

Chapitre 3

Le théorème du transport

Sommaire

3.1	Notion de volume de contrôle	25
3.2	Théorème de Leibnitz	25
3.3	Théorème du transport d'une fonction scalaire	26
3.4	Conservation de la masse	26
3.4.1	Démonstration	27
3.4.2	Cas particulier d'un fluide incompressible.	27
3.5	Théorème du transport d'une fonction vectorielle	27
3.6	Application au transport de la quantité de mouvement	28
3.7	Application au sillage d'un cylindre	29
3.8	Transport de l'énergie	30

Nous allons maintenant présenter quelques théorèmes très puissants et utiles pour la mécanique des fluides. Ils sont basés sur les notions de volume de contrôle et de surface de contrôle et permettent d'écrire des équations de bilan, par exemple pour la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie, sans avoir à connaître encore les équations locales de la mécanique des fluides.

3.1 Notion de volume de contrôle

Un *volume de contrôle* (VC) est un volume imaginaire limité par une *surface de contrôle* (SC). Le volume de contrôle peut être un volume fixe dans le référentiel du laboratoire, un volume toujours constitué des mêmes particules fluides, ou un volume ayant un déplacement arbitraire. On parle alors respectivement de *volume fixe*, *volume matériel* ou de *volume mobile*. Dans le cas d'un volume fixe, la vitesse de la surface de contrôle est nulle en tout point ($\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ si $\vec{r} \in SC$). Pour un volume matériel, la vitesse de la surface est égale en tout point à la vitesse locale du fluide ($\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)$ si $\vec{r} \in SC$).

3.2 Théorème de Leibnitz

Dans de nombreux cas on doit dériver une intégrale d'une fonction de plusieurs variables, dont les bornes dépendent de la variable de dérivation. Dans le cas d'une fonction scalaire dépendant d'une variable de temps et une d'espace on peut par exemple démontrer l'équation 3.1 :

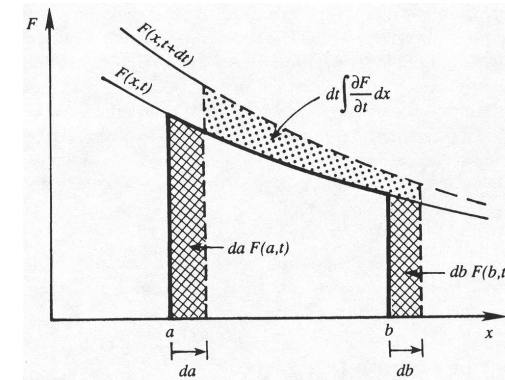


FIGURE 3.1 – Evolution de l'intégrale en x de la fonction f entre t et t + dt

Théorème de Leibnitz :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[b(t), t] \frac{db(t)}{dt} - f[a(t), t] \frac{da(t)}{dt} \quad (3.1)$$

On peut se convaincre de cette relation en observant la figure 3.1.

3.3 Théorème du transport d'une fonction scalaire

On peut ensuite généraliser à trois dimensions d'espace pour une fonction scalaire f (démonstration dans la référence [4] p. 78 à 86 par exemple) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \iint_{SC(t)} f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{dS}$$

$\vec{V}(\vec{r}, t)$ est alors la vitesse de déplacement de la surface de contrôle au point considéré. Par exemple si le volume est fixe ce deuxième terme est nul.

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, le deuxième terme se transforme en une intégrale de volume et l'on obtient finalement le *Théorème du transport de Reynolds* :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{V}) \right] d\tau \quad (3.2)$$

3.4 Conservation de la masse

Nous allons montrer que la conservation de la masse conduit à une équation appelée *équation de continuité* qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0}. \quad (3.3)$$

Cette équation a la forme classique d'une loi de conservation. On peut introduire par exemple la quantité de mouvement par unité de volume (ou flux de masse) $\vec{j} = \rho \vec{v}$ et faire un parallèle avec la conservation de la charge électrique en électromagnétisme.

