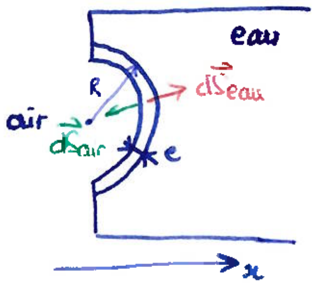
Hydrostatique et capillarité

Barrage voûte



$R \gg e$

$\rightarrow$ deux contributions à la résultante des forces de pression :
- forces de pression dues à l'air
- forces de pression dues à l'eau

$$\begin{cases} d\vec{S}_{eau} = R\,d\theta\,dz\,\vec{e_r} \\ d\vec{S}_{air} = -R\,d\theta\,dz\,\vec{e_r} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P_{eau} = P_0 + \rho g(h-z) \\ P_{air} = P_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{F} = -P_{eau}\,d\vec{S}_{eau} - P_{air}\,d\vec{S}_{air}$$

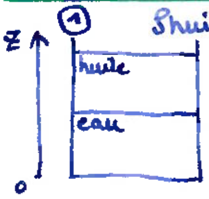
$$d\vec{F}\cdot\vec{e_x} = -P_{eau}\,d\vec{S}_{eau}\cdot\vec{e_x} - P_{air}\,d\vec{S}_{air}\cdot\vec{e_x}$$

$$dF_x = -(\cancel{P_0} + \rho g(h-z) - \cancel{P_0})\,R\,d\theta\,dz\cos\theta$$

$$F_x = -\int_0^h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho g(h-z)\,R\cos\theta\,d\theta\,dz$$

$$\boxed{F_x = -\rho g R h^2}$$

Bille de bois à l'interface eau-huile



1) $\rho_{huile} < \rho_{eau}$

2) Dans l'huile :

$$\frac{\partial p_h}{\partial z} = -\rho_h g \qquad P_h = P_0 \text{ en } z = h_h + h_e$$

$$P_h(z) = C_1 - \rho_h g z \qquad \text{et} \qquad P_0 = C_1 - \rho_h g(h_h + h_e)$$

$$C_1 = P_0 + \rho_h g(h_h + h_e)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_h(z) = P_0 + \rho_h g(h_h + h_e - z)}$$

Dans l'eau :

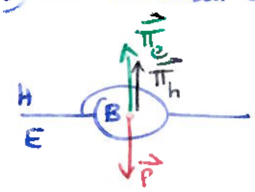
$$\frac{\partial P_e}{\partial z} = -\rho_e g \qquad \text{et} \qquad P_e(z = h_e) = P_h(z = h_e)$$

$$P_e(z) = C_2 - \rho_e g z \qquad C_2 - \rho_e g h_e = P_0 + \rho_h g h_h$$

$$C_2 = P_0 + g(\rho_h h_h + \rho_e h_e)$$

$$\boxed{P_e(z) = P_0 + \rho_h g h_h + \rho_e g(h_e - z)}$$

3) on introduit une bille de bois dans le système : $\rho_h < \rho_b < \rho_e$



$M_b = \rho_b V_b$ soit λ la fraction de la bille immergée dans l'eau.

L'équilibre des forces sur la bille donne :

$$M_b\vec{g} - \rho_e \lambda V_b \vec{g} - \rho_h(1-\lambda)V_b\vec{g} = \vec{0}$$

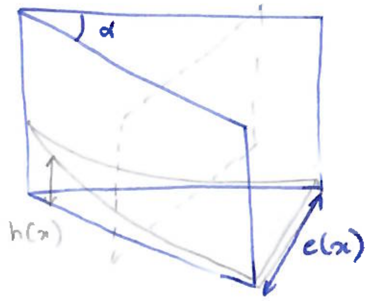
$$\Leftrightarrow -\rho_b + \rho_e\lambda + \rho_h(1-\lambda) = 0$$

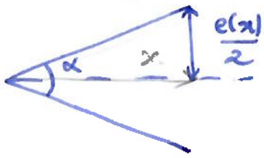
$$\Leftrightarrow \lambda(\rho_e - \rho_h) = \rho_b - \rho_h$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\rho_b - \rho_h}{\rho_e - \rho_h}} \qquad \lambda = \frac{3}{4}$$

Ascension capillaire dans un dièdre

soit un dièdre placé dans un récipient contenant un liquide de tension de surface γ.
soit $h(x)$ la hauteur de liquide le long du dièdre.





