Introduction à l'optimisation

Programmation linéaire (continue)
Notes de cours

Dominique Quadri

Programmation mathématique

Qu’est-ce qu’un programme mathématique ?

- Expression d’un problème d’optimisation
  - Un ensemble de variables de décision
  - Une fonction « objectif » des variables de décision à minimiser ou maximiser
  - Un systèmes de contraintes sur les variables de décision

Programmation linéaire

Un programme linéaire est un cas particulier de programme mathématique

- Les variables de décision sont des réels
- La fonction objectif est linéaire
- Les contraintes sont linéaires

- Exemple :

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } 2x + 3y + z \\
\quad x + 4y + 2z \leq 10 \\
\quad 2x + 3y + z \leq 12 \\
\quad x \geq 0 \\
\quad y \geq 0 \\
\quad z \geq 0
\end{array}
$$

Intérêt : on connaît des algorithmes efficaces pour résoudre les programmes linéaires !

Un problème de production

Une usine fabrique deux produits P1 et P2, qui rapportent 1700 et 3200 euros par quantité produite.

Chaque produit demande pour son usinage des heures de fabrication unitaires sur les machines A, B, C, D, E

	A	B	C	D	E
P1	0	1h30	2h	3h	3h
P2	3h	4h	3h	2h	0

Chaque machine a une disponibilité totale sur une semaine de

A : 39h, B : 60h, C : 57h, D : 70h, E : 57h

Modélisation

Variables de décision

- x1 : quantité de P1 produite
- x2 : quantité de P2 produite

Fonction objectif :

- maximiser $f(x)=1700\ x_1 + 3200\ x_2$

Modélisation

maximiser $f(x)=1700\ x_1 + 3200\ x_2$

sous les contraintes :

$3\ x_2 \leq 39$ (machine A)

$1,5x_1 + 4\ x_2 \leq 60$ (machine B)

$2\ x_1 + 3\ x_2 \leq 57$ (machine C)

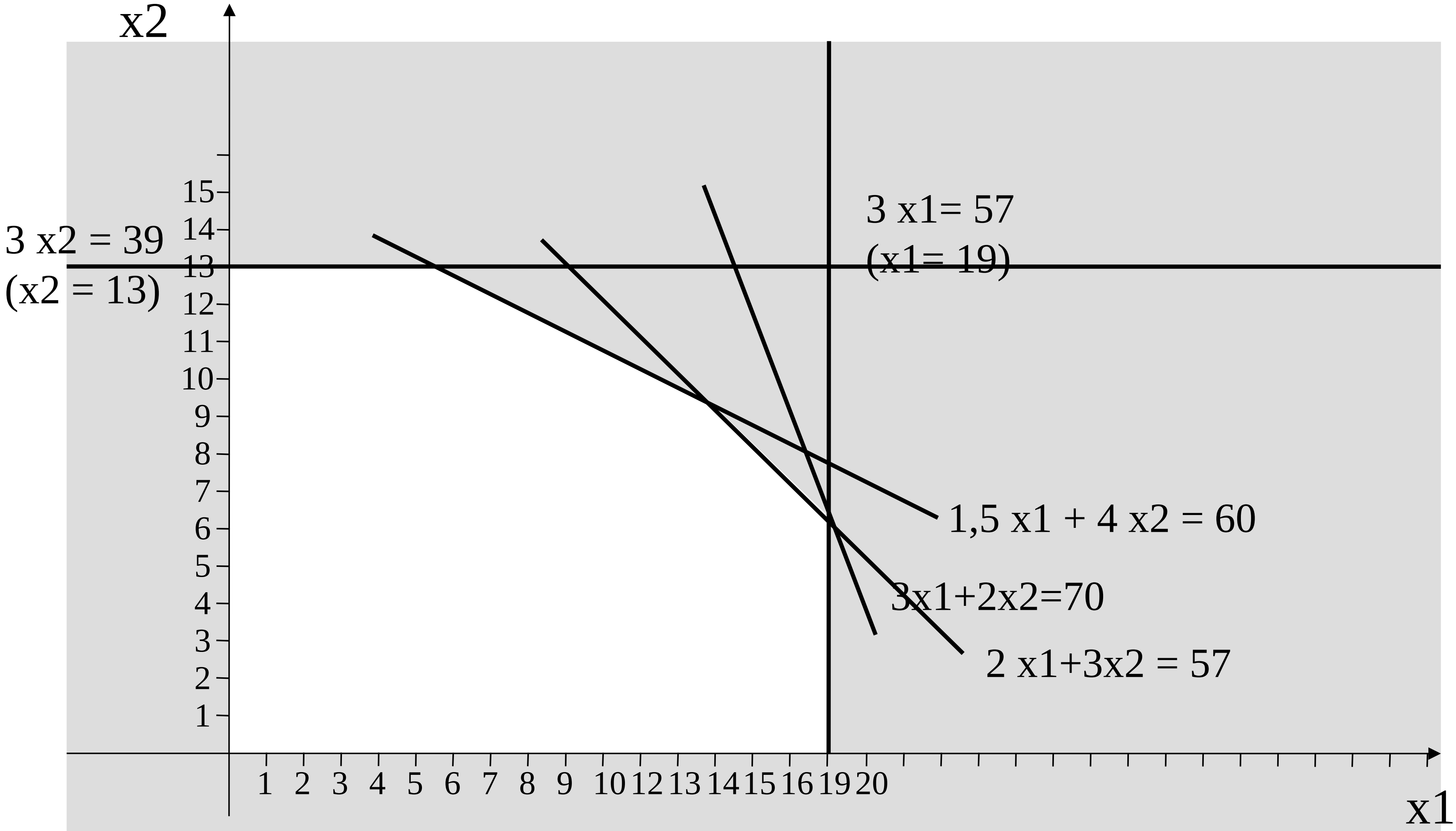
$3x_1 + 2\ x_2 \leq 70$ (machine D)