3.4.1 Démonstration

La masse dans un volume de contrôle s'écrit : $M_{VC(t)} = \int_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau$, où ρ est la masse volumique. Si VC est un volume de contrôle matériel emporté par l'écoulement, alors $\vec{V} = \vec{v}$ et s'il y a conservation de la masse (pas de réaction nucléaire par exemple) alors : $dM_{VC}/dt = 0$. Le théorème du transport de Reynolds nous donne alors pour $f = \rho$:

$$\frac{dM_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0.$$

On doit donc avoir pour tout VC matériel la relation suivante qui caractérise localement la conservation de la masse (écriture eulérienne) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

En développant le terme de divergence, $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho)$ on peut écrire la forme lagrangienne de la conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0}. \quad (3.4)$$

3.4.2 Cas particulier d'un fluide incompressible.

Pour un fluide incompressible, une particule fluide conserve son volume au cours du mouvement et donc sa masse volumique et on a donc $D\rho/Dt = 0$. En conséquence, pour un fluide incompressible, la conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v}) = 0}. \quad (3.5)$$

C'est en particulier vrai pour un fluide inhomogène en masse volumique, comme par exemple un fluide stratifié en densité. Le terme $\partial\rho/\partial t$ n'est pas forcément nul en un point mais $D\rho/Dt$ l'est.

Dans la suite, sauf mention contraire, nous ne traiterons que les cas des fluides incompressibles.

3.5 Théorème du transport d'une fonction vectorielle

Si la fonction du théorème du transport n'est plus scalaire mais vectorielle, on peut appliquer le théorème pour chacune de ses composantes et l'on trouve finalement :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\tau + \iint_{SC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) \left[\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{d}\vec{S} \right].$$

Cela dit, le dernier terme n'est plus un scalaire et l'on ne peut donc plus utiliser directement le théorème de Green-Ostrogradsky. Nous verrons plus loin (§ 4.6) qu'il est possible de s'en sortir à condition de définir la divergence d'un tenseur qui sera... un vecteur !

3.6 Application au transport de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement par unité de volume s'écrit $\rho \vec{v}$. Le théorème du transport d'une quantité vectorielle sur un volume matériel nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho \vec{v} d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} d\tau + \iint_{SC(t)} \rho \vec{v} \left[\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S} \right].$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à ce volume de contrôle matériel nous permet d'écrire :

$$\sum \text{forces appliquées} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

où $\vec{P} = \int_{VC(t)} \rho \vec{v} d\tau$ est la quantité de mouvement totale du volume de contrôle. Si nous projetons cette équation vectorielle sur l'axe x_i ,

$$F_i = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho v_i d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} d\tau + \iint_{SC(t)} \rho v_i \left[\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S} \right]$$

et nous pouvons appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky pour chaque composante :

$$F_i = \iiint_{VC(t)} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div} [v_i(\rho \vec{v})] \right) d\tau.$$

Mais $\operatorname{div} [v_i(\rho \vec{v})] = v_i \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(v_i)$. En utilisant de plus la conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$, il vient :

$$F_i = \iiint_{VC(t)} \left(\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(v_i) \right) d\tau.$$

Soit pour le vecteur \vec{F} :

$$\vec{F}(t) = \iiint_{VC(t)} \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) d\tau.$$

L'opérateur $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ est le même que celui qui a été introduit dans l'équation 1.4 pour la dérivation lagrangienne.

Finalement en faisant apparaître l'accélération lagrangienne, la somme des forces appliquées à un volume de contrôle matériel s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}(t) = \iiint_{VC(t)} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau}. \quad (3.6)$$

Cette équation est vraie même si le fluide est compressible (ρ variable), tant qu'il y a conservation de la masse.

3.7 Application au sillage d'un cylindre

A titre d'exercice nous pouvons utiliser cette équation de transport de la quantité de mouvement pour calculer la force de traînée \vec{D} sur un cylindre infini dans un écoulement homogène dont la vitesse en amont est U_∞ (cf. [20] p. 86). Nous supposons l'écoulement stationnaire, incompressible et bidimensionnel (2C2D). Nous prendrons un volume de contrôle matériel (se déplaçant avec le fluide, $\vec{V} = \vec{v}$) limité par la surface du cylindre et un parallélépipède (PQRS) situé assez loin de l'obstacle (figure 3.2). En particulier nous supposons qu'en aval (sur QR) les lignes de courant sont redevenues parallèles à Ox et que la pression est revenue à sa valeur en amont P_∞ (ce qui suppose que le fluide est parfait ou du moins que les effets dissipatifs en l'absence d'obstacle sont faibles).

