Corrigé TD 8

Exercice 1 – Isolateur Faraday

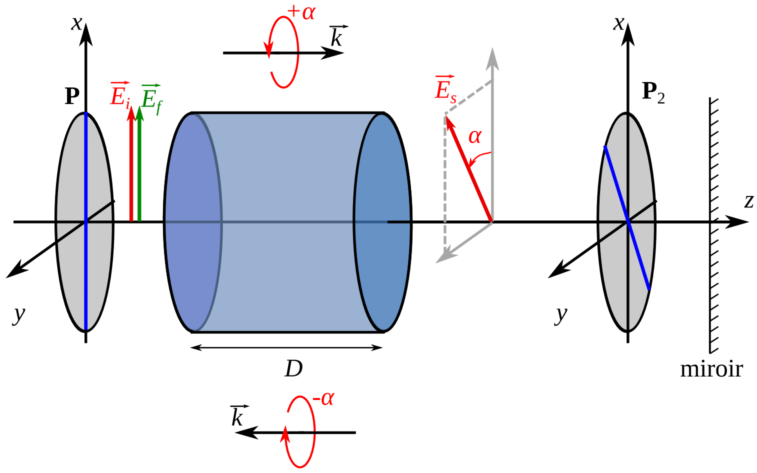


Figure 1: Activité optique dans une solution de saccharose.

1. Par définition, la propagation à travers une solution active de pouvoir rotatoire ρ, sur une distance D, par une onde polarisée rectilignement va introduire une rotation de la direction de polarisation de cette onde d'angle

$$\alpha = \rho D\,.$$

Après réflexion l'onde va de nouveau subir une rotation de sa direction de polarisation, mais d'un angle $\alpha_{\text{retour}} = -\alpha$. L'onde réfléchie à la sortie de la cuve (en vert sur la figure) a donc la même polarisation que l'onde originelle (en rouge). Elle est donc complètement transmise par le polariseur P. L'activité optique est un effet réciproque, et ne permet pas de réaliser un isolateur optique.

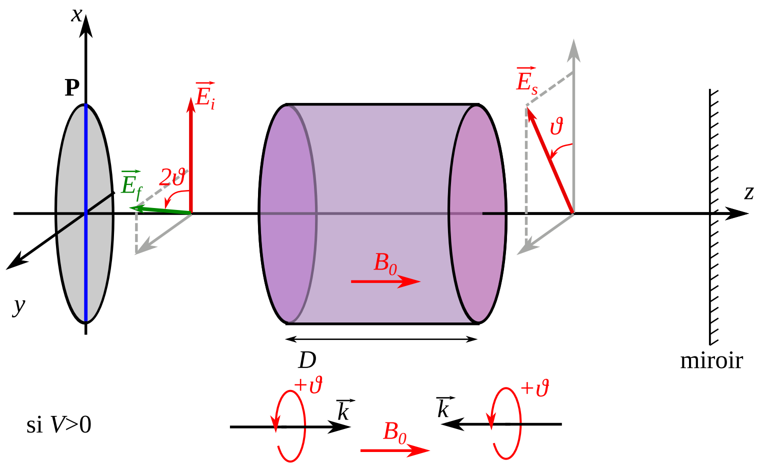


Figure 2: Effet Faraday. Attention, tous les angles sont représentés pour une constante de Verdet $V > 0$. $\vec{E}_i$ représente la polarisation de l'onde incidente, $\vec{E}_s$ celle de l'onde après passage dans le cristal, $\vec{E}_f$ celle de l'onde après réflexion sur le miroir et un aller-retour dans le cristal.

2. Dans la cas d'un milieu présentant de l'effet Faraday, de constante de Verdet V, et soumis à un champ magnétique B_0 selon l'axe de propagation de la lumière, la direction d'une

polarisation rectiligne tourne d'un angle $\theta = VBD$. Notons, que par convention, si $V > 0$, alors la polarisation d'une onde tourne vers la gauche pour un observateur qui regarde à la sortie du cristal (Cf. figure 2).

Dans le cas de l'effet Faraday, la polarisation de l'onde réfléchie subira la même rotation que l'onde aller. L'effet Faraday est un effet non-réciproque. Après un aller-retour dans le milieu la polarisation de l'onde a subi une rotation d'un angle $\theta_{\text{AR}} = 2B_0DV$.

L'onde sera donc bloquée par le polariseur si sa polarisation orthogonal à l'axe de celui-ci, soit $\theta_{\text{AR}} = \pm 90°$. On en déduit que le champ magnétique à appliquer vaut $B_0 = 1,047$ T.