$3x_1 \leq 57$ (machine E)

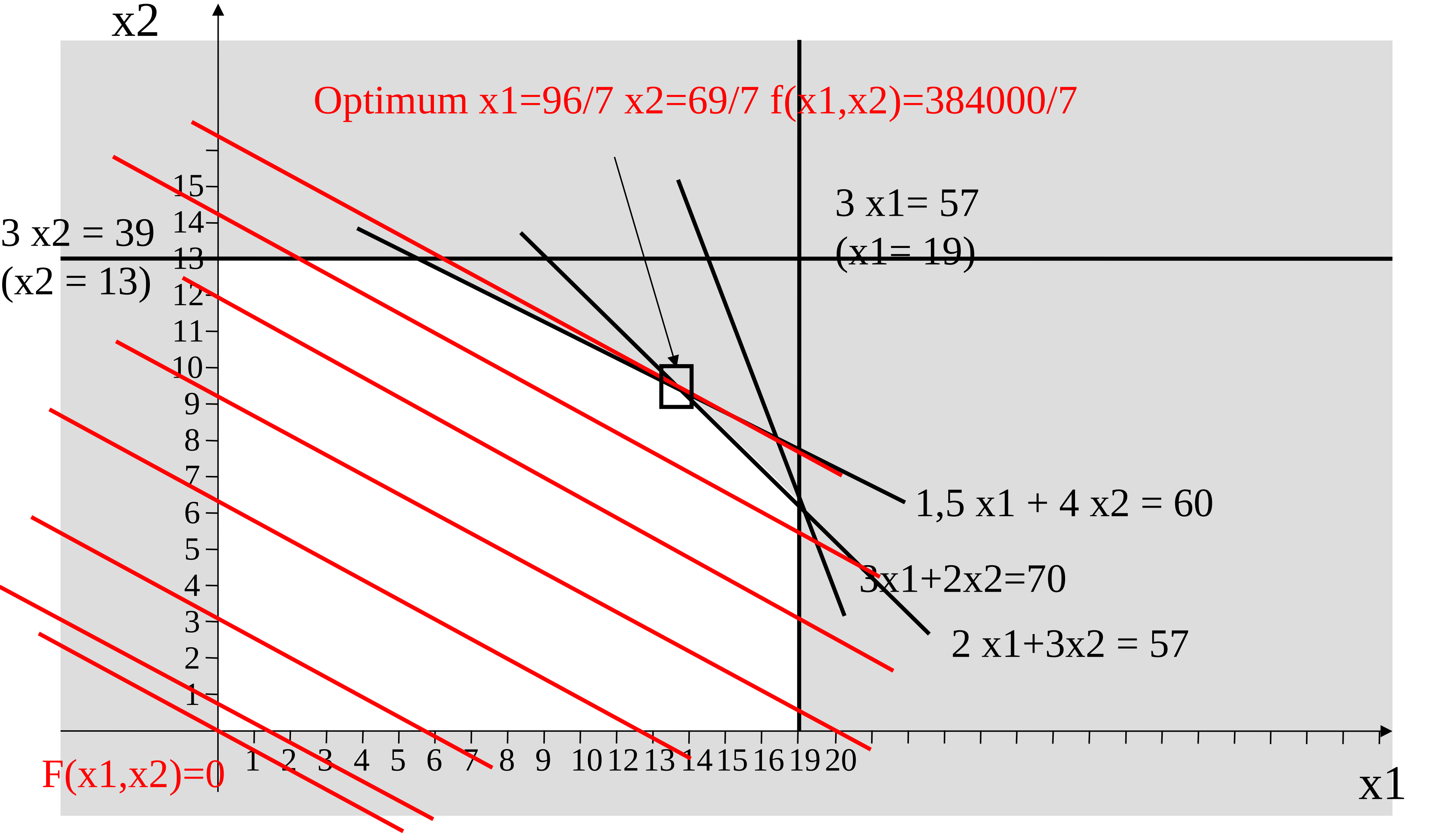
$x1 \geq 0$

$x2 \geq 0$

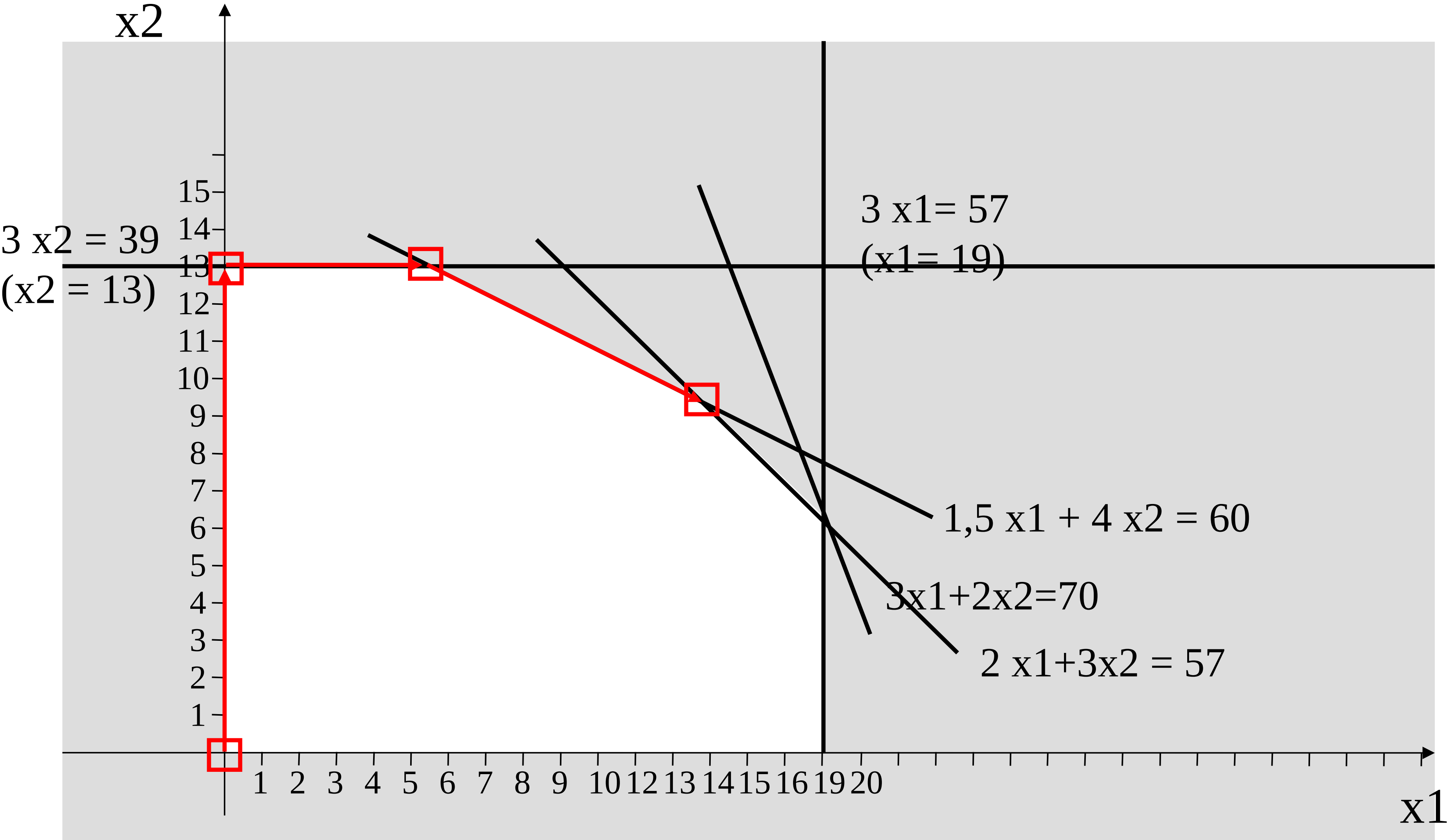
Représentation des solutions réalisables dans le plan



Résolution graphique



Aperçu de la résolution par la méthode du simplexe



Résolution par la méthode du simplexe

Formulation initiale :

$$(\mathrm{P}) \qquad \text{maximiser} \quad 1700x_1 + 3200x_2$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 & \leq & 39 \\ \frac{3}{2}x_1 + 4x_2 & \leq & 60 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 57 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 70 \\ 3x_1 & \leq & 57 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

