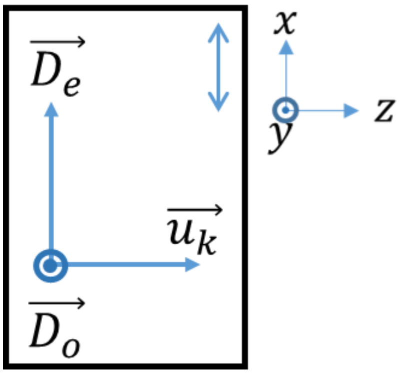
Corrigé du TD7

Exercice 1 : Diode optique



1) Axe optique = (Ox)
Les deux axes neutres de la lame pour une onde incidente selon la normale sont l'axe (Ox), qui correspond à l'axe optique, pour la composante extraordinaire et l'axe (Oy) pour la composante ordinaire. La composante extraordinaire étant orientée selon l'axe optique verra l'indice n_e dans la lame et la composante ordinaire verra l'indice n_o.
Déphasage introduit par la lame d'épaisseur d : $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$.

Une polarisation linéaire en entrée implique un déphasage nul $(modulo\, \pi)$ entre les deux composantes avant la lame. Pour que la polarisation soit linéaire également en sortie de lame il faut que le déphasage $\Delta\varphi$ introduit par la lame soit nul $(modulo\, \pi)$:

$$\mathrm{d} = \mathrm{p} \times \left|\frac{\lambda}{2(n_o - n_e)}\right| \; où\, p \in \mathbb{N}^*$$

Polarisation linéaire faisant un angle α avec l'axe (Ox).

En entrée de lame : $\vec{u} = \begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{pmatrix}$

En sortie de lame : $\vec{u} = \begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \times e^{i\Delta\varphi} \end{pmatrix}\; avec\; \Delta\varphi = p\pi$

- Cas 1 (lame d'onde): $\Delta\varphi = 0\; |2\pi|$, la polarisation fait un angle α avec l'axe (Ox). L'onde sort de la lame dans la même direction de polarisation
- Cas 2 (lame demi-onde) : $\Delta\varphi = \pi\; |2\pi|$. $\vec{u} = \begin{pmatrix} cos\alpha \\ -sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$. La polarisation est linéaire et fait un angle $-\alpha$ par rapport à l'axe (Ox). Elle est dans la direction symétrique par rapport aux axes neutres de la direction de polarisation en entrée de lame. La direction de polarisation a tourné d'un angle 2α.

2) La traversée d'une lame demi-onde induit un déphasage de $\pi\,|2\pi|$ entre les deux composantes orientées selon les axes neutres. La réflexion en incidence normale n'introduit aucun déphasage entre ces deux composantes, la second traversée rajoute un déphasage $\pi\; |2\pi|$, soit au total $2\pi(2\pi)$. L'onde ressort dans la même direction de polarisation qu'à l'aller.

3) Polarisation linéaire en entrée de lame $\lambda/_4$. Cette lame introduit un déphasage de $\frac{\pi}{2}\; |2\pi|$ entre l'axe rapide et l'axe lent. Pour que l'état de polarisation soit circulaire en sortie, il faut que l'onde soit polarisée linéairement à 45° des deux axes neutres en entrée de lame.

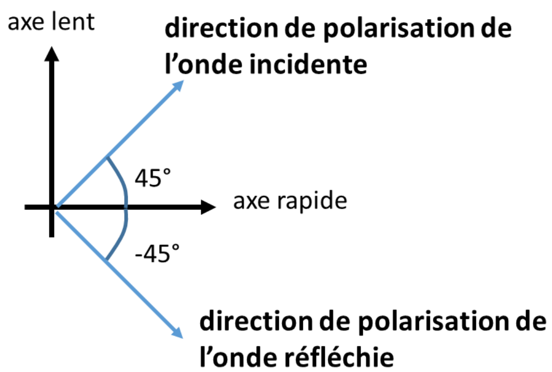
- Vecteur de Jones en entrée de lame : $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/_2 \\ \sqrt{2}/_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} axe\ rapide \\ axe\ lent \end{pmatrix}$

- Vecteur de Jones en sortie de lame : $\vec{u} = \sqrt{2}/_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$: polarisation circulaire gauche

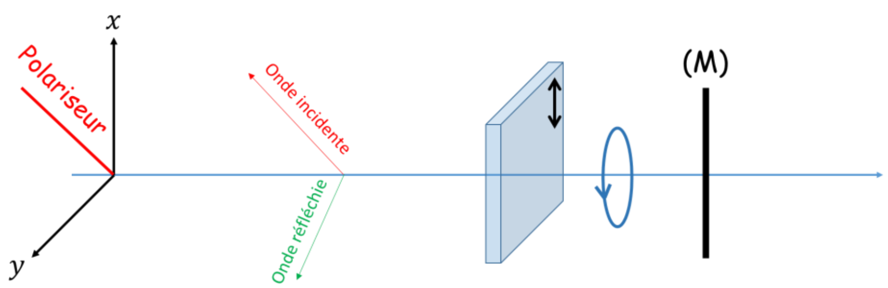
Remarque : un angle de -45° en entrée de lame donnerait une polarisation circulaire droite en sortie de lame.

