

Des équations de Maxwell à l'optique:
Optique géométrique, diffraction, dispersion, guides d'onde

Fabien Bretenaker

Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Université Paris-Saclay

31 janvier 2022

Avant-Propos

Le cours d'optique et électromagnétisme de L3, commun à l'Université Paris-Saclay et à l'École Normale Supérieure Paris-Saclay, a démarré à la rentrée 2018. Au sein de ce module, l'optique occupe huit blocs comportant chacun un cours et un TD. Ce polycopié correspond aux cinq premiers cours. Les trois derniers cours, portant sur l'optique anisotrope, font l'objet d'un document ultérieur.

Ce polycopié est en grande partie issu du cours intitulé "Ondes électromagnétiques" que je partage avec Antoine Browaeys à l'École Polytechnique. Il doit beaucoup à ce dernier, ainsi qu'à Jean-Marcel Rax, Pascale Senellart, Frédéric Chevy et Arnaud Couairon. Il a aussi bénéficié des discussions avec Elizabeth Boer-Duchemin et Ségolène Guilbaud.

Pour écrire ce polycopié, j'ai bien sûr largement emprunté à la littérature existante. Une liste de références est donnée ci-dessous. Mentionnons plus particulièrement le cours de Jean-Jacques Greffet à l'Institut d'Optique ainsi que le livre de René-Jean Champeau, Renaud Carpentier et Ivan Lorgeré, dans lequel j'ai puisé de larges pans. J'ai aussi emprunté de très larges passages aux ouvrages de J. D. Jackson, d'Andy Zangwill et de Tony Siegman.

Cet enseignement est récent. Je compte sur les étudiant(e)s à venir pour me faire part des coquilles et erreurs qu'ils/elles détecteront en m'écrivant à l'adresse **Fabien.Bretenaker@universite-paris-saclay.fr**. Je leur suis d'avance reconnaissant pour leurs suggestions d'améliorations.

Fabien Bretenaker
janvier 2021

Bibliographie

Il existe une vaste littérature concernant les ondes, l'optique et le rayonnement électromagnétique en général. En voici une liste non exhaustive :

- C. A. Balanis, *Antenna Theory, Analysis, and Design*, 3rd edition, Wiley, 2005.
- M. Born et E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th edition, Cambridge, 1999.
- R. W. Boyd, *Nonlinear Optics, 3rd edition*, Academic Press, 2008.
- R.-J. Champeau, R. Carpentier et I. Lorgeré, *Ondes Lumineuses*, De Boeck, 2009.
- R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Le cours de physique de Feynman. Electromagnétisme 1 & 2*, Dunod, 2015.
- J.-J. Greffet, *Electromagnétisme*, Ecole Supérieure d'Optique.
- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics, 3rd edition*, Wiley, 1999.
- J. D. Kraus and R. J. Marhefka, *Antennas For All Applications, 3rd edition*, McGraw-Hill, 2003.
- P. W. Milonni, *Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light*, Taylor & Francis, 2005.
- B. E. A. Saleh et M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, 1991.
- A. E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, 1986.
- J. C. Slater et N. H. Frank, *Electromagnetism*, Dover, 1947.
- J. A. Stratton, *Théorie de l'électromagnétisme*, Dunod, 1961.
- A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge, 2013.
- J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, 1996.

Table des matières

Avant-Propos	iii
Bibliographie	v
1 De l'électromagnétisme à l'optique géométrique	1
1.1 Introduction	1
1.2 Equation eikonale	1
1.3 Introduction à la notion de rayon lumineux	3
1.4 Equation des rayons	4
1.5 Lien avec le principe de Fermat	5
1.6 Quelques applications	6
Complement 1A Introduction à l'optique matricielle des rayons	9
1A.1 Description vectorielle des rayons optiques	9
1A.2 Matrices $ABCD$	10
1A.3 Eléments $ABCD$ en cascade	12
1A.4 Evolution des rayons dans un système périodique	12
2 Ondes planes	15
2.1 Introduction	15
2.2 Rappel : théorème de Poynting	15
2.3 Ondes planes dans un milieu non dispersif sans charges ni courants libres	17
2.4 Réflexion et réfraction	19
2.5 Réflexion à l'interface entre deux diélectriques	23
2.6 Le Fabry-Perot	25
Complement 2A Pression de radiation	29
Complement 2B Ondes dans une structure multi-couche diélectrique	33
2B.1 Formalisme des matrices de transfert	33
2B.2 Exemple d'application : le miroir de Bragg	35
Complement 2C Ondes planes dans les conducteurs	37
2C.1 Modèle de conducteur simple	37