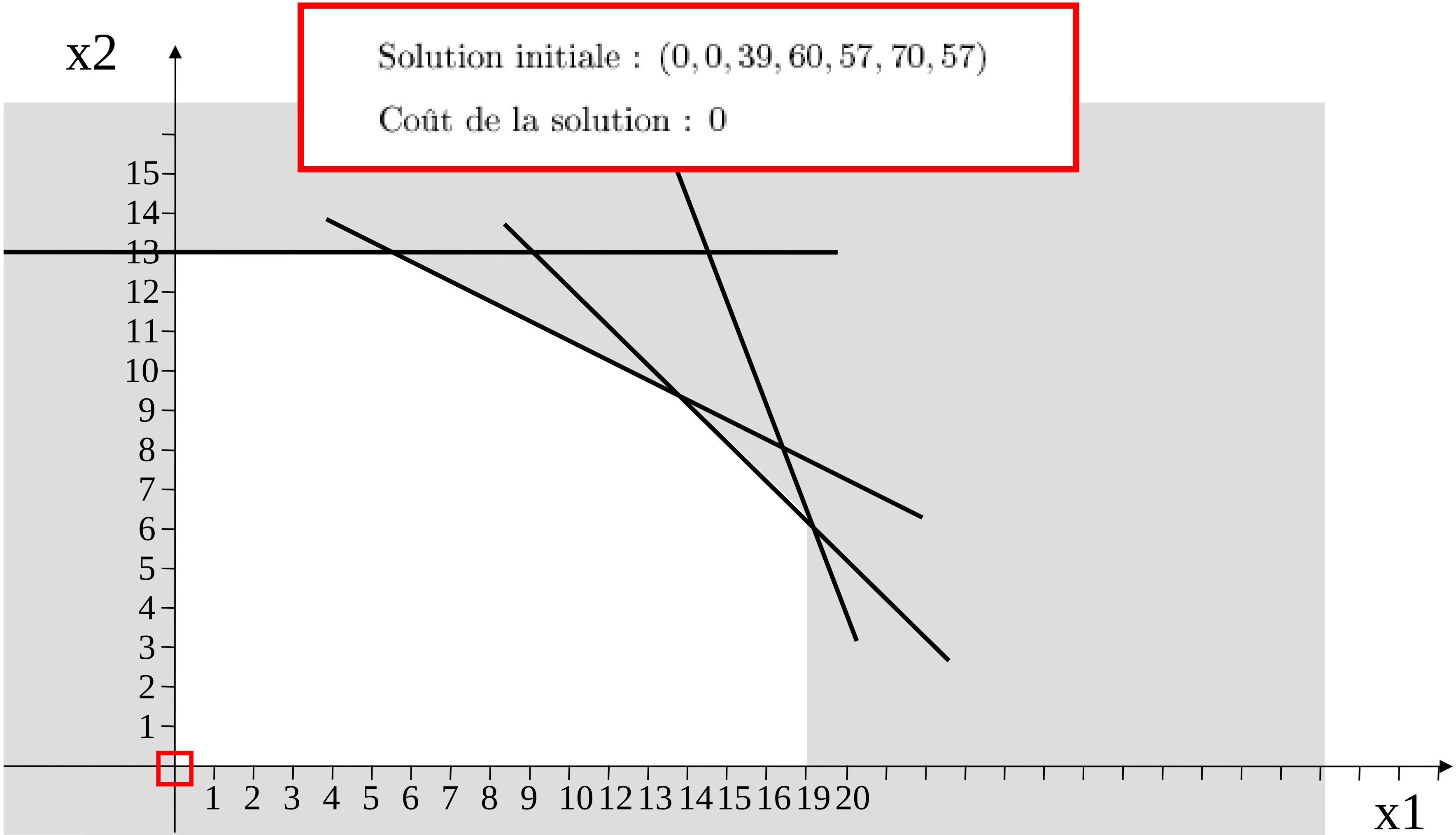
Résolution par la méthode du simplexe

Forme standard :

$$
\begin{array}{ll}
\text{(P)} & \text{maximiser} \quad 1700x_1 + 3200x_2 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
3x_2 + x_3 & = & 39 \\
\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 60 \\
2x_1 + 3x_2 + x_5 & = & 57 \\
3x_1 + 2x_2 + x_6 & = & 70 \\
3x_1 + x_7 & = & 57 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Résolution par la méthode du simplexe



Résolution par la méthode du simplexe

Forme standard : (P) maximiser $1700x_1 + 3200x_2$

$$
\begin{array}{rcl}
3x_2 + x_3 & = & 39 \\
\frac{3}{2}x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 60 \\
2x_1 + 3x_2 + x_5 & = & 57 \\
3x_1 + 2x_2 + x_6 & = & 70 \\
3x_1 + x_7 & = & 57 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Variable entrante x_2, variable sortante x_3

