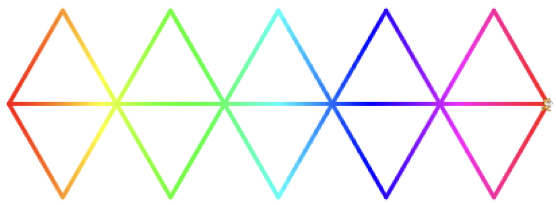
Devoir maison

M2 MEEF—TICE—20 novembre 2023

Ce devoir est à rendre le lundi 8 janvier par mail (benjamin.graille@universite-paris-saclay.fr) en nommant les fichiers selon cette norme `NOM_COMPOSE_Prenom_Exo#.*` *où # est le numéro de l'exercice et * l'extension (qui peut être* `sb3`, `ipynb`, `py`*).*
Les exercices en /verb!python! peuvent être faits à l'aide de `jupyter notebooks` *ou directement dans des scripts. Pour* `scratch`*, envoyez moi vraiment le fichier et pas uniquement un lien vers votre compte mit.*
Le sujet est long et vous êtes autorisés à ne rendre que 3 exercices sur les 4.

Exercice 1 : *Une figure en couleur – scratch*

Reproduisez au mieux cette figure. En particulier, tenez compte des couleurs !



Exercice 2 : *Changement de bases pour les nombres – scratch*

Dans cet exercice, nous nous intéressons à l'écriture des nombres entiers en base b où b n'est pas forcément égal à 10. Vous pourrez trouver des renseignements intéressants à cette adresse : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Base_(arithmétique)`.

Ecrivez un script `scratch` qui

1. demande à l'utilisateur un nombre entier entre 2 et 36 qui sera la base initiale (il faudra reposer la question tant que la réponse ne sera pas valide !) ;
2. demande à l'utilisateur un nombre écrit dans la base initiale (il faudra reposer la question tant que la réponse ne sera pas valide, c'est-à-dire que les chiffres ne sont pas des chiffres pour la base initiale !) ;

3. demande à l'utilisateur un nombre entier entre 2 et 36 qui sera la base finale (il faudra reposer la question tant que la réponse ne sera pas valide !) ;
4. écrit le nombre donné à la question 2 dans la base finale.

Indication : vous pourrez passer par une base intermédiaire dans laquelle vous savez faire des calculs, par exemple la base 10.

Exercice 3 : *Dérivation numérique – python*

Dans cet exercice, nous allons calculer une dérivée numérique. Supposons que l'on souhaite calculer la dérivée d'une fonction f (sans connaître l'expression de cette dérivée). Il est alors possible de calculer une valeur approchée en utilisant les taux d'accroissement :

$$f'(a) \approx_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

Nous allons étudier numériquement la qualité de cette approximation lorsque h tend vers 0. Nous prendrons pour ce faire la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et le point $a = 2$.

Q1. Définissez une fonction `f` ainsi qu'une fonction `df` qui prennent en argument un réel `x` et qui retournent respectivement la valeur de f et de sa dérivée au point x.

Q2. Calculez les deux approximations proposées pour $h = 2^{-k}$ avec $k \in \{2, 4, 6, \dots, 98\}$.

Q3. Affichez vos résultats selon le format suivant

```
--------------------------------------------------------------------------------
| k |      h      | (f(a+h)-f(a))/h |   erreur   | (f(a+h)-f(a-h))/(2h) |   erreur   |
--------------------------------------------------------------------------------
|  2 | 2.5000E-01 |    0.34314575    |  1.041E-02 |        0.35424869       |  6.953E-04 |
|  4 | 6.2500E-02 |    0.35083359    |  2.720E-03 |        0.35359657       |  4.318E-05 |
|  6 | 1.5625E-02 |    0.35286554    |  6.878E-04 |        0.35355609       |  2.697E-06 |
|  8 | 3.9062E-03 |    0.35338093    |  1.725E-04 |        0.35355356       |  1.686E-07 |
...
--------------------------------------------------------------------------------
```

Q4. Décrivez et expliquez le comportement de ces deux suites ?

Exercice 4 : *Approximation de la fonction sinus – python*

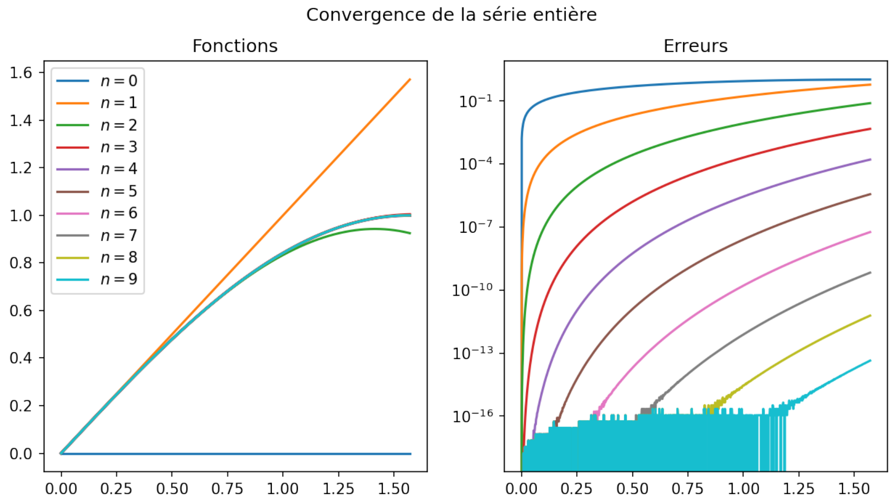
Dans cet exercice, nous proposons de calculer une approximation de la fonction $\sin$ par sa série entière :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Grâce aux symétries de la fonction $\sin$, il est suffisant de savoir l'évaluer sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Q1. Proposez une fonction qui prend en argument x et n et qui retourne une approximation de la fonction sinus en utilisant n termes de la série ci-dessus.

Q2. Tracez comme sur la figure ci-dessous la fonction $\sin$ ainsi que les différentes fonctions d'approximations sur la partie gauche. Et sur la partie droite, vous tracerez l'erreur en échelle logarithmique.



Q3. L'erreur maximale étant atteinte au point $x = \pi/2$, affichez l'erreur en ce point pour les différentes valeurs de n en respectant le format ci-dessous :

```
n =  0 -> E =  1.000e+00
n =  1 -> E = -5.708e-01
n =  2 -> E =  7.517e-02
...
```

Déduisez-en le nombre de termes qui permettent d'avoir une évaluation de la fonction $\sin$ précise à l'erreur machine près.