La réflexion en incidence normale sur le miroir ne rajoute pas de déphasage entre les deux composantes. Par contre le sens conventionnel de rotation de la polarisation change après la réflexion. Pour un observateur qui voit l'onde arriver vers lui, une onde incidente sur le miroir polarisée circulaire droite est renvoyée polarisée circulaire gauche et réciproquement. Ce changement de sens de rotation est lié à la position de l'observateur mais pas à un déphasage supplémentaire introduit lors de la réflexion normale.

La deuxième traversée à travers la lame rajoute un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ $|2\pi|$. Au final les deux composantes de l'onde réfléchie sont déphasées de π $|2\pi|$. Avec l'aller-retour, cette lame se comporte comme une lame $\lambda/_2$. La polarisation après le deuxième passage est donc linéaire et fait un angle de -45° par rapport à l'axe rapide (symétrique de la direction incidente par rapport à l'axe rapide).



Si on place un polariseur orienté à 45° avant la lame, la direction de polarisation de l'onde réfléchie est orientée 90° de la direction passante du polariseur. Elle est donc bloquée. On obtient ainsi un système anti-reflet (figure ci-dessous).



<u>Exercice 2 : polarisation de la lumière dans une cavité – Ondes hélicoïdales stationnaires</u>

Vecteurs et matrices de Jones

1) Polarisation linéaire faisant un angle α avec l'axe (Ox) : $\vec{u} = \begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \end{pmatrix}$

Polarisation circulaire droite : $\vec{u} = \sqrt{2}/_{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Polarisation circulaire gauche : $\vec{u} = \sqrt{2}/_{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}$

3) Lame de phase introduisant un retard $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n'' - n')d$. On note n' l'indice vue par la composante rapide et n'' l'indice vue par la composante lente. L'axe rapide est orienté selon (Ox).

$$\mathcal{M}(\varphi, 0) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}n'd} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

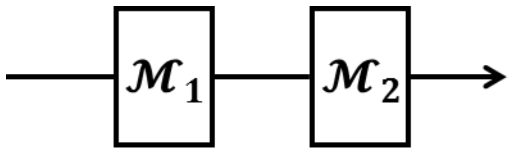
4) Lame de phase introduisant un déphasage φ et son axe rapide fait un angle θ avec l'axe (Ox)

$$\mathcal{M}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \times \mathcal{M}(\varphi, 0) \times R(-\theta)$$

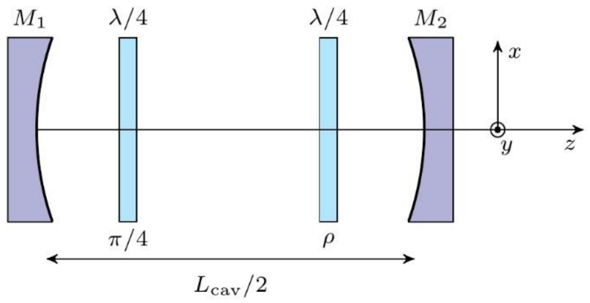
5) $\mathcal{M}\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) = \begin{pmatrix} cos^2\theta + isin^2\theta & (1-i)sin\theta cos\theta \\ (1-i)sin\theta cos\theta & sin^2\theta + icos^2\theta \end{pmatrix}$

6) $\mathcal{M}(\varphi = \pi, \theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos2\theta & sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{pmatrix}$

7) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_1$



Cavité à ondes hélicoïdales



1) L'axe rapide de la première lame $\frac{\lambda}{4}$ (L1) fait un angle $\pi/_4$ avec l'axe (Ox), celui de la seconde (L2) fait un angle ρ avec l'axe (Ox). On note $\mathcal{M}_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ la matrice de Jones associée à la première lame $\frac{\lambda}{4}$ et $\mathcal{M}_2\left(\frac{\pi}{2},\rho\right)$ celle de la seconde.