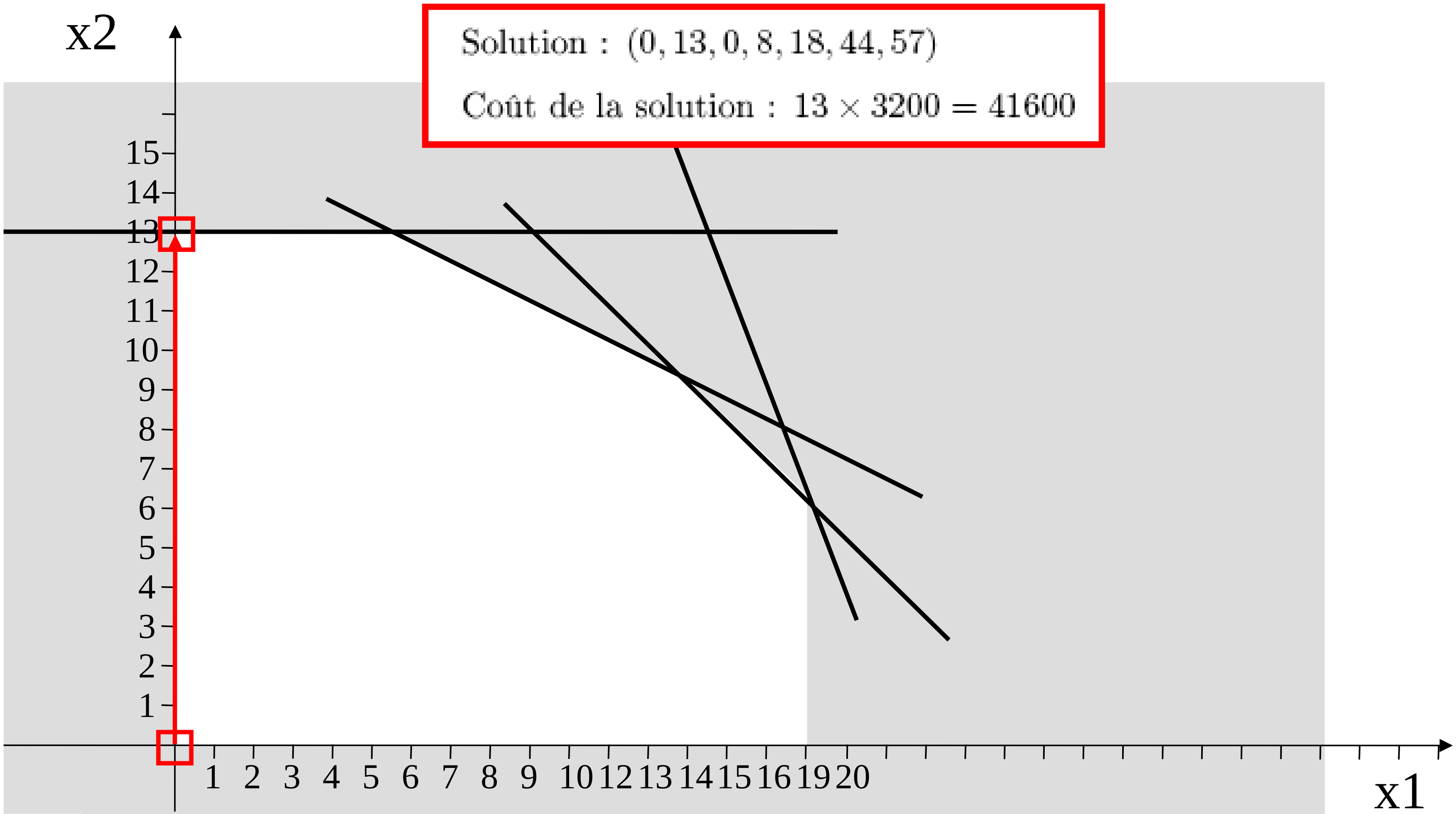
On pivote à partir de la contrainte $3x_2 + x_3 = 39$

Résolution par la méthode du simplexe

Après pivot n° 1 : (P) maximiser $13 \times 3200 + 1700x_1 - \frac{3200}{3}x_3$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x_3 + x_2 & = & 13 \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 & = & 8 \\ 2x_1 - x_3 + x_5 & = & 18 \\ 3x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_6 & = & 44 \\ 3x_1 + x_7 & = & 57 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Résolution par la méthode du simplexe



Résolution par la méthode du simplexe

Après pivot n° 1 : (P) maximiser $13 \times 3200 + 1700 x_1 - \frac{3200}{3} x_3$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{3} x_3 + x_2 & = & 13 \\
\frac{3}{2} x_1 - \frac{4}{3} x_3 + x_4 & = & 8 \\
2x_1 - x_3 + x_5 & = & 18 \\
3x_1 - \frac{2}{3} x_3 + x_6 & = & 44 \\
3x_1 + x_7 & = & 57 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Variable entrante x_1, variable sortante x_4

