

TD 1 : Corrigé

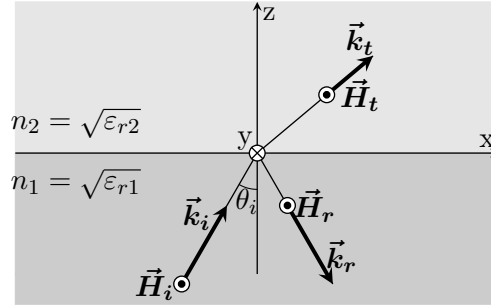


FIGURE 1 – Réflexion et transmission d’une onde plane à l’interface entre deux diélectriques, polarisation “TM” ou “p”

1 Relations de passage, coefficients de Fresnel

Milieux :

- linéaires, homogènes, isotropes : $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$
- non-magnétiques : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
- non-dispersifs : ϵ_r indépendant de ω
- non-dissipatifs : $\epsilon_r \in \mathbb{R}$ (\vec{D} et \vec{E} sont en phase)

1. Éq. Maxwell-Ampère : $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ($\vec{j}_{\text{libre}} = \vec{0}$)

$i \vec{k}_\alpha \wedge (-\mathcal{H}_{0\alpha} \vec{u}_y) e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. = \epsilon_0 \epsilon_{r\alpha} \frac{\partial \vec{E}_\alpha}{\partial t}$. En intégrant par rapport au t , on obtient :

$$\vec{E}_\alpha(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{0\alpha} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{E}}_{0\alpha} = \frac{\vec{k}_\alpha \wedge \vec{u}_y}{\epsilon_0 \epsilon_{r\alpha} \omega} \mathcal{H}_{0\alpha} \quad (1)$$

2. Conditions de passage à l’interface $z = 0$:

$$\vec{u}_{12} \wedge [\vec{E}_2(x, y, z = 0, t) - \vec{E}_1(x, y, z = 0, t)] = \vec{0} \quad (2)$$

$$\vec{u}_{12} \wedge [\vec{H}_2(x, y, z = 0, t) - \vec{H}_1(x, y, z = 0, t)] = \vec{j}_{\sigma, \text{libre}} = \vec{0} \quad (3)$$

où $\vec{u}_{12} \equiv \vec{u}_z$,

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_i(\vec{r}, t) + \vec{E}_r(\vec{r}, t) \quad (\text{principe de superposition}) \quad \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_t(\vec{r}, t)$$

$$\vec{H}_1(\vec{r}, t) = \vec{H}_i(\vec{r}, t) + \vec{H}_r(\vec{r}, t) \quad \vec{H}_2(\vec{r}, t) = \vec{H}_t(\vec{r}, t).$$

3. On peut re-écrire la condition de continuité de la composante tangentielle à l’interface (éq. 2) sous la forme :

$$\vec{\mathcal{E}}_{0i, \parallel} e^{i(k_{ix}x - \omega t)} + \vec{\mathcal{E}}_{0r, \parallel} e^{i(k_{rx}x + k_{ry}y - \omega t)} + c.c. = \vec{\mathcal{E}}_{0t, \parallel} e^{i(k_{tx}x + k_{ty}y - \omega t)} + c.c. \quad (4)$$

Pour que cette relation soit satisfaite pour tout x et y , il faut que :

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \equiv k_x \quad (5)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = 0 \quad (6)$$

Les composantes suivant z des vecteurs d'onde sont : $k_{iz} = \pm\sqrt{k_1^2 - k_x^2}$, $k_{rz} = \pm\sqrt{k_1^2 - k_x^2}$, $k_{tz} = \pm\sqrt{k_2^2 - k_x^2}$. Compte tenu du sens de propagation des ondes, on garde $k_{iz}, k_{tz} > 0$ et $k_{rz} < 0$. $k_{rz} = -k_{iz}$.