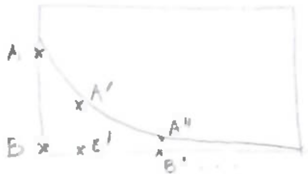
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{e}{2x}$$

$$e(x) = 2x\tan(\alpha/2)$$

loi de Laplace : $\Delta p = 2\frac{\gamma}{R}$ où R est le rayon de courbure

soit θ l'angle de mouillage du liquide sur la plaque.
$\cos\theta = \frac{e}{2R}$.

→ pour connaître la forme de la surface libre on calcule la différence de pression entre un point A sous le ménisque et un point B à la base du dièdre :



il pèse sur le point B une hauteur de liquide $h(x)$

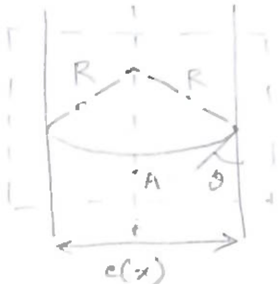
$\Rightarrow$ $P_A = P_0 - \rho g h(x)$ $\quad P_B = P_0$

$P_A - P_B = -\rho g h(x)$

On peut également connaître la pression en A sous le ménisque avec la loi de laplace
la différence de pression entre au dessus du ménisque et en dessous est donnée par : $\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$

$\Rightarrow$ $P_A = P_0 - \frac{2\gamma}{R}$

$P_A = P_0 - \frac{\gamma\cos\theta}{e(x)}$



$\frac{e(x)}{2R} = \cos\theta$

⚠ non mouillant $\theta = 0$

$\Rightarrow$ $P_0 - \rho g h(x) = P_0 - \frac{\gamma\cos\theta}{e(x)}$

$\rho g h(x) = \frac{\gamma\cos\theta}{e(x)}$

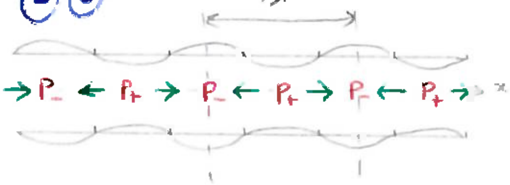
si $\alpha \gg 1$, poids $\gg$ tension de surface

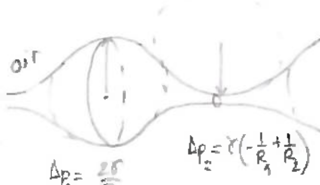
$$\boxed{h(x) = \frac{\gamma\cos\theta}{2\rho g\tan(\frac{\alpha}{2})}\frac{1}{x}}$$ hyperbole

Instabilité de Rayleigh-Plateau

1

2 **3**



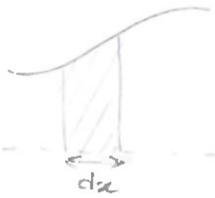


$\Delta p_1 > \Delta p_2$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

4 conservation de la masse / du volume :

$V_i = \pi R_0^2 \lambda$



$$V_p = \int_0^\lambda \pi (R_m + \varepsilon\cos(kx))^2\,dx$$

$$V_p = \pi \int_0^\lambda \left[R_m^2 + 2R_m\varepsilon\cos(kx) + \varepsilon^2\cos^2(kx)\right]dx$$

$$V_p = \pi \int_0^\lambda \left[R_m^2 + 2R_m\varepsilon\cos(kx) + \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon^2\cos(2kx)\right]dx$$

$$V_p = \pi\left[R_m^2 x + \frac{\varepsilon^2}{2}x + \frac{2R_m\varepsilon}{k}\sin(kx) + \frac{\varepsilon^2}{4k}\sin(2kx)\right]_0^\lambda$$

$$V_p = \pi\left[\left(R_m^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\lambda + 2R_m\frac{\varepsilon}{k}\sin(k\lambda) + \frac{\varepsilon^2}{4k}\sin(2k\lambda)\right] \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\boxed{V_p = \pi\left(R_m^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\lambda}$$