2C.2	Propagation d'une onde plane monochromatique	38
2C.3	Effet de peau dans un "bon conducteur"	39
2C.4	Réflexion sur un bon conducteur	40
3	Diffraction	43
3.1	Introduction	43
3.2	Equation de Helmholtz	43
3.3	Diffraction "naturelle" : propagation d'un faisceau à partir d'un plan . .	44
3.4	Fréquences spatiales et propagation	45
3.5	"Principe" de Huygens-Fresnel	46
3.6	Diffraction de Fraunhofer	48
3.7	Optique paraxiale	50
	Complement 3A Matrices $ABCD$ et faisceaux gaussiens	61
3A.1	Généralisation de l'intégrale de Huygens à n'importe quel système paraxial	61
3A.2	Le formalisme $ABCD$ pour les faisceaux gaussiens	64
	Complement 3B Modes des cavités optiques	65
3B.1	Introduction : le concept de mode	65
3B.2	Cavités stables à deux miroirs	68
3B.3	Application du formalisme $ABCD$ aux cavités	73
4	Propagation dans les milieux dispersifs	75
4.1	Milieux dispersifs	75
4.2	Propagation d'impulsions dans les milieux dispersifs	83
	Complement 4A Caractérisation d'impulsions optiques	91
4A.1	Autocorrélation d'intensité	91
4A.2	Autocorrélation interférométrique	92
4A.3	Frequency-Resolved Optical Gating (FROG)	95
5	Guides d'ondes	99
5.1	Guides d'onde plans métalliques	99
5.2	Guides d'onde plans diélectriques	103
A	Formulaire d'analyse vectorielle	109
B	Distribution de Dirac	111

Chapitre 1

De l'électromagnétisme à l'optique géométrique

1.1 Introduction

L'optique est très souvent enseignée de manière indépendante de l'électromagnétisme. Historiquement, ces deux champs de la physique se sont en effet développés parallèlement. Cependant, il est établi depuis la fin du dix-neuvième siècle que la lumière obéit aux équations de Maxwell. Le but de ce chapitre et des deux suivants est de dériver un certain nombre de “principes” d'optique à partir des équations de Maxwell, montrant ainsi que ces “principes” n'en sont en fait pas ! Nous allons par conséquent au cours de ces trois chapitres donner des coups de projecteurs sur quelques aspects qui nous semblent particulièrement parlants, allant de sujets aussi traditionnels que l'optique géométrique et la diffraction à des sujets d'intérêt plus récent comme l'optique paraxiale.

Ainsi, le présent chapitre permet de retrouver l'*optique géométrique*, en particulier l'équation des rayons et le “principe” de Fermat, à partir des équations de Maxwell. Le formalisme de la matrice $ABCD$, une autre formulation de l'optique géométrique, est introduit dans le complément 1A.

L'optique géométrique est le formalisme le plus simple de l'optique. C'est aussi celui qui semble le plus éloigné du caractère ondulatoire de la lumière. Montrons qu'en fait il est assez simplement possible de retrouver l'optique géométrique à partir des équations de Maxwell, ce qui nous entraîne en quelque sorte dans un voyage à rebours dans le temps.

1.2 Equation eikonale

Afin de retrouver l'optique géométrique en partant des équations de Maxwell, considérons un champ monochromatique de fréquence ω se propageant dans un milieu diélectrique isotrope non dispersif (pas forcément homogène) de constante diélectrique $\varepsilon_r(\mathbf{r})$. Alors les

champs s'écrivent :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) \exp [ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r}) - i\omega t] + \text{c.c.} , \quad (1.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{B}(\mathbf{r}) \exp [ik_0\mathcal{S}(\mathbf{r}) - i\omega t] + \text{c.c.} , \quad (1.2)$$

avec

$$k_0 = \frac{\omega}{c} , \quad (1.3)$$

et où nous supposons les amplitudes \mathcal{E} et \mathcal{B} complexes pour pouvoir représenter n'importe quel état de polarisation, et où nous avons explicitement écrit la phase du champ sous la forme

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c}\mathcal{S}(\mathbf{r}) . \quad (1.4)$$

Dans la suite, la quantité $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ sera appelée l'*eikonale*. Le cas d'une onde sphérique correspond par exemple à $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})r$ et celui d'une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} à $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}/k_0$.