4. En tenant compte des relations (5) et (6) dans les eqs. (4) et (3), on obtient :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_{0i,\parallel} + \vec{\mathcal{E}}_{0r,\parallel} = \vec{\mathcal{E}}_{0t,\parallel} \\ \mathcal{H}_{0i} + \mathcal{H}_{0r} = \mathcal{H}_{0t} \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} -\frac{k_{iz}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \omega} \mathcal{H}_{0i} + \frac{k_{iz}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \omega} \mathcal{H}_{0r} = -\frac{k_{tz}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \omega} \mathcal{H}_{0t} \\ \mathcal{H}_{0i} + \mathcal{H}_{0r} = \mathcal{H}_{0t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{H}_{0i} - \mathcal{H}_{0r} = \frac{k_{tz}}{k_{iz}} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \mathcal{H}_{0t} \\ \mathcal{H}_{0i} + \mathcal{H}_{0r} = \mathcal{H}_{0t} \end{cases}$$

ou, en posant $r_H^p = \left[\frac{\mathcal{H}_{0r}}{\mathcal{H}_{0i}} \right]_p$ et $t_H^p = \left[\frac{\mathcal{H}_{0t}}{\mathcal{H}_{0i}} \right]_p$, on a :

$$\begin{cases} 1 - r_H^p = \frac{k_{tz}}{k_{iz}} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} t_H^p \\ 1 + r_H^p = t_H^p \end{cases}$$

Solution :

$$r_H^p = \frac{\varepsilon_{r2} k_{iz} - \varepsilon_{r1} k_{tz}}{\varepsilon_{r2} k_{iz} + \varepsilon_{r1} k_{tz}} \quad (7)$$

$$t_H^p = \frac{2\varepsilon_{r2} k_{iz}}{\varepsilon_{r2} k_{iz} + \varepsilon_{r1} k_{tz}} \quad (8)$$

2 Réflexion totale, transport d'énergie par ondes évanescentes, effet Goos-Hänchen

$$1. k_{iz}^2 = k_2^2 - k_x^2 = n_2^2 k_0^2 - n_1^2 k_0^2 \sin^2 \theta_i < n_2^2 k_0^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_{lim} \right) = 0.$$

$$k_{tz} = \pm i \sqrt{k_x^2 - n_2^2 k_0^2} \equiv \pm \frac{i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = (k_x^2 - n_2^2 k_0^2)^{-1/2} \quad (9)$$

2.

$$\vec{H}_t(\vec{r}, t) = -\mathcal{H}_{0t} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(k_x x - \omega t)} \vec{u}_y + c.c. \quad (10)$$

On a gardé $k_{tz} = +\frac{i}{\delta}$ pour que le champ \vec{H}_t ne diverge pas pour $z \rightarrow \infty$. L'onde transmise est une *onde évanescente* : l'amplitude de l'onde décroît exponentiellement avec la distance par rapport à l'interface ; dans la direction parallèle à l'interface, la structure correspond à une onde progressive. δ est la *profondeur de pénétration*, distance à laquelle l'amplitude du champ est divisée par e .

Application numérique : $\frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} = 0.45$

3.

$$r_H^p = \frac{\varepsilon_{r2} k_{iz} - i\varepsilon_{r1}/\delta}{(\varepsilon_{r2} k_{iz} - i\varepsilon_{r1}/\delta)^*} = |r_H^p| e^{-i2\phi} \quad \text{avec} \quad |r_H^p| = 1 \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \left(\frac{n_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}{n_2^2 \cos \theta_i} \right) \quad (11)$$

Le coefficient de réflexion en énergie R :

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\left| \langle \vec{S}_r \cdot \vec{u}_z \rangle_T \right|}{\left| \langle \vec{S}_i \cdot \vec{u}_z \rangle_T \right|} \quad \text{où} \quad \vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (\text{vecteur de Poynting})$$

On pose $\vec{\mathcal{E}}_\alpha = \vec{\mathcal{E}}_{0\alpha} e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)}$ et $\vec{\mathcal{H}}_\alpha = -\mathcal{H}_{0\alpha} \vec{u}_y e^{i(\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r} - \omega t)}$. On a :

$$\langle \vec{S}_\alpha \rangle_T = \langle \vec{E}_\alpha \wedge \vec{H}_\alpha \rangle_T = 2\Re e \left(\vec{\mathcal{E}}_\alpha \wedge \vec{\mathcal{H}}_\alpha^* \right) = 2\Re e \left(-\frac{\vec{k}_\alpha \wedge \vec{\mathcal{H}}_\alpha}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r\alpha} \omega} \wedge \vec{\mathcal{H}}_\alpha^* \right) = \frac{2\Re e(\vec{k}_\alpha)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r\alpha} \omega} |\vec{\mathcal{H}}_\alpha|^2 \quad (12)$$