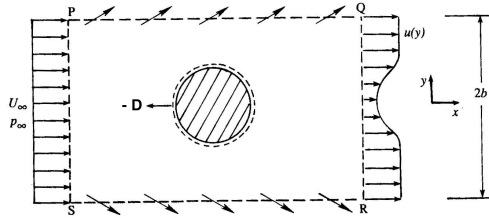


FIGURE 3.2 – Volume de contrôle (PQRS + cylindre) autour d'un obstacle cylindrique

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au volume de contrôle nous dit que :

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquées}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \vec{v} d\tau.$$

Comme forces appliquées sur le fluide à la surface de contrôle nous avons les forces de pression, mais elles s'annulent entre l'amont et l'aval et le haut et le bas si la pression vaut partout P_∞ , et la force appliquée par le cylindre sur le fluide qui vaut $-\vec{D}$.

Le théorème du transport nous donne :

$$-\vec{D} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\tau + \oint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}).$$

Le premier terme du membre de droite est nul car l'écoulement est stationnaire. Projétons sur l'axe des x .

$$-D = \iint_P^Q \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_Q^R \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_R^S \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_S^P \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) + \iint_{\text{cylindre}} \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}).$$

La contribution correspondant à la surface du cylindre est nulle car le produit $\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}$ y est nul, le cylindre étant supposé imperméable.

Dans la suite nous noterons L un élément de longueur fixe dans la direction transverse Oz .

Sur SP, $v_x = U_\infty$, sur QR, $v_x = U(y)$. Donc :

- $\iint_S^P \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = -2\rho b L U_\infty^2$. Le signe moins venant de la convention d'orientation sortante.
- $\iint_Q^R \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = \rho L \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy$.

Par contre sur PQ et RS il existe une vitesse transverse $v_y \neq 0$ mais la vitesse longitudinale est proche de U_∞ si on est assez loin du cylindre. On en déduit :

- $\iint_P^Q \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \iint_P^Q \rho (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \dot{m}_{PQ}$ où \dot{m}_{PQ} est le débit massique (masse s'échappant par seconde) à travers la surface PQ.
- $\iint_R^S \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \iint_R^S \rho (\vec{v} \cdot \vec{d}\vec{S}) = U_\infty \dot{m}_{RS}$ où \dot{m}_{RS} est le débit massique à travers la surface RS.

Les quantités \dot{m}_{PQ} et \dot{m}_{RS} ne sont pas connues mais par contre la conservation de la masse permet d'écrire :

$$\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{QR} + \dot{m}_{RS} + \dot{m}_{SQ} = 0,$$

Soit

$$\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{RS} = -\dot{m}_{PS} - \dot{m}_{QR} = L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy.$$

Soit finalement :

$$-D = -2bL\rho U_\infty^2 + L\rho \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy + U_\infty \left(L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy \right),$$

et donc :

$$D = \rho L \int_{-b}^b U(y) [U_\infty - U(y)] dy.$$

Cette équation permet de calculer la traînée sur un obstacle par une simple mesure expérimentale du profil transverse de vitesse loin en aval, donc sans avoir à instrumenter l'obstacle.

Effet de blocage : On suppose maintenant que l'expérience est faite dans une soufflerie un peu trop étroite. Les surfaces PQ et RS sont donc maintenant les parois de la soufflerie (pas de vitesse normale). La vitesse tangentielle sur ces parois vaut toujours U_∞ . Montrer qu'on a alors :

$$D = \rho L \int_{-b}^b [U_\infty^2 - U^2(y)] dy.$$

Pour éviter cet effet de blocage (mauvaise estimation de D à cause des survitesses de part et d'autre de l'objet) on considère qu'une soufflerie doit avoir une largeur supérieure à 10 fois le diamètre de l'obstacle.