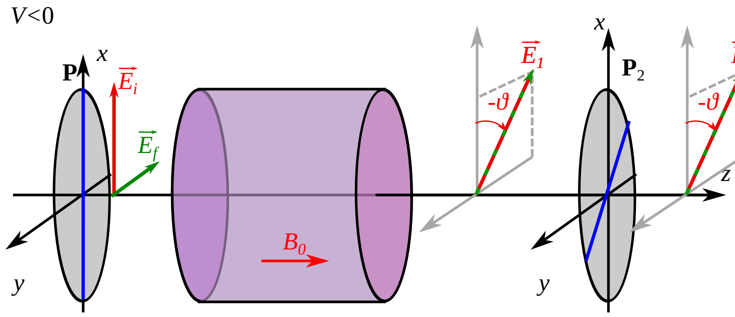


Figure 3: Isolateur optique Faraday. Sur le schéma $V < 0$. En rouge la polarisation de l'onde incidente, en vert la polarisation de l'onde réfléchie. L'épaisseur du cristal et le champ B_0 sont choisis pour obtenir $-\theta = -45°$.

3. Considérons un onde polarisée rectilignement telle qu'elle soit complètement transmise à travers le polariseur P ($\vec{E}_i$ sur la figure). À la sortie du cristal sa polarisation $\vec{E}_1$ aura tourné d'une angle $\theta = -45°$, et sera donc alignée avec l'axe du second polariseur P_2, qui la transmettra complètement ($\vec{E}_2$). Si cette onde est réfléchie, elle conserve sa direction de polarisation à 45° par rapport à l'axe x, et est donc transmise par le polariseur P_2. Dans le cristal de TGG, cette onde se propage dans la direction opposée au champ magnétique, et subit donc une rotation de sa direction de polarisation de $\theta = -45°$. À la sortie du cristal, elle est donc polarisée selon l'axe $-y$ ($\vec{E}_f$ sur la figure), orthogonal à la direction du polariseur P. Elle est complètement arrêtée par ce polariseur.

   Grâce à la non-réciprocité de l'effet Faraday il est donc possible de créer un isolateur qui permet de supprimer les réflexions sur un chemin optique. Notons que cette isolateur fonctionne même si la polarisation de la lumière est modifiée après l'isolateur, contrairement au système composé d'une lame quart d'onde proposé dans le TD précédent.

Exercice 2 – Spectre cannelé

1. Nous cherchons dans cette exercice à étudier la biréfringence circulaire du quartz, qui impose qu'une polarisation circulaire droite et une polarisation circulaire gauche, voit deux indices optiques différents n_D et n_G. Cette biréfringence circulaire va induire un pouvoir rotatoire que nous allons chercher à déterminer.

   Considérons une onde E_1 polarisée rectilignement selon l'axe du polariseur P_1 que l'on prendra selon l'axe x. Cette onde peut être décomposée en la superposition d'une onde circulaire gauche E_g et E_d, tel qu'a l'entrée de la lame de quartz ($z = 0$) on a

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \vec{E}_g + \vec{E}_d$$

.

   Les deux ondes circulaires, en raison de la différence d'indice vue, vont se propager à des vitesses différentes. Dans la lame de quartz on a donc

$$\vec{E}_g(z,t) = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - k_g z)},$$

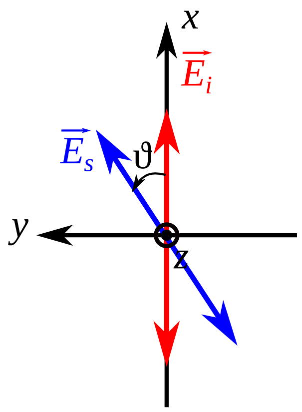
et
$$\vec{E}_d(z,t) = \frac{E_0}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{-i(\omega t - k_d z)}\,,$$

avec $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_G$, et $k_d = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_D$.

Si l'on s'intéresse au champ $\vec{E}_1$ à la sortie de la lame ($z=l$), on a

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1(z=l,t) &= \frac{E_0}{2}e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}e^{ik_g l}+e^{ik_d l}\\ i(e^{ik_g l}-e^{ik_d l})\end{pmatrix}\\
&= \frac{E_0}{2}e^{-i\omega t}e^{i\frac{k_d+k_g}{2}l}\begin{pmatrix}e^{i\frac{k_g-k_d}{2}l}+e^{i\frac{k_d-k_g}{2}l}\\ i(e^{i\frac{k_g-k_d}{2}l}-e^{i\frac{k_d-k_g}{2}l})\end{pmatrix}\\
&= \frac{E_0}{2}e^{-i\omega t}e^{i\frac{k_d+k_g}{2}l}\begin{pmatrix}2\cos(\frac{k_g-k_d}{2}l)\\ -2\sin(\frac{k_g-k_d}{2}l)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Au final:
$$\vec{E}_1(z=l,t) = \frac{E_0}{2}e^{-i\omega t}e^{i\frac{k_d+k_g}{2}l}\begin{pmatrix}2\cos(\frac{k_d-k_g}{2}l)\\ 2\sin(\frac{k_d-k_g}{2}l)\end{pmatrix} \tag{1}$$