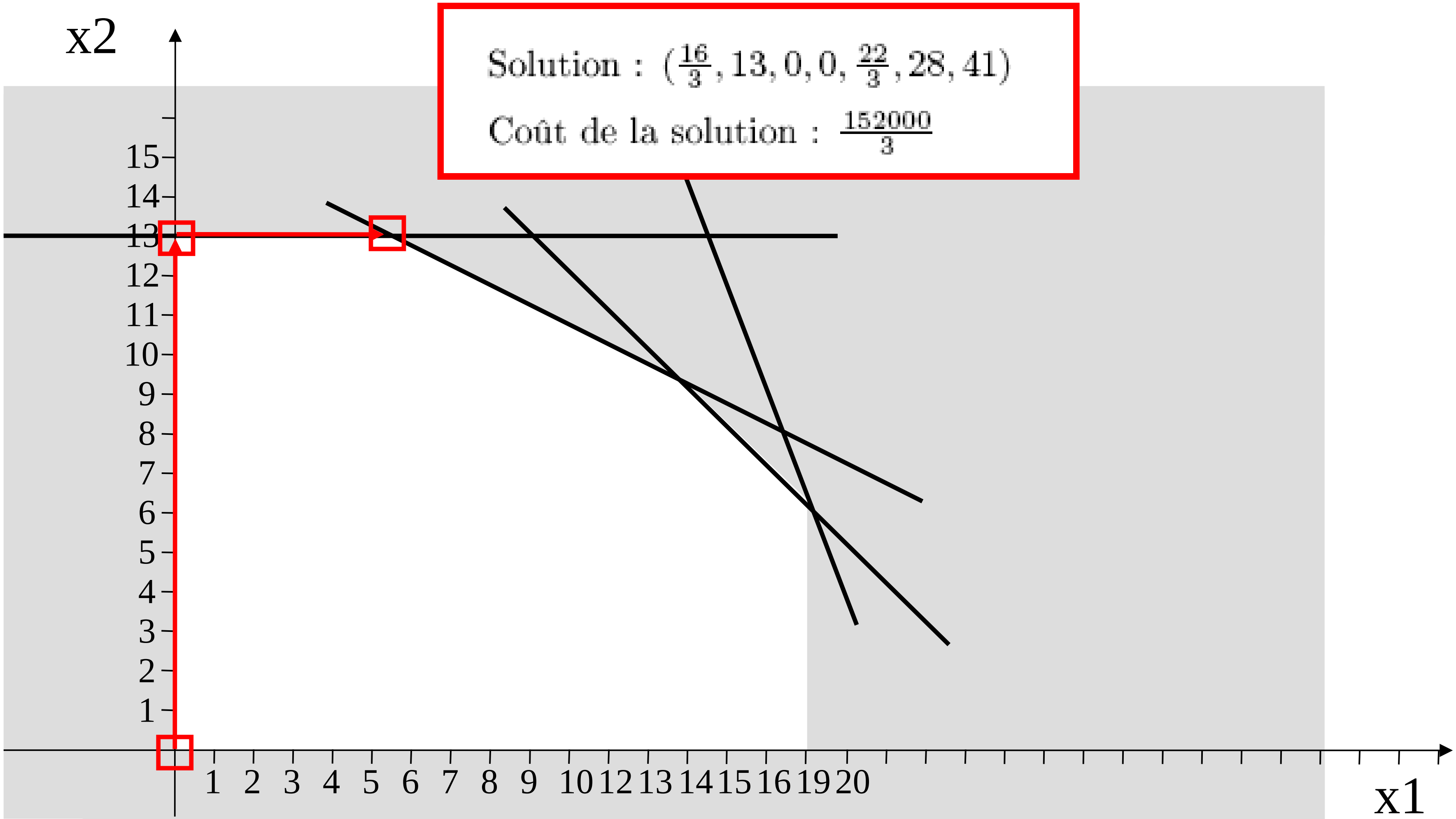
On pivote à partir de la contrainte $\frac{3}{2} x_1 - \frac{4}{3} x_3 + x_4 = 8$

Résolution par la méthode du simplexe

Après pivot n° 2 : $(\mathrm{P}) \quad \text{maximiser} \quad 13 \times 3200 + 1700 \times \frac{16}{3} + \frac{4000}{9} x_3 - \frac{3400}{3} x_4$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{3} x_3 + x_2 & = & 13 \\
-\frac{8}{9} x_3 + \frac{2}{3} x_4 + x_1 & = & \frac{16}{3} \\
\frac{7}{9} x_3 - \frac{4}{3} x_4 + x_5 & = & \frac{22}{3} \\
2 x_3 - 2 x_4 + x_6 & = & 28 \\
\frac{8}{3} x_3 - 2 x_4 + x_7 & = & 41 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Résolution par la méthode du simplexe



Résolution par la méthode du simplexe

Après pivot n° 2 : $(P) \quad \text{maximiser} \quad 13 \times 3200 + 1700 \times \frac{16}{3} + \frac{4000}{9} x_3 - \frac{3400}{3} x_4$

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{3} x_3 + x_2 & = & 13 \\
-\frac{8}{9} x_3 + \frac{2}{3} x_4 + x_1 & = & \frac{16}{3} \\
\frac{7}{9} x_3 - \frac{4}{3} x_4 + x_5 & = & \frac{22}{3} \\
2 x_3 - 2 x_4 + x_6 & = & 28 \\
\frac{8}{3} x_3 - 2 x_4 + x_7 & = & 41 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Variable entrante x_3, variable sortante x_5

On pivote à partir de la contrainte $\frac{7}{9} x_3 - \frac{4}{3} x_4 + x_5 = \frac{22}{3}$

