un réel > 0. Et soit n_A un entier tel que $\sum_{k=1}^{n_A} \frac{1}{k} > e\,A$. Alors il existe $\eta_A = 1/n_A$ tel que pour tout $x \in]0, \eta_A[$, on ait $|f'(x)| \geq e^{-1} e\,A = A$. On a montré que $\lim_{x\to 0^+} |f'(x)| = +\infty$. Comme $f'(x) = -|f'(x)|$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.
7) Comme f est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(c_x)$ (théorème des accroissements finis). On a alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{c\to 0^+} f'(c) = -\infty$, et f n'est pas dérivable en 0 (à droite).
8) La série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$ car elle ne converge même pas simplement en 0. En effet, $\sum_{n\geq 1} f_n'(0) = -\sum_{n\geq 1} 1/n$ est une série divergente.
(Remarque hors-sujet : un peu plus dur est de montrer qu'elle ne converge pas uni-

formément sur $]0,+\infty[$. On reprend l'idée du 6) pour minorer le reste d'ordre n de la série des dérivées. On a pour tout $x>0$,

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-kx}}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{e^{-2nx}}{2n} = \frac{1}{2} e^{-2nx}.$$

On en déduit $||R_n||_{]0,+\infty[} \geq |R_n(1/2n)| \geq \dfrac{e^{-1}}{2}$ et on ne peut avoir $\lim_{n\to+\infty} ||R_n||_{]0,+\infty[} = 0$.)

Bonus Les f_n sont de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f_n''(x) = e^{-nx}$. Si on fixe $a>0$, il est clair que $||f_n''||_{]a,+\infty[} = e^{-na} = \left(e^{-a}\right)^n$. La raison e^{-a} appartient à $]0,1[$ donc la série géométrique $\sum_{n\geq 1} ||f_n''||_{]a,+\infty[}$ converge et la série des dérivées $\sum_{n\geq1}(f_n')'$ converge normalement sur $]a,+\infty[$. Par le même argument qu'aux questions 3) et 4), on en déduit que la fonction f' est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f''(x) = (f')'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(f_n')'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-x}\right)^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

On en déduit pour tout $x>0$ $f''(x) = \frac{1+\epsilon_1(x)}{1-(1-x+x\epsilon_2(x))} = \frac{1}{x}\frac{1+\epsilon_1(x)}{1-\epsilon_2(x)} \sim_{x\to0^+} \frac{1}{x}$ (où $\epsilon_1(x)$ et $\epsilon_2(x)$ tendent vers 0 quand x tend vers 0).

Il en résulte finalement que $f'(x) \sim_{x\to0^+} \ln(x)$ (en "intégrant l'équivalent"). Démontrons cela. Soit $\epsilon>0$ fixé. Il existe $\eta>0$ (qu'on peut prendre <1)tel que pour tout $u\in]0,\eta]$, on ait $|f''(u)-\frac{1}{u}| \leq \frac{1}{u}\epsilon$. (C'est une définition de $f''(u)\sim_{u\to0^+}\frac{1}{u}$.) On en déduit que pour tout $x\in]0,\eta]$, on a

$$|\int_x^\eta (f''(u)-\frac{1}{u})\,du| = |[f'(\eta)-\ln(\eta)]-[f'(x)-\ln(x)]| \leq \int_x^\eta |f''(u)-\frac{1}{u}|\,du \leq \epsilon \int_x^\eta \frac{1}{u}\,du \leq -\ln(x)\,\epsilon$$

En divisant par $-\ln(x)$ (qui est >0 car $0<x\leq\eta<1$), il en résulte

$$\Big|\frac{f'(x)}{-\ln(x)}+1\Big| \leq \epsilon + \frac{|f'(\eta)-\ln(\eta)|}{-\ln(x)}$$

Comme $-\ln(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+, on peut trouver η' assez petit vérifiant $0<\eta'<\eta$ et tel que pour tout $x\in]0,\eta']$, on ait $\frac{|f'(\eta)-\ln(\eta)|}{-\ln(x)} \leq \epsilon$ et donc $\left|\frac{f'(x)}{\ln(x)}-1\right| \leq 2\epsilon$. On a montré que $\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{\ln(x)} = 1$, ce qui conclut.