Comme le met en évidence la figure ci-contre, cette polarisation correspond à une polarisation linéaire dont l'axe fait un angle
$$\theta = \frac{k_d-k_g}{2}l$$
par rapport à l'axe x (axe du polariseur P_1).
On en déduit le pouvoir rotatoire du quartz considéré
$$\rho = \frac{\theta}{l} = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_D-n_G) = 357 \text{ rad/m}\,.$$
D'après la figure, si $n_D - n_G > 0$, alors la polarisation tourne «vers la gauche». Ce quartz est donc **lévogyre**.

2. Pour que la lumière soit transmise sans atténuation par le polariseur P_2, il faut que la polarisation de l'onde à la sortie de la lame de quartz, soit selon l'axe du polariseur, i.e, $\theta = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

   On a donc $\frac{\pi}{\lambda_0}(n_D-n_G)\,l = \frac{\pi}{4}+p\pi$, avec p un entier.

   Les valeurs de l qui permettent de vérifier cette relation sont
   $$l_p = (4p+1)\frac{\lambda_0}{4(n_D-n_G)}\,.$$

   Finalement on trouve $e_0 = l_0 = \frac{\lambda_0}{4(n_D-n_G)} = 2,2$ mm.

3. La loi (phénoménologique) de Biot indique que $\rho \propto \frac{1}{\lambda^2}$. La rotation de polarisation observée à la sortie de la lame de quartz est d'autant plus faible que la longueur d'onde est grande.

   Une onde de longueur d'onde λ subira, à la traversé de la lame de quartz, une rotation de sa direction de polarisation d'un angle $\theta = \rho(\lambda)l = \theta_0\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2$, avec $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, la rotation d'une onde de longueur d'onde λ_0. La polarisation de cette onde fera donc un angle $\theta - \theta_0$ par rapport au polariseur P_2.

On en déduit que l'intensité transmise à travers le polariseur P_2 vaut $I = I_0 \cos^2(\theta - \theta_0)$, avec I_0 l'intensité de l'onde incidente.

Au final

$$I(\lambda) = I_0 \cos^2\left(\theta_0 \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 - 1\right]\right)$$

4. On déduit de la formule précédente que cette intensité va s'annuler pour certaines valeurs de λ. Le spectre de la lumière transmise va donc présenter des "trous", c'est ce que l'on va appeler les cannelures noires.

   Ces cannelures correspondent aux valeurs de λ vérifiant $\lambda_c^p = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{4p+3}}$ avec p un entier.

   On en déduit que la cannelure noire la plus proche de λ_0 correspond au cas $p = 0$, à la longueur d'onde $\lambda_c^0 = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{3}} = 365$ nm.

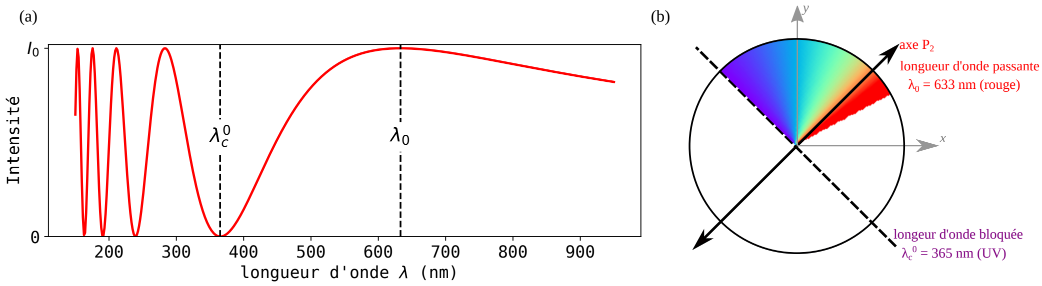


Figure 4: (a) Spectre transmis à travers la lame de quartz, mettant en évidence la présence de cannelures (extinction de certaines longueurs d'onde). (b) Représentation schématique de la rotation de polarisation pour chaque longueur d'onde à travers la lame de quartz. Le polariseur P_2 sélectionne la longueur d'onde λ_0 et bloque complètement la longueur d'onde 365 nm dans l'UV.