La matrice de Jones pour un aller-retour est :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\times\mathcal{M}_2\left(\frac{\pi}{2},\rho\right)\times\mathcal{M}_2\left(\frac{\pi}{2},\rho\right)\times\mathcal{M}_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \mathcal{M}_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\times\mathcal{M}_2(\pi,\rho)\times\mathcal{M}_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Avec $\mathcal{M}_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2}\\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}_2(\pi,\rho)=\begin{pmatrix}cos2\rho & sin2\rho\\ sin2\rho & -cos2\rho\end{pmatrix}$

Finalement : $\mathcal{M}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}2cos2\rho-2isin2\rho & 0\\ 0 & -2cos2\rho-2isin2\rho\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}e^{-2i\rho} & 0\\ 0 & -e^{2i\rho}\end{pmatrix}$

2) La matrice $\mathcal{M}$ est diagonale dans le repère (Oxy). Les vecteurs propres sont les états de polarisation $\overrightarrow{u_x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_y}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ avec comme valeur propres respectives: $\lambda_x=ie^{-2i\rho}$ et $\lambda_y=-ie^{2i\rho}$.

L'aller-retour à travers les deux lames pour le mode $\overrightarrow{u_x}$ induit un déphasage $\varphi_x=\frac{\pi}{2}-2\rho$ et pour le mode $\overrightarrow{u_y}$ un déphasage $\varphi_y=-\frac{\pi}{2}+2\rho$.

Pour le mode $\overrightarrow{u_x}$ la différence de phase après un aller-retour dans la cavité de longueur $\frac{L_{cav}}{2}$ vaut :

$\Delta\varphi=\frac{\omega}{c}L_{cav}+\frac{\pi}{2}-2\rho=2n\pi$ où $n\in\mathbb{N}$ à la résonance.

Les fréquences du mode $\overrightarrow{u_x}$ sont : $\nu_{nx}=\frac{C}{L_{cav}}\left(n-\frac{1}{4}+\frac{\rho}{\pi}\right)$

Pour le mode $\overrightarrow{u_y}$: $\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} L_{cav} - \frac{\pi}{2} + 2\rho = 2n\pi$ où $n \in \mathbb{N}$

Les fréquences du mode selon (Oy) sont : $\nu_{ny} = \frac{C}{L_{cav}}\left(n + \frac{1}{4} - \frac{\rho}{\pi}\right)$

Remarques :

- *Dans la matrice de Jones des lames $\frac{\lambda}{4}$ de la question 3), seul le déphasage $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n'' - n')d$ a été gardé. Le terme $\frac{2\pi}{\lambda} \times n' \times d$ a été enlevé pour ne tenir compte que du déphasage entre les deux composantes de polarisation. En fait ce terme $\frac{2\pi}{\lambda} \times n' \times d$ modifie la phase de l'onde à chaque passage et doit évidemment être pris en compte. Il est caché dans le paramètre Lcav qui représente la longueur de la cavité pour un aller-retour et qui tient compte de tous les éléments optiques présents dans la cavité.*
- *Le déphasage d'une lame de phase ($\frac{\pi}{2}$ dans le cas d'une lame $\frac{\lambda}{4}$) dépend de la longueur d'onde du champ qui traverse cette lame. Les expressions des fréquences de résonances calculées dans cet exercice n'ont de sens qu'au voisinage de la longueur d'onde pour laquelle les lames de phases sont exactement des lames $\frac{\lambda}{4}$. A des fréquences trop éloignées, le déphasage introduit par L1 et de L2 ne sera plus égal à $\frac{\pi}{2}$. Toutefois, dans le cas des cavités lasers où ce genre d'onde est utilisé, les fréquences possibles sont limitées autour d'une valeur centrale par la largeur spectrale du milieu amplificateur. L'approximation que nous avons faites de considérer le déphasage égal à $\frac{\pi}{2}$ pour tous les modes est en pratique correct.*

3) Pour chacun des deux modes, la polarisation est linéaire entre le miroir M1 et la première lame L1 selon (Ox) ou (Oy) respectivement pour les modes $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. Il suffit de placer un polariseur orienté selon (Ox) ou (Oy) pour sélectionner l'un ou l'autre mode.

4) Mode x avant L1 : $\overrightarrow{u_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $\overrightarrow{u^+}$ le vecteur de Jones associé à l'onde qui se propage dans le sens des Z croissants entre L1 et L2.