$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

et $V_i = V_p \Rightarrow \cancel{\pi} R_0^2 \cancel{\lambda} = \cancel{\pi}\left(R_m^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cancel{\lambda}$

$$R_m = \left(R_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2}$$

$\sin'(x) = \cos x$

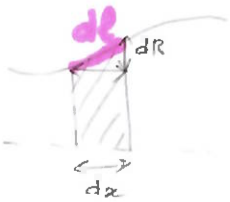
$\cos'(x) = -\sin(x)$

$$R_m = R_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2R_0^2}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{R_m \simeq R_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4R_0^2}\right)}$$

5 surface initiale : $S_0 = 2\pi R_0 \lambda$

surface perturbée : $S_p = 2\pi \int_0^\lambda R(x)\,dl$



$dl^2 = dx^2 + dR^2$

$dl = dx\left[1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$

$dl \simeq dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dx}\right)^2\right]$

$dl \simeq dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\varepsilon k\sin(kx)\right)^2\right]$

$dl = dx\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2k^2\sin^2(kx)\right]$

$$S_p = 2\pi\int_0^\lambda \left[R_m + \varepsilon\cos(kx)\right]dx\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2k^2\sin^2(kx)\right]$$

$$S_p = 2\pi\int_0^\lambda \left[R_m + \frac{R_m\varepsilon^2k^2}{2}\sin^2(kx) + \varepsilon\cos(kx) + \frac{\varepsilon^3k^2}{2}\sin^2(kx)\cos(kx)\right]dx$$

$$S_p = 2\pi\int_0^\lambda R_m + \frac{R_m\varepsilon^2k^2}{2}\left(\frac{1-\cos 2kx}{2}\right) + \varepsilon\cos(kx) + \frac{\varepsilon^3k^2}{2}\sin^2(kx)\cos(kx)\,dx$$

$$S_p = 2\pi\left[R_m x + \frac{R_m\varepsilon^2k^2}{4}x - \frac{R_m\varepsilon^2k^2}{8k}\sin(2kx) + \frac{\varepsilon}{k}\sin(kx) + \frac{\varepsilon^3k^2}{2k^3}\sin^3(kx)\right]_0^\lambda$$

$$S_p = 2\pi\left(R_m\lambda + \frac{R_m\varepsilon^2 4\pi^2\lambda}{4\lambda^2}\right)$$

$$\boxed{S_p = 2\pi R_m\lambda\left(1 + \frac{\varepsilon^2\pi^2}{\lambda^2}\right)}$$

$o(4) \ll 1$

$\Delta S = S_p - S_0$

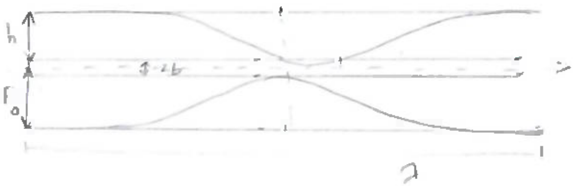
$$\Delta S = 2\pi R_m\lambda\left(1 + \frac{\varepsilon^2\pi^2}{\lambda^2}\right) - 2\pi R_0\lambda$$

$$\Delta S = 2\pi\lambda\left[R_m - R_0 + \frac{\varepsilon^2\pi^2 R_0}{\lambda^2}\right] \simeq 2\pi\lambda\left[\cancel{R_0} - R_0\frac{\varepsilon^2}{4R_0^2} - \cancel{R_0} + \frac{\varepsilon^2\pi^2}{\lambda^2}R_0 - \frac{\varepsilon^2}{4R_0^2}\frac{\pi^2\varepsilon^2}{\lambda^2}\right] \simeq \boxed{2\pi\lambda\varepsilon^2\left[\frac{R_0\pi^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4R_0}\right]}$$

$$\Delta S < 0 \Leftrightarrow \frac{R_0\pi^2}{\lambda^2} - \frac{1}{4R_0} < 0 \Rightarrow \lambda^2 > 4\pi^2R_0^2 \Rightarrow \boxed{\lambda > 2\pi R_0} \qquad \frac{\lambda}{R} \sim 2\pi$$