Les champs définis aux équations (1.1) et (1.2) doivent obéir aux équations de Maxwell suivantes :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}) = 0 . \quad (1.8)$$

En y injectant les équations (1.1) et (1.2), nous allons être confrontés aux quantités suivantes :

$$\nabla \times (\mathcal{E} e^{ik_0\mathcal{S}}) = e^{ik_0\mathcal{S}} [\nabla \times \mathcal{E} + ik_0 \nabla \mathcal{S} \times \mathcal{E}] , \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E} e^{ik_0\mathcal{S}}) = e^{ik_0\mathcal{S}} [\varepsilon_0 \nabla \cdot (\varepsilon_r \mathcal{E}) + \varepsilon_r \varepsilon_0 ik_0 \nabla \mathcal{S} \cdot \mathcal{E}] . \quad (1.10)$$

L'*approximation de l'optique géométrique* consiste à négliger les premiers termes dans les membres de droite des équations (1.9) et (1.10). Ceci signifie qu'on néglige les variations d'amplitude des champs par rapport à leurs variations de phase : on suppose que les amplitudes varient peu à l'échelle d'une longueur d'onde. Dans le domaine optique, cela signifie que les amplitudes des champs ne varient pas de façon significative sur des échelles de l'ordre du micromètre. De plus, on suppose que ε_r varie lentement par rapport à la phase. Ceci exclut tous les phénomènes de diffraction, par exemple par un bord, qui seront traités par la suite à un niveau d'approximation moins radical.

En appliquant cette approximation, les équations de Maxwell (1.5-1.8) deviennent :

$$ik_0 \nabla \mathcal{S} \times \mathcal{E} = i\omega \mathcal{B} , \quad (1.11)$$

$$ik_0 \nabla \mathcal{S} \times \mathcal{B} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mathcal{E} , \quad (1.12)$$

$$\nabla \mathcal{S} \cdot \mathcal{B} = 0 , \quad (1.13)$$

$$\nabla \mathcal{S} \cdot \mathcal{E} = 0 . \quad (1.14)$$

On peut alors éliminer \mathcal{B} entre (1.11) et (1.12) et utiliser (1.14) pour obtenir finalement l'équation eikonale :

$$\boxed{\|\nabla\mathcal{S}\|^2 = \varepsilon_r = n^2(\mathbf{r})} . \quad (1.15)$$

En séparant la norme et la direction de $\nabla\mathcal{S}$, l'équation (1.15) permet d'écrire :

$$\boxed{\nabla\mathcal{S} = \|\nabla\mathcal{S}\|\hat{\mathbf{t}} = n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{t}}} , \quad (1.16)$$

où $\hat{\mathbf{t}}$ est un vecteur unitaire le long de $\nabla\mathcal{S}$, donc perpendiculaire aux surfaces equiphases. Nous verrons dans la suite que $\hat{\mathbf{t}}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire du rayon lumineux.

Commentaire : le niveau d'approximation qui permet, en optique, d'arriver à l'équation eikonale est similaire à l'approximation WKB en physique quantique.

