Partiel

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^2.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Calculer son gradient.

3. Déterminer le ou les points critiques de f.

4. Calculer la Hessienne de f. Que peut-on en déduire sur le ou les points critiques ?

5. En considérant les fonctions $y \mapsto f(y^2, y)$ et $y \mapsto f(0,y)$, déterminer la nature du ou des points critiques.

Exercice 2. Soit $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies respectivement par

$$f(x,y,z) = x + y + z$$
$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6}$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 1\}$ est compact.

2. En déduire que f admet un minimum global et un maximum global sur $\mathcal{S}$.

3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $\mathcal{S}$.

Exercice 3 (Fonction de production CES)**.** Cet exercice est constitué de trois parties.

Partie I. On considère, pour $0 < a, \gamma < 1$, la fonction de production suivante $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(K,L) = \left(aK^\gamma + (1-a)L^\gamma\right)^{1/\gamma}.$$

1. Montrer que F est homogène de degré 1 : pour tout $t > 0$, $F(tK, tL) = tF(K,L)$.

2. (a) Calculer les dérivées partielles de F et les exprimer en fonction de la seule variable $k = K/L$ (le *capital par tête*).

(b) Montrer que les dérivées partielles de F sont positives.

(c) Déterminer le sens de variation des dérivées partielles par rapport à chacune des variables. Il n'est pas nécessaire pour cela de calculer les dérivées partielles secondes.

T.S.V.P.

Partie II. On définit le *taux marginal de substitution*

$$T(K,L) = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$$

3. Calculer $T(K,L)$ en fonction de k.

4. Déterminer une fonction f telle que $\ln(T(K,L)) = f(\ln(k))$.

5. On appelle *élasticité de substitution* la quantité $1/f'(x)$. Pourquoi la fonction F est-elle appelée *à élasticité de substitution constante* (*Constant Elasticity of Substitution* en anglais) ?

Partie III. Dans cette partie, on prend $a = 1/2 = \gamma$. Si p est le prix de vente du produit, w le coût du travail et r le taux d'intérêt du capital, le profit réalisé est donné par

$$P(K,L) = pF(K,L) - rK - wL.$$

On cherche à déterminer si ce profit peut être maximisé.

6. Donner les expressions des dérivées partielles de F avec $a = 1/2 = \gamma$ en fonction de k.

7. En déduire que si $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K,L) = 0$, alors

$$k = \left(\frac{4r}{p} - 1\right)^{-2}$$

8. En faisant de même pour $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K,L) = 0$, montrer que s'il existe un maximum, alors on doit avoir

$$p = \frac{4wr}{w+r}.$$