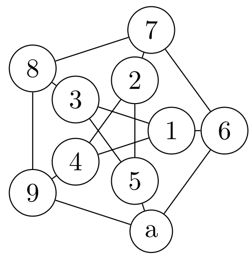
1 graphes bipartis et couplage

1. Le graphe 1 du précédent TD est il biparti ?

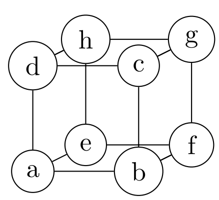


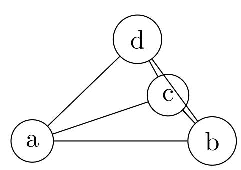
2. De manière générale, une ligne, un arbre, un cycle ou un graphe complet sont ils bipartis ? expliquer pourquoi ou caractérisez selon les cas et construisez un contre exemple simple.
3. Que dire d'un sous graphe d'un graphe biparti ? d'un super graphe d'un graphe biparti, d'une intersection, union, union sommet-disjointe de graphes bipartis ?
4. Inversement : Considérer l'ensemble des cycles simples d'un graphes. Que dire de cet ensemble si le graphe est biparti ? Que dire du graphe si le sous ensemble vérifie cette propriété

(+) En théorie des jeux, on utilise souvent de manière implicite une réduction aux cycle similaire : un jeu est, entre autre un graphe dont les arêtes sont étiqueté par des valeurs spécifiques, les différences d'utilités. Un jeu de potentiel est un jeu dans lequel la somme des valeur des arêtes sur tout cycle simple est 0. Que peux on dire d'un cycle non simple ?

(+) Soient deux sommets i et j dans un tel graphe, que dire de deux chemin de i vers j ?
Cette propriété permet d'étiqueter le graphe sur les sommets par cette somme cumulative, ce qui simplifie la représentation et l'analyse. Les valeurs aux sommets sont une fonction de potentiel du graphe.

5. Considérez deux graphes 3 réguliers : un cube et un tétraèdre





   (a) Pour chaque graphe, construire trois couplages parfait disjoints .
   (b) Que peut on dire des graphes obtenu en retirant les arêtes de l'un de ces couplages, de deux ou des trois ?
   \+ De manière générale , dans un graphe n-régulier, est t il toujours possible de partitionner les arêtes en n couplages parfaits disjoints ?

(a) Quelle condition un arbre dois vérifier pour admettre un couplage parfait ?
(b) Quelle est la forme d'un couplage maximum sur un arbre

6. Que pouvez vous dire d'une couverture par des sommet minimale, ou d'un ensemble indépendant maximal sur un graphe biparti ?

2 Chemins

1. Sur un graphe quelconque (pondéré ou non, connexe ou non, orienté ou non), on peut obtenir le plus cours chemin entre deux points par un parcours en largeur. existe il une solution aussi facile pour le plus long chemin simple ?
2. Considérez un graphe complet pondéré, remplacer pour chaque arête la valeur du poids par son opposé plus une constante suffisamment élevée pour que tous les poids soient strictement positifs, que dire du plus petit des plus longs chemins ?

3 Échecs

3.1 pièces lourdes

				+			
				+			
				+			
+	+	+	+	♜	+	+	+
				+			
				+			
				+			
				+			

			*				*
*			*			*	
	*		*		*		
		*	*	*			
*	*	*	♛	*	*	*	*
		*	*	*			
	*		*		*		
*			*			*	

Aux échecs, le plateau est une grille de 8 par 8. Les pièces lourdes sont les tours, qui se déplacent horizontalement ou verticalement sans limite de distance (tant qu'elles ne traversent pas une pièce), et les dames, qui se déplacent horizontalement, verticalement ou en diagonal sans limites.

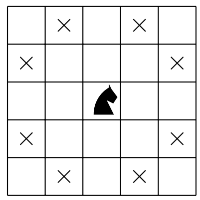
Un problème classique est de positionner suffisamment de tours ou de dames sur l'échiquier de manière à contrôler (être capable de rejoindre en un seul tour) toutes les cases du plateau, et/ou de sorte qu'aucune d'entre elle ne menace une autre.

1. Représenter le premier problème par une couverture par sommet de graphe et le second par un ensemble indépendant sur le graphe.
2. Dans le cas des tours, on peut exploiter les symétries pour représenter le problème cumulé par un graphe biparti sur les lignes et colonnes. Peut faire un équivalent pour les dames ?

