

I Peinture de tubes

1°) Écoulement en pente avec  $u_\theta$  composante principale de vitesse  
 $\frac{\partial p}{\partial \theta} \approx 0$  car  $p_{at}$  tout autour du tube et courbure quasi constante  
 $\tau_v \sim \frac{h^2}{\nu}$  et terme instationnaire d'accélération négligeable si  
 temps caractéristique d'écoulement  $T_e \gg \tau_v$

2°)  $u_\theta \sim U$      $u_r \sim \alpha U$      $\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{h}$      $\frac{\partial}{\partial \theta} \sim \alpha$     avec  $\alpha \ll 1$   
 $h \ll R$

$$\underbrace{\frac{\partial u_\theta}{\partial t}}_{\approx 0 \text{ si } T_e \gg \tau_v} + \underbrace{u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial z}}_{\frac{\alpha U^2}{h} \gg \frac{\alpha U^2}{R}} + \underbrace{\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}_{\frac{\alpha U^2}{R}} + \underbrace{u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z}}_{=0 \text{ car } u_z=0} - \underbrace{\frac{u_r u_\theta}{r}}_{\frac{\alpha U^2}{R}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}}_{\approx 0 \text{ car } p_{at}} + \underbrace{\nu \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)}_{\frac{\nu}{h^2} \gg \frac{\alpha^2 U}{R^2} \quad = 0 \quad \frac{U}{Rh}}$$

$$+ \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + g \sin \theta$$

$$\frac{\alpha^2 U}{R^2} \quad \frac{\alpha U}{R^2}$$

le terme inertiel prédominant  $u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial z}$  est négligeable devant le terme visqueux prédominant  $\nu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}$  si

$$\frac{\alpha U^2}{h} \ll \nu \frac{U}{h^2} \Rightarrow \frac{Uh}{\nu} \ll \frac{1}{\alpha} \Rightarrow Re_h \ll \frac{1}{\alpha} \text{ où } \frac{1}{\alpha} \gg 1$$

l'éq. de NS suivant  $\theta$  se réduit alors à :

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + g \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = - \frac{g \sin \theta}{\nu}$$

ou  $\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial y^2} = - \frac{g \sin \theta}{\nu}$  avec  $y = r - R$

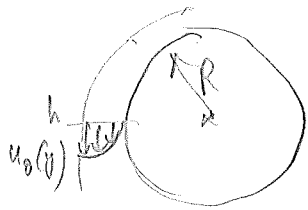
$$\frac{\partial u_\theta}{\partial y} = - \frac{g \sin \theta}{\nu} y + A$$

$$u_\theta(y) = - \frac{g \sin \theta}{2} y^2 + Ay + B$$

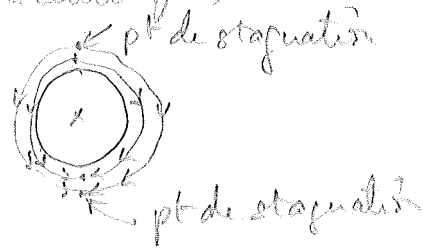
avec CL  $u_\theta(y=0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0 \Rightarrow A = \frac{g \sin \theta}{\nu} h$$

le profil de vitesse est donc  $u_0(y) = \frac{g \sin \theta}{2\nu} y(2h-y)$



les lignes de courant sont quasiment des cercles concentriques



$$4^\circ \quad q = \int_0^h u_0(y) dy = \frac{g \sin \theta}{2\nu} \left[ hy^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{g \sin \theta}{2\nu} \left[ h^3 - \frac{h^3}{3} \right]$$

$$= \frac{g h^3 \sin \theta}{3\nu}$$

donc  $q \propto h^3 \sin \theta$  avec coef-prop. =  $\frac{g}{3\nu}$

$$5^\circ \quad \left( \begin{array}{c} q(\theta) \\ \downarrow \\ \downarrow \\ q(\theta+ds) \end{array} \right) \left( R d\theta \right) \quad [q(\theta) - q(\theta+d\theta)] dt = dh R d\theta$$

$$-\frac{\partial q}{R \partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$6^\circ \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{g}{3\nu} h^3 \sin \theta \right) = -\frac{g}{3\nu R} \left[ h^3 \cos \theta + 3h^2 \frac{\partial h}{\partial \theta} \sin \theta \right]$$

