Mécanique des Fluides

Mardi 2 novembre 2021

Durée 3 heures, sans document sauf une feuille A4 RV, barème approximatif : 11 - 6 - 3

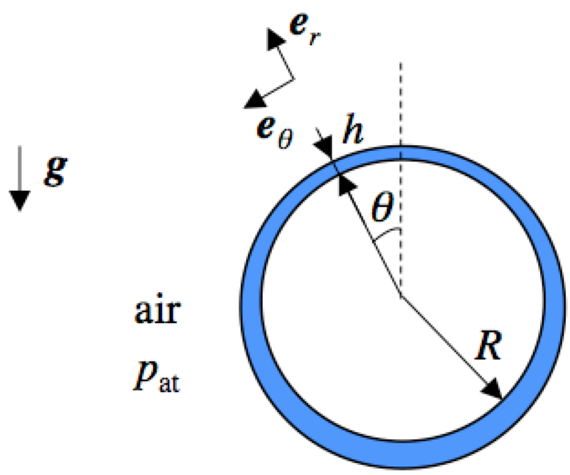
Données

Viscosité cinématique de l'eau : $\nu = 10^{-6}$ m^2/s

Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques : voir en dernière page

I. Peinture de tubes

Dans la procédure de revêtement d'une couche de protection (par exemple de peinture) sur des tubes horizontaux, l'écoulement avant séchage peut provoquer une inhomogénéité regrettable d'épaisseur. Le but est ici de quantifier la dynamique d'écoulement dans cette configuration. On considérera ici pour simplifier que la peinture appliquée sur la paroi extérieure de rayon R d'un tube cylindrique fixe horizontal est un fluide incompressible newtonien de viscosité cinématique ν. On considérera d'autre part que le processus d'application est suffisamment au point pour qu'au temps initial ($t = 0$), la couche de peinture ait une épaisseur h_0 constante tout autour du tube (indépendante de θ) et faible devant le rayon du tube ($h_0 << R$). On considérera enfin qu'au cours de l'écoulement, la couche aura une épaisseur $h(\theta,t)$ lentement variable (pente $\alpha = (1/R)(\partial h/\partial\theta) << 1$). L'air ambiant entourant le fluide est immobile et à la pression atmosphérique p_{at}. La figure ci-dessous précise la géométrie et les notations, avec une invariance suivant la coordonnée z parallèle à l'axe horizontal du tube fixe.



1. Quelle est l'origine de l'écoulement ? Quelle est la composante principale de la vitesse ? Pourquoi peut-on considérer que le gradient de pression orthoradial $\partial p/\partial\theta$ est négligeable? Quel est l'ordre de grandeur du temps de diffusion visqueuse τ_v sur la couche ? A quelle condition peut-on alors négliger le terme instationnaire d'accélération dans cet écoulement ?

2. En supposant que l'écoulement est faiblement non-parallèle et satisfait aux approximations de lubrification en quasi-stationnaire, en déduire que l'équation simplifiée du mouvement du fluide suivant la direction θ s'écrit

$$0 = \nu \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + g \sin\theta \, .$$

3. Calculer alors le profil de vitesse $u_\theta(r,\theta,t)$ — on pourra poser utilement $y = r - R$ et exprimer le profil $u_\theta(y,\theta,t)$ — en explicitant les conditions aux limites. Quelle est la forme simple de ce profil de vitesse ? Tracer l'allure de ce profil de vitesse en $\theta = \pi/2$. Tracer par ailleurs l'allure des lignes de courant tout autour du tube en faisant apparaître les éventuelles points (ou lignes) singuliers (stagnation…)

4. Calculer le débit q dans la couche de fluide (par unité de longueur du cylindre suivant Oz) et montrer qu'il est proportionnel à $h^3 \sin\theta$ avec un coefficient de proportionnalité dont on précisera l'expression en fonction des paramètres du problème g et ν.