1.3 Introduction à la notion de rayon lumineux

Afin de préciser la notion de rayon lumineux, calculons la moyenne temporelle, sur plusieurs périodes optiques $2\pi/\omega$, du vecteur de Poynting de l'onde donnée par les équations (1.1) et (1.2). Le vecteur de Poynting¹ \mathbf{S} est défini par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} . \quad (1.17)$$

En injectant les équations (1.1) et (1.2) dans l'équation (1.17), on obtient :

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2}{\mu_0} [\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}^*] . \quad (1.18)$$

En utilisant l'équation (1.11), on obtient alors :

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2}{\mu_0} \left[\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \frac{k_0}{\omega} \nabla\mathcal{S} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \right] = \frac{2}{c\mu_0} \|\boldsymbol{\mathcal{E}}\|^2 \nabla\mathcal{S} . \quad (1.19)$$

De la même manière, la moyenne temporelle de la densité d'énergie de l'onde

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (1.20)$$

devient, pour l'onde définie par les équations (1.1) et (1.2) :

$$\langle u \rangle = \varepsilon \|\boldsymbol{\mathcal{E}}\|^2 + \frac{1}{\mu_0} \|\boldsymbol{\mathcal{B}}\|^2 . \quad (1.21)$$

En utilisant alors les équations (1.11-1.14), on obtient :

$$\langle u \rangle = 2\varepsilon \|\boldsymbol{\mathcal{E}}\|^2 . \quad (1.22)$$

1. Nous reviendrons dans la section 2.2 sur la notion d'énergie et le vecteur de Poynting dans un milieu diélectrique.

Les équations (1.19) et (1.22), avec (1.16), montrent donc que

$$\frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{c}{n} \hat{\mathbf{t}}. \quad (1.23)$$

On constate par conséquent que l'énergie se propage perpendiculairement aux fronts d'onde, à la vitesse c/n . On définit par conséquent les *rayons lumineux* comme les lignes de champ de $\langle \mathbf{S} \rangle$, perpendiculaires aux fronts d'onde. La trajectoire curviligne du rayon admet $\hat{\mathbf{t}}$ comme vecteur unitaire tangentiel.

1.4 Equation des rayons

Trouver une équation des rayons consiste à trouver une équation permettant de déterminer la trajectoire $\mathbf{r} = (x, y, z)$ du rayon en fonction de son abscisse curviligne s .

En coordonnées cartésiennes, le vecteur unitaire tangentiel s'écrit :

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

L'équation (1.16) s'écrit alors :

$$\nabla \mathcal{S} = n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (1.25)$$

soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} = n \frac{dx}{ds}, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} = n \frac{dy}{ds}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} = n \frac{dz}{ds}. \quad (1.28)$$

Dérivons ensuite $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}$ par rapport à s :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) \frac{dz}{ds}. \quad (1.29)$$

On utilise alors les équations (1.26-1.28) pour remplacer $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$ par $\frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x}$, $\frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y}$ et $\frac{1}{n} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z}$, respectivement, dans l'équation (1.29), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) &= \frac{1}{n} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} \|\nabla \mathcal{S}\|^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

En utilisant l'équation (1.15), on obtient alors :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} \right) = \frac{1}{2n} \frac{\partial n^2}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} . \quad (1.31)$$

En agissant de même pour les coordonnées y et z , on obtient finalement l'équation des rayons :

$$\boxed{\frac{d}{ds} (\nabla \mathcal{S}) = \nabla n} , \quad (1.32)$$

ou encore

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n} . \quad (1.33)$$

1.5 Lien avec le principe de Fermat

L'équation eikonale permet de donner une démonstration du principe de Fermat, qui était considéré comme un principe fondamental avant que les équations de Maxwell ne soient énoncées. On devrait donc maintenant plutôt parler de "théorème de Fermat."

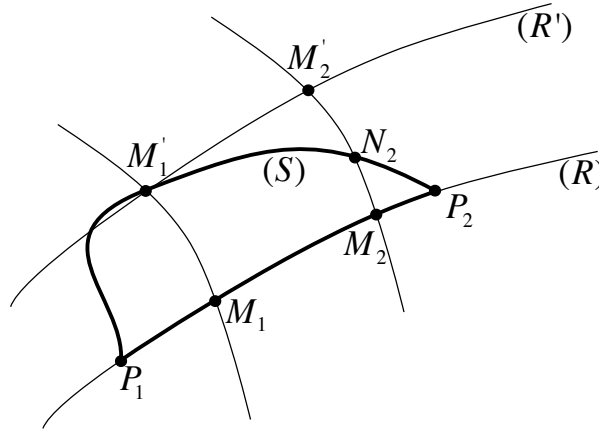


FIGURE 1.1 – Démonstration du principe de Fermat.