6

$h = R - b$



pression caractéristique dans le film :

$$p = \rho g R + \frac{\gamma}{R}$$

nombre de Bond $\quad B_o = \frac{\rho g}{\gamma} R^2$

compare la contribution hydrostatique à la contribution de Laplace.

$B_o \ll 1$ gravité négligeable devant les forces capillaires : soit R est petit (fibre très mince) soit γ grand

↳ le seul moteur de l'instabilité est γ

$$S_i = 2\pi r_0 \lambda$$

$$S_p = 2\pi \int_0^{\lambda} h(x) + b \; ds$$

$$S_p = 2\pi \int_0^{\lambda} \left[R_m + \varepsilon \cos(kx) + b\right] dx \left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 k^2 \sin^2(kx)\right]$$

$$S_p = 2\pi \int_0^{\lambda} \left[R_m + \frac{R_m}{2}\varepsilon^2 k^2 \underbrace{\sin^2(kx)}_{\frac{1-\cos 2kx}{2}} + \varepsilon\cos(kx) + \frac{\varepsilon^3 k^2}{2}\sin^2(kx)\cos(kx) + b + \frac{b\varepsilon^2 k^2}{2}\underbrace{\sin^2(kx)}_{\frac{1-\cos 2kx}{2}}\right] dx$$

$$S_p = 2\pi \left[R_m x + bx + \frac{R_m \varepsilon^2 k^2}{4} x + \frac{b\varepsilon^2 k^2}{4} x + 0 + 0 + 0 + 0\right]_0^{\lambda}$$

$$S_p = 2\pi \left[R_m \lambda + b\lambda + \frac{R_m \varepsilon^2 \cancel{4}\pi^2}{\cancel{4}\lambda^{\cancel{2}}}\cancel{\lambda} + b\frac{\varepsilon^2 \cancel{4}\pi^2}{\cancel{4}\lambda^{\cancel{2}}}\cancel{\lambda}\right]$$

$$S_p = 2\pi (R_m + b)\lambda \left[1 + \frac{\varepsilon^2 \pi^2}{\lambda^2}\right]$$

$S_p - S_o < 0 \iff \lambda > 2\pi R$

Le mécanisme d'instabilité est le même, l'ajout d'un filament change la vitesse de développement
→ plus lent avec le fil.

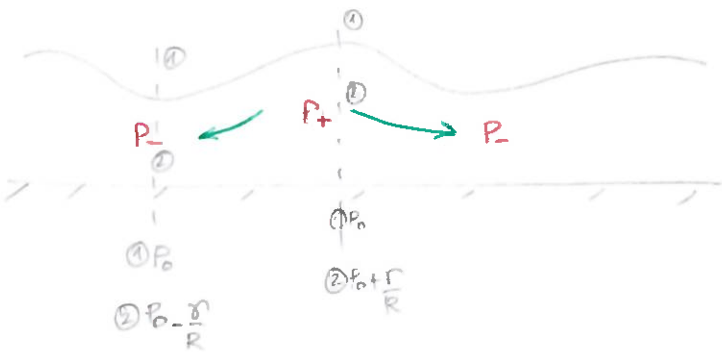
cela vient du fait que la pression s'écrit $\gamma \times$ courbure et dans le cas du fil, la courbure est non seulement celle de l'interface extérieure mais aussi de l'interface fibre/liquide.

$$C(x) = \frac{1}{b+h} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

7

$$\Delta p = \gamma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

Rayon de courbure infini dans le plan ⊥ à la feuille



ici la tension de surface a un effet stabilisant : le fluide quitte les bosses pour remplir les creux.