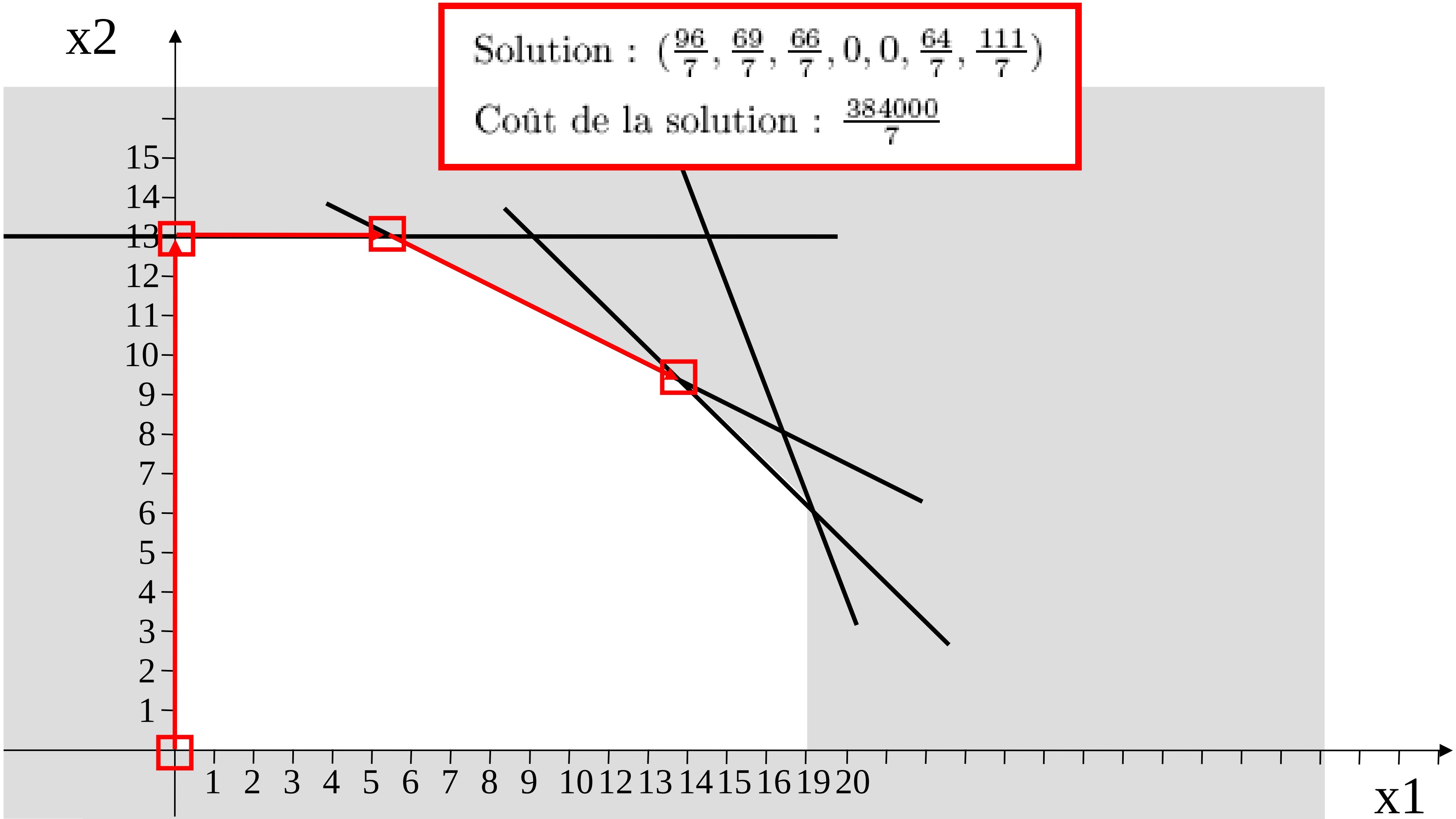
Résolution par la méthode du simplexe

Après pivot n° 3 :

$$(\mathrm{P}) \qquad \text{maximiser} \quad \frac{384000}{7} - \frac{2600}{7}x_4 - \frac{4000}{7}x_5$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{4}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + x_2 & = & \frac{69}{7} \\
\frac{6}{7}x_4 + \frac{8}{7}x_5 + x_1 & = & \frac{96}{7} \\
-\frac{12}{7}x_4 + \frac{9}{7}x_5 + x_3 & = & \frac{66}{7} \\
\frac{10}{7}x_4 - \frac{18}{7}x_5 + x_6 & = & \frac{64}{7} \\
\frac{18}{7}x_4 - \frac{27}{7}x_5 + x_7 & = & \frac{111}{7} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

Résolution par la méthode du simplexe



Résolution par la méthode du simplexe

Après pivot n° 3 : (P) maximiser $\frac{384000}{7} - \frac{2600}{7}x_4 - \frac{4000}{7}x_5$