Considérons par conséquent deux courbes passant par les points P_1 et P_2 de la figure 1.1 : le rayon (R) qui obéit à l'équation des rayons (1.33), et une autre courbe (S) . On considère deux points M_1 et M_2 de (R) , séparés d'une distance infinitésimale. On a représenté sur la figure 1.1 les fronts d'onde qui coupent (R) en ces deux points. On appelle M_1' et N_2 les intersections de ces deux fronts d'onde avec la courbe (S) . Finalement, on "tire" un rayon (R') à partir du point M_1' , et on appelle M_2' son point d'intersection avec le second front d'onde.

D'après l'équation (1.16), $n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{t}}$ est un gradient, et donc son rotationnel est nul :

$$\nabla \times (n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{t}}) = 0 . \quad (1.34)$$

Par conséquent, en appliquant le théorème de Stokes à tout contour fermé ∂S qui délimite une surface S , on a :

$$\oint_{\partial S} n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{t}}) \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (1.35)$$

Ce résultat est connu sous le nom d'*invariant intégral de Lagrange*. En l'appliquant au triangle $M'_1N_2M'_2$ de la figure 1.1, on obtient :

$$(n\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r})_{M'_1N_2} + (n\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r})_{N_2M'_2} + (n\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r})_{M'_2M'_1} = 0 . \quad (1.36)$$

Sur le front d'onde, $\hat{\mathbf{t}}$ est orthogonal à $d\mathbf{r}$, d'où :

$$(n\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r})_{N_2M'_2} = 0 . \quad (1.37)$$

D'autre part, en vertu des propriétés du produit scalaire et comme $\hat{\mathbf{t}}$ est normé, on a :

$$(n\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r})_{M'_1N_2} \leq (nds)_{M'_1N_2} . \quad (1.38)$$

Finalement, le long d'un rayon l'inégalité ci-dessus devient une égalité, et comme les rayons M_1M_2 et $M'_1M'_2$ sont orthogonaux aux mêmes surfaces d'onde, on a :

$$(n\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r})_{M'_1M'_2} = (nds)_{M'_1M'_2} = (nds)_{M_1M_2} . \quad (1.39)$$

Finalement, en combinant les équations (1.35-1.39), on obtient :

$$(nds)_{M_1M_2} \leq (nds)_{M'_1N_2} . \quad (1.40)$$

En intégrant de P_1 à P_2 , on obtient le *principe de Fermat* (1657) :

$$\boxed{\int_R nds \leq \int_S nds} . \quad (1.41)$$

Ce principe variationnel stipule donc que le rayon (R) suivi par la lumière entre les points P_1 et P_2 est la trajectoire qui minimise le chemin optique. Comme

$$\int_R nds = \int_R cdt , \quad (1.42)$$

il s'agit aussi de la trajectoire qui minimise le temps de trajet de la lumière

1.6 Quelques applications

Afin d'illustrer le formalisme de l'optique géométrique, nous appliquons le formalisme eikonal à quelques problèmes classiques.

1.6.1 Propagation dans un milieu homogène

L'application de l'équation (1.33) au cas d'un milieu dans lequel l'indice de réfraction n ne dépend pas de \mathbf{r} est immédiate :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 , \quad (1.43)$$

dont la solution est du type

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{b} , \quad (1.44)$$

où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont des vecteurs constants. On retrouve donc évidemment bien le fait que, dans un milieu homogène, les rayons lumineux suivent des lignes droites.

1.6.2 Cas d'un gradient d'indice : effet mirage

Considérons une situation dans laquelle l'indice de réfraction n dépend de l'altitude z de façon continue. Par exemple dans le cas d'un désert chauffé par le soleil, la température est plus élevée à la surface du sable et donc l'air y est moins dense et l'indice augmente avec z (voir la figure 1.2). L'équation des rayons (1.33) peut se réécrire :