3.8 Transport de l'énergie

Considérons un volume de contrôle de fluide. Si on note \dot{W} le travail des forces agissant sur ce volume ou sur la surface de contrôle de ce volume, par unité de temps (c'est donc une puissance) et \dot{Q} l'échange de chaleur correspondant par unité de temps, la thermodynamique nous dit que :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{W} + \dot{Q}$$

où U est l'énergie interne du volume de fluide considéré,

$$U = \iiint_{VC(t)} e \, d\tau,$$

où e est la densité d'énergie, somme de l'énergie potentielle par unité de volume (par exemple $\rho g z$ pour l'énergie potentielle de gravité) et de l'énergie cinétique par unité de volume $\frac{1}{2}\rho v^2$. Le bilan macroscopique d'énergie s'écrit alors comme la variation locale de densité d'énergie plus le flux d'énergie à travers la surface de contrôle :

$$\dot{W} + \dot{Q} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} e(\vec{r}, t) \, d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial e}{\partial t} \, d\tau + \iint_{SC(t)} e(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{dS}.$$

Chapitre 4

Le tenseur des contraintes

Sommaire

4.1	Notion de tenseur cartésien de rang 2	33
4.2	Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (<i>stress tensor</i>)	34
4.3	Symétries du tenseur des contraintes	35
4.4	Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$	35
4.5	Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$	35
4.6	Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$	36

4.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2

Nous nous limiterons dans ce cours aux tenseurs cartésiens (décrits dans une base orthonormée fixe) sinon tout est bien plus compliqué !

Pour décrire les variations spatiales d'une fonction scalaire on doit calculer le vecteur gradient. De même pour décrire les variations spatiales d'une fonction vectorielle on peut calculer un *tenseur* particulier, le tenseur gradient, qui fait apparaître les composantes des vecteurs gradients de chacune de ses composantes.

On définit ainsi par exemple le tenseur des gradients de vitesse $[G]$ par

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = [G_{ij}] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right].$$

Ainsi chaque ligne de la matrice est constituée des composantes de $\vec{\nabla}(v_i)$.

Pour l'opérateur gradient d'un scalaire on a la relation : $dP = \vec{\nabla} P \cdot \vec{dl}$.

Pour le tenseur gradient on a la relation :

$$\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl}.$$

En effet

$$\{\vec{dv}\}_i = \{[G] \cdot \vec{dl}\}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy + \frac{\partial v_i}{\partial z} dz = \vec{\nabla}(v_i) \cdot \vec{dl} = dv_i.$$

Nous avons ici, avec $[G]$, un exemple de tenseur de rang 2 (il faut 2 indices pour énumérer les coefficients). Un tenseur de rang 1 correspond à un vecteur tandis qu'un tenseur de rang 0 est un scalaire. On peut aussi définir des tenseurs de rangs plus élevés (exemple pour décrire les variations spatiales d'un tenseur de rang 2).

4.2 Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (*stress tensor*)

On appelle *contrainte* la force de contact $\vec{\sigma}(\vec{n})$ qui s'applique sur une surface unité de normale \vec{n} (figure 4.2). Si \vec{n} est le vecteur unitaire, dirigé selon la normale sortante de cette surface (dans la direction du milieu qui applique la force de contact), la force s'exerçant sur une surface dS s'écrit :

$$\vec{df} = \vec{\sigma}(\vec{n})dS.$$

C'est la force de contact appliquée par le milieu supérieur (là où pointe \vec{n}) sur le milieu inférieur (là d'où sort \vec{n}) sur la surface $\vec{dS} = dS\vec{n}$.

Si on regarde les contraintes s'exerçant sur une des faces de surface unité d'un cube (figure 4.1), on a :

$$\vec{\sigma}(\vec{e}_2) = \sigma_{12}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_3.$$

$\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$ est un vecteur ayant trois composantes : σ_{22} représente la contrainte normale et σ_{12} et σ_{32} les deux composantes tangentielles.

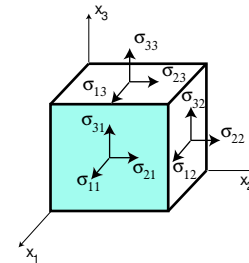


FIGURE 4.1 – Convention d'écriture des 9 termes du tenseur des contraintes.