Dans le cas des ondes réfléchi et incidente, on a alors :

$$\left| \langle \vec{S}_r \cdot \vec{u}_z \rangle_T \right| = 2 \frac{|k_{rz}|}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \omega} |\mathcal{H}_{0r}|^2 \quad \text{et} \quad \left| \langle \vec{S}_i \cdot \vec{u}_z \rangle_T \right| = 2 \frac{|k_{iz}|}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \omega} |\mathcal{H}_{0i}|^2$$

$$R = \frac{|\mathcal{H}_{0r}|^2}{|\mathcal{H}_{0i}|^2} = |r_H^p|^2 = 1 \quad (\text{réflexion totale}) \quad (13)$$

4. Pour l'onde transmise, on a :

$$\langle \vec{S}_t \rangle_T = \frac{2\Re e(\vec{k}_t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \omega} |\vec{\mathcal{H}}_t|^2 = \frac{2\Re e(k_x \vec{u}_x + \frac{i}{\delta} \vec{u}_z)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \omega} |\vec{\mathcal{H}}_{0t}|^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} = \frac{2k_x \vec{u}_x}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \omega} |\vec{\mathcal{H}}_{0t}|^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \quad (14)$$

L'onde evanescente transporte de l'énergie *le long de la surface*. Le flux moyen d'énergie à travers l'interface est nul. Le coefficient de transmission en énergie, $T = \frac{I_t}{I_i} = 0$, ce qui est cohérent avec la conservation de l'énergie dans les conditions de réflexion totale ($R + T = 1$).

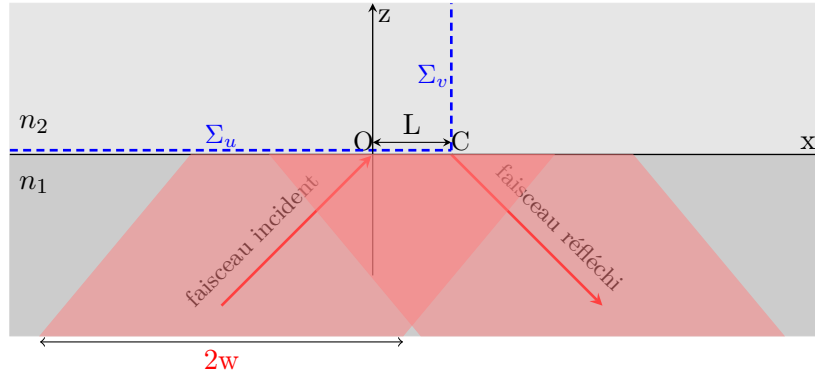


FIGURE 2 – Déplacement Goos-Hänchen

5. 5.A)

$$\Phi_{\Sigma_v} = \iint_{\Sigma_v} \langle \vec{S}_t \rangle_T \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \int_0^\infty dz \langle \vec{S}_t \rangle_T \cdot \vec{u}_x \stackrel{(14)}{=} \frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2^2 \varepsilon_0 c} \delta \Delta y |\mathcal{H}_{0t}|^2 \quad (15)$$

$$\Phi_{\Sigma_u} = \iint_{\Sigma_u} \langle \vec{S}_i + \vec{S}_r \rangle_T \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \int_{-\infty}^{x_C} dx \langle \vec{S}_i + \vec{S}_r \rangle_T \cdot \vec{u}_z$$

$$\langle S_{iz} \rangle_T = \frac{2\Re e(k_{iz})}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \omega} |\vec{\mathcal{H}}_i|^2 = \frac{2 \cos \theta_i}{n_1 \varepsilon_0 c} |\mathcal{H}_{0i}|^2$$