En haut du tube ( $\theta=0$ )  $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{g h^3}{3\nu R}$

$$7^\circ \quad -\frac{\partial h}{h^3} = \frac{\partial t}{3\nu R} \Rightarrow \frac{1}{2h^2} = \frac{t}{3\nu R} + C$$

$$A t=0 \quad h=h_0 \Rightarrow C = \frac{1}{2h_0^2}$$

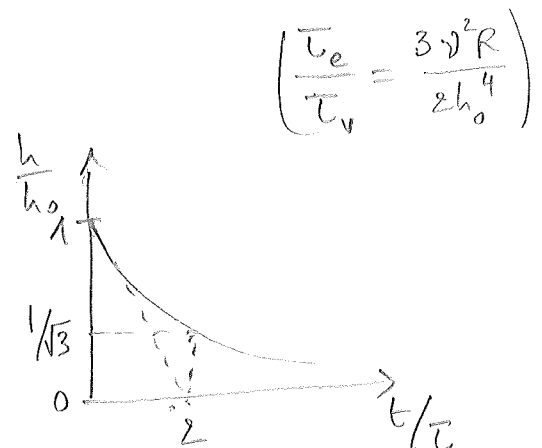
$$\Rightarrow \frac{1}{2h^2} - \frac{1}{2h_0^2} = \frac{t}{3\nu R} \Rightarrow \frac{1}{2h_0^2} \left( \frac{h_0^2}{h^2} - 1 \right) = \frac{t}{3\nu R}$$

$$\Rightarrow h = \frac{h_0}{\left(1 + \frac{t}{\tau_e}\right)^{1/2}} \quad \text{avec } \tau_e = \frac{3\nu R}{2h_0^2}$$

A temps court ( $t \ll \tau_e$ )  $h \approx h_0 \left(1 - \frac{t}{2\tau_e}\right)$

A temps long ( $t \gg \tau_e$ )  $h \approx h_0 \left(\frac{\tau_e}{t}\right)^{1/2}$

$q \propto t \approx 2\tau_e \quad h = \frac{h_0}{\sqrt{3}}$



$$8^{\circ} \text{ A.N. } \tau_e = \frac{3 \times 10^{-3} \times 10^{-1}}{2(10^{-3})^2} = \frac{3}{2} 10^2 = 150 \text{ s}$$

(3)

$$\tau_v = \frac{h_0^2}{\gamma} = \frac{(10^{-3})^2}{10^{-3}} = 10^{-3} \text{ s}$$

$$\frac{\tau_e}{\tau_v} \sim 10^5 !$$

on est bien en quasi stationnaire

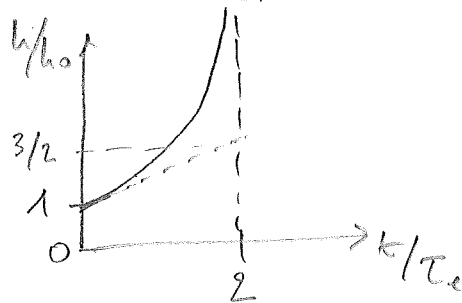
$$9^{\circ} \text{ En bas du tube } (\theta = \pi) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = + \frac{gh^3}{3\gamma R}$$

qui s'intègre de la même façon que précédemment en  $h(t) = \frac{h_0}{(1 - \frac{t}{\tau_e})^{1/2}}$

$$\text{A temps court } (t \ll \tau_e) \quad h \approx h_0 \left(1 + \frac{t}{2\tau_e}\right)$$

$$q \text{ d. } t \rightarrow \tau_e \quad h \rightarrow +\infty$$

les approximations de lubrification ne sont plus vérifiées.



## II Jet d'eau

(4)

1°) Fluide parfait: fluide de viscosité nulle.