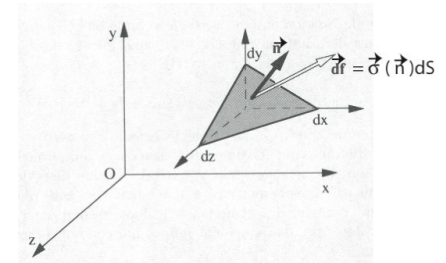


FIGURE 4.2 – Contrainte $\vec{\sigma}(\vec{n})$ dans une direction quelconque : $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$.

Pour connaître l'état des contraintes sur n'importe quelle surface \vec{dS} , il suffit de connaître $\vec{\sigma}(\vec{e}_1)$, $\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$ et $\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$, soit finalement le tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Par convention dans σ_{ij} , i est le numéro de ligne du tenseur et la direction de la composante de la contrainte considérée et j est le numéro de colonne et la direction de la normale sortante. En effet on peut montrer que $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$ (voir § 4.4).

4.3 Symétries du tenseur des contraintes

Deux propriétés de symétrie sont importantes pour écrire les contraintes et le tenseur des contraintes :

- Le principe de l'action et de la réaction nous permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = -\vec{\sigma}(-\vec{n}).$$

En effet la somme des forces appliquées à une surface de masse nulle est forcément nulle.

En conséquence, pour connaître les contraintes appliquées sur un volume cubique infiniment petit il suffit de connaître les contraintes $\vec{\sigma}(\vec{n})$ sur trois faces contiguës et donc de connaître $[\sigma]$. Sur deux faces opposées les contraintes sont égales et opposées au premier ordre.

- Le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

En effet regardons les couples de rotation qui s'exercent sur un cube vis-à-vis de l'axe Oz par exemple :

$$d\Gamma_{Oz} = \|\vec{r} \wedge d\vec{f}\| = \sigma_{yx} dS_x dx - \sigma_{xy} dS_y dy = (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) d\tau.$$

Or le théorème du moment cinétique nous permet d'écrire $\Gamma_{Oz} = dI \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx \rho d\tau r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

Donc $(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \approx \rho r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Lorsque $r \rightarrow 0$ on doit donc avoir $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ pour ne pas avoir une accélération angulaire infinie.

Le même raisonnement pour les axes Ox ou Oy montrent que le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}. \quad (4.1)$$

4.4 Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$

Connaissant le tenseur des contraintes $[\sigma]$ on peut connaître dans un milieu continu les contraintes s'exerçant sur n'importe quelle surface de normale \vec{n} . En effet on a la relation (figure 4.2) :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j. \quad (4.2)$$

Nous avons utilisé la *convention de sommation d'Einstein* : dès que des indices apparaissent deux fois dans une expression, le signe \sum sur cet indice n'est pas écrit pour simplifier mais il est implicite. Par exemple $a_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 a_{ii}$ et $\delta_{ii} = 3$, où δ_{ij} est le symbole de Kroneker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

On peut vérifier la propriété (4.2) en faisant par exemple $\vec{n} = \vec{e}_i$ ou bien faire la démonstration complète (voir Ref. [4] p. 108 ou [15] p. 138).

Exercice : Démontrer la propriété précédente à 2 dimensions.

4.5 Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$

Considérons le cas d'un fluide au repos, c'est-à-dire en l'absence d'écoulement. Dans ce cas de l'hydrostatique, c'est-à-dire dans le cadre de la thermodynamique à l'équilibre, l'isotropie des contraintes impose d'une part qu'il n'y ait que des contraintes normales (pas de contraintes tangentielles) et d'autre part qu'elles soient toutes égales en module. On appelle « pression » le scalaire p tel que $d\vec{f} = -p d\vec{S}$. Sans écoulement on peut donc écrire $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p[I]$$

où $[I]$ est le tenseur identité aussi appelé tenseur de Kroneker $[\delta]$ car $[I] = [\delta_{ij}]$.

On notera que, quelque soit le vecteur \vec{n} , on a $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = -p[I] \cdot \vec{n} = -p\vec{n}$. Les contraintes sont donc normales aux surfaces et isotropes dans un fluide au repos (équilibre thermodynamique).

