Les réponses aux questions doivent être précisément justifiées. Les documents et calculatrices sont interdits, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Barème indicatif: 22pts + Bonus 3pts

Durée 2 heures

Exercice 1. [Vrai ou Faux] (4pts)
Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second cas.

1. Si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{u_n}$ est nécessairement divergente?
2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ est nécessairement convergente?
3. La série $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec le terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$, est-elle convergente, absolument convergente?
   Indication: Pour étudier la convergence, soit utiliser la méthode DL, soit étudier la convergence de $\sum_{n\geq 2}\left(u_n - \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Exercice 2. [Séries numériques] (5pts)

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général ($n \geq 1$):
$$(a)\ u_n = \frac{(1+\sqrt[n]{n})^n}{3^n} \quad (b)\ u_n = e^{-((\ln n)^2)} \quad (c)\ u_n = \frac{(-1)^n\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}{n+2}$$
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ est convergente. En utilisant une représentation télescopique du terme général $\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = v_{n-1} - v_n$, une suite (v_n) reste à déterminer, calculer sa somme.

Exercice 3. [Suites de fonctions] (6pts)
On considère la suite de fonctions linéaires par morceaux $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, définie par
$$f_n(x) = \begin{cases} n^{-3}(x-n^2) & \text{si } x \in [n^2, 2n^2] \\ n^{-3}(3n^2 - x) & \text{si } x \in [2n^2, 3n^2] \\ 0 & \text{si } \mathbb{R}_+ \setminus [n^2, 3n^2] \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f_n(x)$ pour $n = 1$ et $n = 2$.
2. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction qu'on précisera.
4. Calculer $||f_n||_{\mathbb{R}_+} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)|$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
5. Avons-nous l'égalité $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$?

Exercice 4. [Séries de fonctions] (7pts)
On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $f_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

On admet que $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Rappel:* la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ est strictement croissante et positive.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ de la dérivée terme-à-terme de f converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. En déduire que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a
$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}.$$
5. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
6. Montrer que si $x \in]0, \frac{1}{n}[$ alors
$$|f'(x)| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k} \geq e^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
En déduire $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.
7. En utilisant le théorème d'accroissements finis, montrer que f n'est pas dérivable en 0.
8. La série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

Exercice 5 (Bonus). (3pts)
On reprend Exercice 4. Trouver l'équivalent de $f'(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ en 0^+.
Indication: Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,
$$f''(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sim_{0+} \frac{1}{x}\ .$$