2°) Bernoulli sur ligne de courant verticale jusqu'à  $z=H$

$$\frac{1}{2} \rho U_0^2 + p_0 + \rho g z_0 = \frac{1}{2} \rho U_H^2 + p_H + \rho g z_H$$

avec  $U_H = 0$

$z_H = H$

$z_0 = 0$

$p_0 = p_H = p_{at}$

$$\Rightarrow U_0 = (2gH)^{1/2}$$

$$Q_0 = U_0 \frac{\pi D_0^2}{4} = \frac{\pi D_0^2}{4} (2gH)^{1/2}$$

A.N.  $Q_0 = \frac{\pi (10^{-1})^2}{4} (2 \times 10 \times 150)^{1/2} \approx \frac{3}{4} (30)^{1/2} 10^{-1} \approx 0,4 \text{ m}^3/\text{s}$

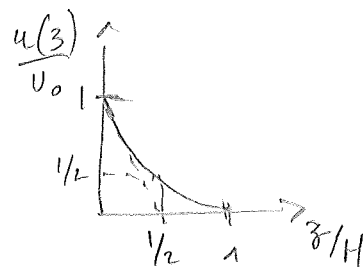
$U_0 = (2 \times 10 \times 150)^{1/2} \approx 55 \text{ m/s}!$

3°) Bernoulli jusqu'à  $z$ :

$$\frac{1}{2} \rho U_0^2 = \frac{1}{2} \rho u(z)^2 + \rho g z$$

$$\Rightarrow u(z) = U_0 \left(1 - \frac{2gz}{U_0^2}\right)^{1/2}$$

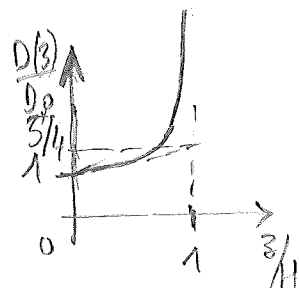
$$= U_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2}$$



4°) Par conservation de la masse,

$$U_0 \frac{\pi D_0^2}{4} = u(z) \frac{\pi D(z)^2}{4} \Rightarrow D(z) = D_0 \left(\frac{U_0}{u(z)}\right)^{1/2}$$

$$D(z) = \frac{D_0}{\left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/4}}$$



5°) Bernoulli jusqu'à la plaque en  $z$  où  $u(z) = 0$

$$\frac{1}{2} \rho U_0^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho \times 0 + \rho g z + p(z)$$

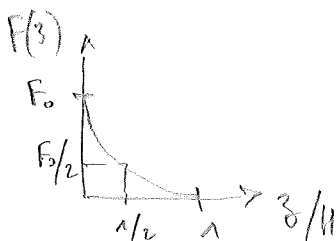
$$p(z) - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 - \rho g z$$

$$= \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

la force sur la plaque est donc  $F(z) = [p(z) - p_0] \pi D(z)^2$

$$= \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \times \frac{\pi D_0^2}{4} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{\pi \rho U_0^2 D_0^2}{8} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2}$$

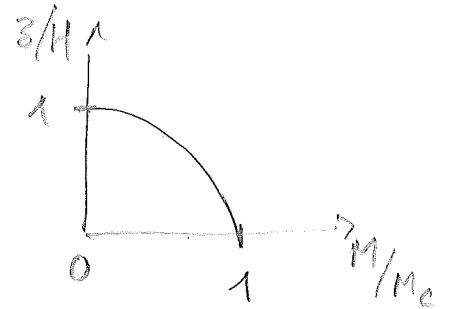


6° A l'équilibre  $F = Mg$

(5)

$$\frac{\pi \rho U_0^2 D_0^2}{8} \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{1/2} = Mg$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{H} &= 1 - \left(\frac{8Mg}{\pi \rho U_0^2 D_0^2}\right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{M}{M_c}\right)^2 \end{aligned}$$



A.N.  $M = 70 \text{ kg}$

$$M_c = \frac{\pi \rho U_0^2 D_0^2}{8g} = \frac{\pi \rho H D_0^2}{4} = \frac{\pi \times 10^3 \times 150 \times (10^{-1})^2}{4} \approx 1500 \text{ kg}$$

$$\frac{M}{M_c} \ll 1 \Rightarrow \frac{z}{H} \approx 1$$

### III Analyse dimensionnelle

1° 6 paramètres :  $z_M = f(M, \rho, U_0, D_0, g)$

3 dimensions

$6 - 3 = 3$  paramètres sans dimensions

2°  $\pi_1 = \frac{z_M}{D_0}$

$$\pi_2 = \frac{M}{\rho D_0^3}$$

$$\pi_3 = \frac{U_0^2}{g D_0}$$

$$\pi_1 = F(\pi_2, \pi_3)$$

$$\frac{z_M}{D_0} = F\left(\frac{M}{\rho D_0^3}, \frac{U_0^2}{g D_0}\right)$$