Dans le cas où il y a un écoulement (thermodynamique hors équilibre) on définit le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ par la relation :

$$[\sigma] = -p[I] + [\sigma'].$$

$[\sigma']$ est évidemment le tenseur nul s'il n'y a pas d'écoulement, ou plus généralement s'il n'existe pas d'autres forces que les forces de pression (ce sera le cas des fluides parfaits qui sont supposés sans viscosité). Ce tenseur $[\sigma']$ caractérise les forces d'origine visqueuse qui apparaissent sous écoulement.

Notons que $[\sigma]$ ou $[\sigma']$ ne décrivent que les forces de contact (ou de surface, forces à courtes portées) et pas des forces de volumes (forces à longues portées) comme la gravité par exemple.

4.6 Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$

Nous avons démontré (équation 3.6) que pour un volume de contrôle matériel on a la relation :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau.$$

Nous allons maintenant décomposer les forces appliquées en forces de volume $\sum \vec{F}_{VC}$ et en forces de surface $\sum \vec{F}_{SC}$. Soit : $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{VC} + \sum \vec{F}_{SC}$. Pour les forces volumiques nous introduirons les forces par unités de masse (donc homogène à des accélérations) que nous noterons \vec{g} car souvent ce sera l'accélération de la gravité, mais en principe le terme \vec{g} pourra représenter n'importe quelle force de volume (force magnétique, électrostatique, force de Laplace, pseudo-forces d'inertie, etc).

$$\sum \vec{F}_{VC} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d\tau.$$

Pour les forces de surface nous avons par définition :

$$\sum \vec{F}_{SC} = \oint_{SC} \vec{\sigma}(\vec{n}) dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{n} dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot d\vec{S}.$$

Or $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j$, donc si on projette l'équation précédente sur l'axe des i , il vient :

$$\left\{ \oint_{SC} [\sigma] \cdot d\vec{S} \right\}_i = \oint_{SC} \vec{L}_i \cdot d\vec{S} = \iiint_{VC} \text{div}(\vec{L}_i) d\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau.$$

Car c'est le flux d'un vecteur \vec{L}_i de composantes $\vec{L}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$ (L pour "ligne" car ses composantes sont les coefficients d'une ligne du tenseur des contraintes) à travers la surface $d\vec{S}$.

Donc si on regroupe les forces de volume et les forces de surface, on a pour la composante i :

$$\sum F_i = \iiint_{VC} [\rho g_i + \text{div}(\vec{L}_i)] d\tau.$$

Ce que l'on peut encore écrire sous une forme compacte vectorielle :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC(t)} [\rho \vec{g} + \overrightarrow{\text{div}}[\sigma']] d\tau,$$

à condition de définir un nouvel opérateur, la divergence d'un tenseur, qui est un *vecteur* (attention !) donc chaque composante est la divergence du vecteur ligne correspondant : $\{\overrightarrow{\text{div}}[\sigma']\}_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}$.

En introduisant l'expression $[\sigma] = -p[I] + [\sigma']$ on en déduit que

$$\{\overrightarrow{\text{div}}[\sigma]\}_i = -\frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}$$

soit

$$\overrightarrow{\text{div}}[\sigma] = -\vec{\nabla}(p) + \overrightarrow{\text{div}}[\sigma'].$$

Finalement en rassemblant tous les termes :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau = \iiint_{VC} [-\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\text{div}}[\sigma']] d\tau,$$

quelque soit le volume de contrôle et donc au niveau local :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\text{div}}[\sigma']}. \quad (4.3)$$

Cette équation est la forme locale du Principe Fondamentale de la Dynamique. Elle est exacte pour tous les fluides, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux du moment qu'ils conservent leur masse. L'étape suivante est d'exprimer la *relation constitutive*, c'est-à-dire la relation entre le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ et le tenseur des gradients de vitesse $[G]$. Nous établirons cette relation dans le chapitre 7 pour un fluide dit "newtonien". L'équation obtenue portera alors le nom d'équation de Navier-Stokes.

Dans le chapitre 6 nous allons étudier le cas idéal où l'on néglige les contraintes visqueuses ($[\sigma'] = 0$). On a alors l'équation de la dynamique suivante :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g}}. \quad (4.4)$$

Cette équation est appelée équation d'Euler du nom du mathématicien suisse du XVIIIème siècle que l'a établie. Cette équation gouverne l'écoulement des fluides sans viscosité que l'on appelle *les fluides parfaits*.