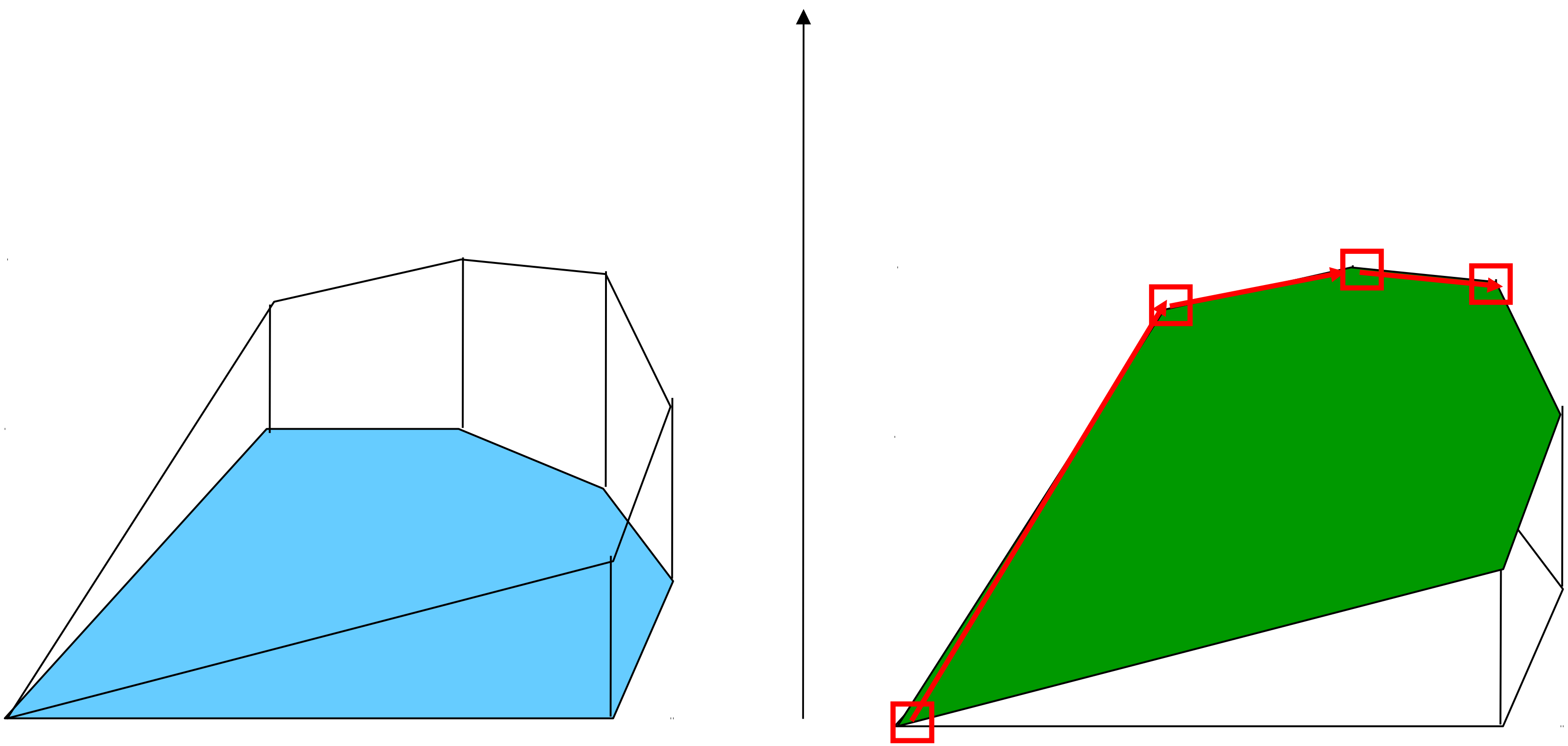
$$
\begin{array}{rcl}
\frac{4}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + x_2 & = & \frac{69}{7} \\
\frac{6}{7}x_4 + \frac{8}{7}x_5 + x_1 & = & \frac{96}{7} \\
-\frac{12}{7}x_4 + \frac{9}{7}x_5 + x_3 & = & \frac{66}{7} \\
\frac{10}{7}x_4 - \frac{18}{7}x_5 + x_6 & = & \frac{64}{7} \\
\frac{18}{7}x_4 - \frac{27}{7}x_5 + x_7 & = & \frac{111}{7} \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

La solution est optimale car :

- 384000/7 est une borne supérieure pour la fonction objectif
- la solution a un coût de 384000/7

Résolution par la méthode du simplexe

valeur de la fonction objectif



: Espace réalisable

Résolution par la méthode du simplexe

Principe de la méthode :

- 1- Présenter le problème sous forme standard
- 2- Déterminer une solution réalisable de départ
- 3- Tant qu’au moins une variable a un coût strictement positif dans la fonction objectif
  - 4- Choisir la variable entrante, parmi celles ayant un coût strictement positif dans la fonction objectif, par exemple celle ayant le coût le plus élevé
  - 5- Déterminer la variable sortante : c’est la première variable devenant nulle quand on augmente la variable entrante
  - 6- Effectuer le pivot
    - 7 - commencer par considérer la contrainte (unique) contenant la variable sortante et multiplier cette contrainte par un coefficient permettant d’obtenir un coefficient 1 pour la variable entrante
    - 8 - utiliser cette contrainte (multipliée par des coefficients adaptés) pour supprimer la variable entrante dans l’écriture des autres contraintes et dans l’écriture de la fonction objectif