$$\langle S_{rz} \rangle_T = \frac{2\Re e(k_{rz})}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \omega} |\vec{\mathcal{H}}_r|^2 = -\frac{2 \cos \theta_i}{n_1 \varepsilon_0 c} |\mathcal{H}_{0r}|^2 = -\frac{2 \cos \theta_i}{n_1 \varepsilon_0 c} |\mathcal{H}_{0i}|^2$$

$$\Phi_{\Sigma_u} = \frac{2 \cos \theta_i}{n_1 \varepsilon_0 c} \Delta y (L + w - w) |\mathcal{H}_{0i}|^2 = \frac{2 \cos \theta_i}{n_1 \varepsilon_0 c} \Delta y L |\mathcal{H}_{0i}|^2 \quad (16)$$

On remarque que si $L = 0$, $\Phi_{\Sigma_u} = 0$. La conservation de l'énergie implique $\Phi_{\Sigma_u} = \Phi_{\Sigma_v}$. On en déduit $L = \frac{n_1^2}{2n_2^2} \tan \theta_i |t_H^p|^2 \delta$; ou, équivalent, en fonction de θ_i , n_1 , n_2 et k_0 :

$$L = \frac{2n_1^2 n_2^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{(n_1^2 - n_2^2)(n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2 \cos^2 \theta_i)} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2} k_0^{-1} \quad (17)$$

5.B) 5.B.1) On pose $\theta_i = \theta_0 + \eta$ avec $\eta \ll \theta_0$. On a alors :

$$\vec{H}_i(x, z = 0, t) = \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_0 + \eta) e^{i[n_1 k_0 \sin(\theta_0 + \eta)x - \omega t]} d\eta \vec{u}_y + c.c.$$

$$\sin(\theta_0 + \eta) = \sin \theta_0 \cos \eta + \sin \eta \cos \theta_0 \approx \sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0$$

$$\vec{H}_i(x, z = 0, t) \approx \underbrace{e^{i(n_1 k_0 \sin \theta_0 x - \omega t)}}_{\alpha_{\theta_0}} \vec{u}_y \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_0 + \eta) e^{i n_1 k_0 \cos \theta_0 x \eta} d\eta + c.c.$$

5.B.2)

$$\vec{H}_r(x, z = 0, t) \approx \alpha_{\theta_0} \vec{u}_y \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_0 + \eta) e^{-i2\phi(\theta_0 + \eta)} e^{i n_1 k_0 \cos \theta_0 x \eta} d\eta + c.c.$$

$$\phi(\theta_0 + \eta) \approx \phi(\theta_0) + \eta \phi'(\theta_0)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_r(x, z = 0, t) &= \alpha_{\theta_0} e^{-i2\phi(\theta_0)} \vec{u}_y \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_0 + \eta) e^{-i2\phi'(\theta_0)\eta} e^{i n_1 k_0 \cos \theta_0 x \eta} d\eta + c.c. \\ &= \alpha_{\theta_0} e^{-i2\phi(\theta_0)} \vec{u}_y \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \mathcal{A}(\theta_0 + \eta) e^{i n_1 k_0 \cos \theta_0 (x - x_0) \eta} d\eta + c.c. \end{aligned}$$

On identifie $x_0 = \frac{2\phi'(\theta_0)}{n_1 k_0 \cos \theta_0}$. En utilisant la relation (11), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi'(\theta_0) &= \frac{n_1 n_2^2 \sin \theta_0}{(n_1^2 \sin^2 \theta_0 - n_2^2 \cos^2 \theta_0) \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_0 - n_2^2}} \\ x_0 &= \frac{2n_2^2 \tan \theta_0}{(n_1^2 \sin^2 \theta_0 - n_2^2 \cos^2 \theta_0) \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_0 - n_2^2}} k_0^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

x_0 représente le déplacement Goos-Hänchen. Si l'on compare les expressions (17) et (18) on remarque qu'elles sont légèrement différentes ($\frac{L}{x_0} = \frac{n_1^2 \cos^2 \theta_0}{n_1^2 - n_2^2}$).

Application numérique $x_0 \approx 1 \mu m$