Que devient le problème dans ce cas ? Quelle version est la plus facile à résoudre, surtout si on remplace le plateau de 8 par 8 par un plateau de taille arbitraire ?

3.2 Cavaliers

Un cavalier se déplace en L : deux cases dans une direction puis une case dans une direction orthogonale.



1. Quel est le nombre de cases accessible selon la position de départ ?
2. (a) Un problème classique est le cavalier eulerien, ou parcours du cavalier : parcourir toutes les cases d'un plateau de taille fixe en un chemin ou un circuit
   Considérer le plateau de taille 4. Arrivez vous à résoudre ce problème directement ?

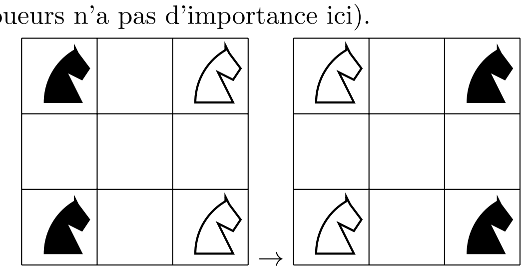
   (b) Une astuce lorsque l'on considère un graphe avec de nombreuse symétries est de réordonner et regrouper les sommets en factorisant les symmétries ou en explicitant les propriétés, pour se donner un peu de perspective et réduire la complexité. Grouper les sommets par degrés. est ce suffisant pour décrire le graphe ?

   (c) Redessiner le graphe comme étant 4 cycles de tailles 4, avec leur interconnections et en extraire un circuit eulérien.

   Deux pièces ne peuvent pas se superposer : dans une partie normale, une pièce peut prendre une pièce de l'équipe adverse, et le déplacement vers une case occupée par la même équipe est interdit. Dans les problèmes parcours, tout déplacement vers une case occupée avant que son occupant actuel ne la quitte est interdit.

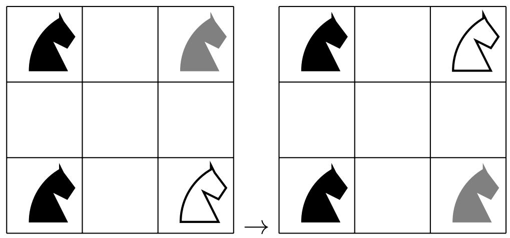
   On considère un plateau de 3 par 3, occupés par 4 cavaliers aux coins.

   Dans un premier temps, le but est d'échanger les deux cavaliers blancs avec les deux cavaliers noirs en un minimum de coups (l'ordre des joueurs n'a pas d'importance ici).



(a) En combien de mouvements arrivez vous à le faire ?

Dans un second temps, on souhaite intervertir deux cavaliers verticalement :



(b) Quel est votre meilleur résultat à la main ?

Nous allons transformer ce problème en un problème de graphe.

(c) Quel choix de sommet semble le plus logique : déplacement, état global ou position ? Que devient le problème ?

(d) Déplier le graphe, représentez le d'une manière ignorant l'origine échiquéenne, que pouvez vous en dire ?

(e) Conclure sur la solution optimale.

4 Digicode

Imaginez un digicode sans touche de validation : un appareil avec un clavier des différents numéros, qui s'ouvre lorsque les 6 dernière touches appuyées correspondent au code correct.

1. Quel serait une manière naïve de tester tous les codes, combien d'appuis de touches faut pour cette approche ?
2. Montrer que toute solution exhaustive utilise au moins $6^{1}0+5 = 60466181$ appuis.

   Nous allons modéliser ce problème à l'aide des graphes.
3. Que pensez vous des choix naturels comme sommets et arêtes ?

   Nous Prendrons comme sommets l'état des 5 dernières touches appuyées, et comme transitions étiquetées les triplets ($abcde \to bcdef, f$), qui oublient la touche la plus ancienne, et ajoutent en tête celle correspondant à l'étiquète.
4. Que pouvez vous dire du graphe ? (type de graphe et propriétés générale)
5. Quelles sont les deux manière d'interpréter les transitions et les chemins ?
6. Que devient le problème sur ce graphe ? savez vous le résoudre facilement ?
7. Conclure avec un algorithme atteignant la borne .