5. En s'aidant d'un petit dessin, montrer que le bilan de masse considéré sur un tronçon élémentaire de fluide pendant un intervalle de temps élémentaire s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{R}\frac{\partial q}{\partial \theta} \, .$$

6. Déduire des questions 4 et 5 l'équation différentielle liant les variations temporelles de h à ses variations spatiales, et montrer qu'en haut du tube (en $\theta = 0$) cette équation s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{gh^3}{3\nu R} \, .$$

7. Déterminer alors l'évolution temporelle $h(t)$ de l'épaisseur de la couche en haut du tube ($\theta = 0$) en tenant compte de la condition initiale. On écrira l'expression obtenue sous la forme $h = h_0 f(t/\tau_e)$ et on précisera et commentera l'expression du temps caractéristique τ_e. Quelle est l'évolution à temps court ($t \ll \tau_e$) et à temps long ($t \gg \tau_e$) ? De combien a évolué l'épaisseur au bout du temps τ_e? Tracer l'allure de $h(t)$.

8. Application numérique : calculer τ_e pour une peinture de même densité mais 1000 fois plus visqueuse que l'eau avec une épaisseur initiale $h_0 = 1$ mm sur un tube de rayon $R = 10$ cm. Comparer au temps de diffusion visqueuse sur l'épaisseur de couche. Commenter.

9. Reprendre l'analyse pour le bas du tube ($\theta = \pi$) après avoir montré que l'équation différentielle régissant les variations spatio-temporelles de h s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = +\frac{gh^3}{3\nu R} \, .$$

Que se passe-t-il au bout du temps τ_e? Les conditions d'application de l'approximation de lubrification restent-elles ici vérifiées?

II. Jet d'eau

On considère une configuration de jet d'eau dirigé vers le haut, sortant verticalement d'un tube de diamètre D_0 avec une vitesse U_0 uniforme et stationnaire. On négligera dans les raisonnements tous types de dissipation en considérant les fluides (eau et air) comme parfaits.

1. Qu'est-ce qu'un fluide parfait ?
2. En appliquant la relation de Bernoulli, dont on rappellera la signification, à une ligne de courant qu'on spécifiera, exprimer la vitesse de sortie U_0 du jet nécessaire pour qu'il monte jusqu'à la hauteur H ? En déduire le débit de sortie Q_0 correspondant ? A.N. Calculer U_0 et Q_0 pour le jet d'eau monumental qui orne les bords du lac Léman à Genève et pour lequel D_0 = 10 cm et H = 150 m !
3. Exprimer maintenant la vitesse $u(z)$ dans le jet en fonction de l'altitude z au-dessus du tube de sortie. Tracer $u(z)/U_0$ en fonction de z/H. Commenter.
4. En justifiant votre raisonnement, exprimer la variation du diamètre $D(z)$ du jet en fonction de l'altitude z. Dessiner l'allure du jet $D(z)/S_0$ en fonction de z/H. Commenter.
5. On place à une altitude z une plaque horizontale qu'on maintient fixe sur le jet. Quelle est la force exercée par le jet sur la plaque en fonction des paramètres à l'altitude considérée ?
6. En considérant une plaque de masse M, exprimer l'altitude z_M en fonction des paramètres du problème à laquelle elle resterait en équilibre (en supposant qu'elle reste horizontale) ? Tracer l'altitude d'équilibre z_M/H en fonction de M/M_c où M_c est une masse caractéristique dont on spécifiera l'expression. A.N. En vous considérant comme une plaque horizontale : calculer numériquement en fonction de votre propre masse votre altitude d'équilibre sur le jet de Genève en supposant que vous arriviez à y rester !

III. Analyse dimensionnelle

On propose ici de faire l'analyse dimensionnelle de la dernière question du problème précédent (II.6) où on cherche l'altitude d'équilibre z_M, d'une masse M sur un jet d'eau de masse volumique ρ sortant à la vitesse U_0 d'une buse de diamètre D_0 dans le champ de gravité g.

1. En fonction du nombre de paramètres et de dimensions, en déduire le nombre de paramètres sans dimension intervenant dans le problème.
2. Donner les expressions possibles de ces paramètres sans dimensions.
3. L'analyse dimensionnelle permet-elle ici de connaître la dépendance de l'altitude d'équilibre z_M en fonction des paramètres du problème ?

Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (r,θ,z)

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}-\frac{u_r}{r^2}\right)+\frac{1}{\rho}f_r$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}-\frac{u_r u_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta}{r^2}\right)+\frac{1}{\rho}f_\theta$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{\rho}f_z$$