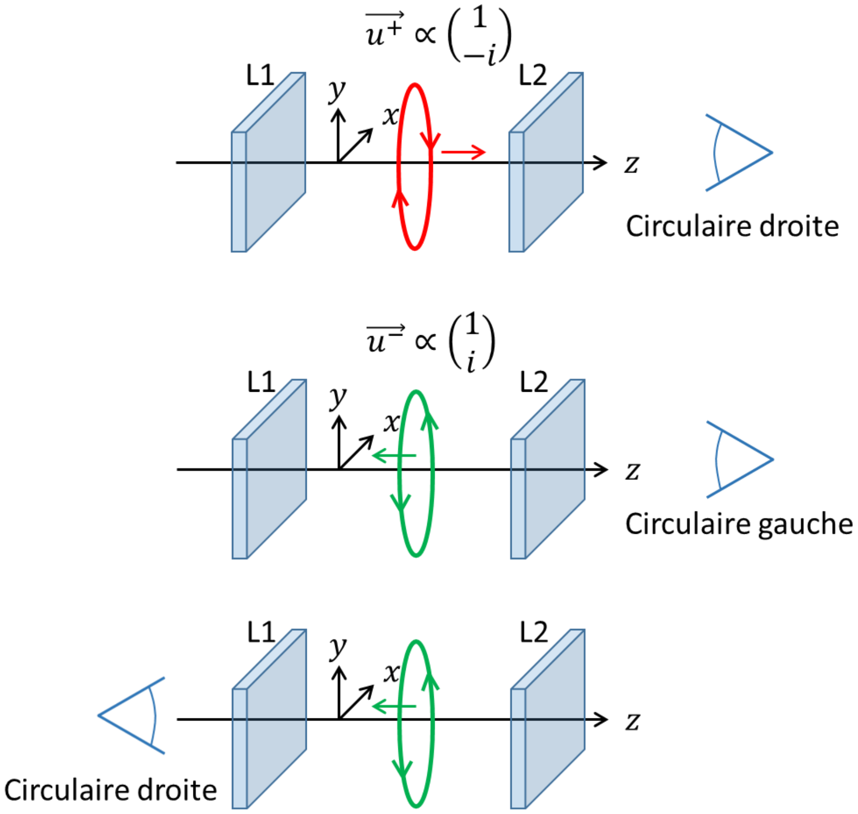
Après la lame L1 : $\overrightarrow{u^+} = \mathcal{M}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. L'onde est polarisée circulaire droite.

5) On note $\overrightarrow{u^-}$ le vecteur de Jones pour l'onde qui se propage dans le sens des z décroissants entre L1 et L2.

$\overrightarrow{u^-} = \mathcal{M}(\pi, \rho) \times \overrightarrow{u^+}$ où $\mathcal{M}(\pi, \rho)$ correspond à la matrice de Jones pour l'aller-retour dans la lame L2.

$$\overrightarrow{u^-} = \begin{pmatrix} cos2\rho & sin2\rho \\ sin2\rho & -cos2\rho \end{pmatrix} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-2\rho)}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Sens conventionelles de polarisation entre L1 et L2 pour le mode x en fonction de la position de l'observateur pour les mêmes axe x, y, z :



6) Champ se propageant selon le sens des z croissants entre L1 et L2 :

$$\overrightarrow{E^+} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - kz)} + cc$$

Champ se propageant selon le sens des z décroissants entre L1 et L2 :

$$\overrightarrow{E^-} = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-2\rho)}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i(\omega t + kz)} + cc$$

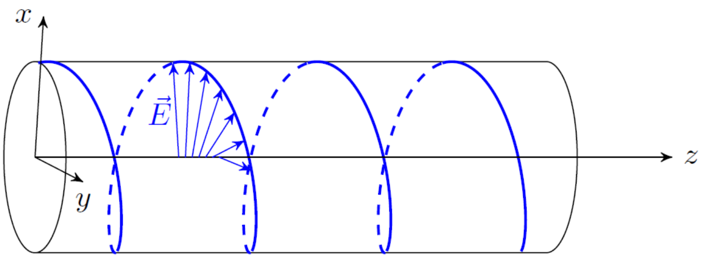
Les deux champs sont pris de même amplitude et l'amplitude est prise égale à 1 (seule la phase compte pour la description des modes de la cavité).

Le champ total entre les deux lames L1 et L2 s'écrit : $\overrightarrow{E_{tot}} = \overrightarrow{E^+} + \overrightarrow{E^-}$

$$\overrightarrow{E_{tot}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{-i(\omega t-kz)} + \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-2\rho)}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-i(\omega t+kz)} + cc$$

$$\overrightarrow{E_{tot}} = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + \rho - \frac{\pi}{4})\begin{pmatrix}\cos(kz+\rho)\\ \sin(kz+\rho)\end{pmatrix}$$

Cette équation décrit une onde hélicoïdale stationnaire.



7) Le champ $\overrightarrow{E^+}$ incident sur la lame quart d'onde L2 est polarisé circulairement. Après traversé de cette lame quart d'onde, ce champ est polarisé linéairement à 45° des axes neutres de la lame.