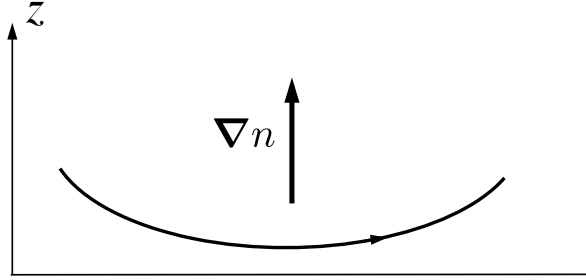


FIGURE 1.2 – *Effet mirage.*

$$\frac{dn}{ds} \hat{\mathbf{t}} + \frac{n}{R} \hat{\mathbf{N}} = \nabla n, \quad (1.45)$$

où nous avons introduit le rayon de courbure R de la trajectoire et le vecteur unitaire normal $\hat{\mathbf{N}}$ définis par :

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{N}}}{R}. \quad (1.46)$$

L'équation (1.46) montre que la trajectoire s'incurve vers les indices de réfraction croissants, comme le montre la figure 1.2.

1.6.3 Lois de Snell-Descartes

Considérons maintenant la situation dans laquelle l'indice de réfraction présente une discontinuité. Par exemple, la figure 1.1 représente une surface Σ séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 . Afin de discuter le comportement d'un rayon qui serait incident sur

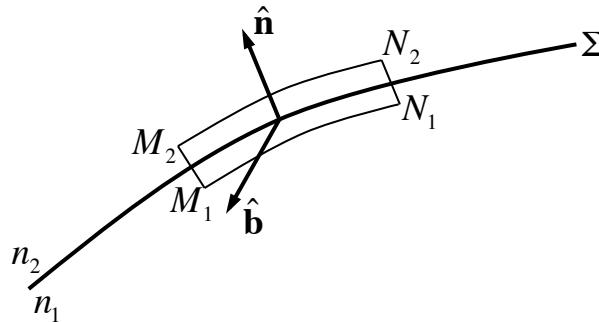


FIGURE 1.3 – *Démonstration des lois de Snell-Descartes.*

cette surface de discontinuité de l'indice, nous remarquons à partir de l'équation (1.16) que :

$$\nabla \times [n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{t}}] = 0. \quad (1.47)$$

Nous considérons alors le petit chemin plan fermé $M_2N_2N_1M_1$ (voir la figure 1.3) où les segments M_1N_1 et M_2N_2 sont parallèles à Σ et où M_1M_2 et N_1N_2 sont orthogonaux à Σ . $\hat{\mathbf{b}}$ est un vecteur orthogonal à $M_2N_2N_1M_1$. En appliquant le théorème de Stokes à partir de (1.47), on obtient alors :

$$\iint (\nabla \times [n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{t}}]) \cdot \hat{\mathbf{b}} \, dS = \oint n(\mathbf{r})\hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{r} = 0 , \quad (1.48)$$

où l'intégrale double est prise sur la surface délimitée par $M_2N_2N_1M_1$ et l'intégrale curviligne sur le contour correspondant. En faisant tendre la largeur du chemin $M_2N_2N_1M_1$ vers 0, c'est-à-dire en faisant tendre M_1 et M_2 l'un vers l'autre et N_1 et N_2 l'un vers l'autre, on obtient finalement :

$$\hat{\mathbf{n}} \times (n_2\hat{\mathbf{t}}_2 - n_1\hat{\mathbf{t}}_1) = 0 . \quad (1.49)$$

Nous pouvons donc conclure que le vecteur $n_2\hat{\mathbf{t}}_2 - n_1\hat{\mathbf{t}}_1$ est normal à l'interface entre les deux milieux ou, ce qui revient au même, que la composante tangentielle du rayon $n\hat{\mathbf{t}}$ est continue à la traversée de l'interface.

Si par exemple le rayon provenant du milieu 1, incident sur l'interface avec un angle θ_1 , est réfracté dans le milieu 2 avec un angle θ_2 , l'équation (1.49) montre que les rayons incident et réfracté sont dans le même plan et permet de retrouver la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (1.50)$$

De plus, si on suppose l'existence d'un rayon réfléchi, l'application de l'équation (1.50) au cas $n_1 = n_2$ donne $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$, ce qui implique la loi de la réflexion :

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 . \quad (1.51)$$

Notons pour finir qu'il existe un joli formalisme matriciel, basé sur les matrices dites $ABCD$, qui permet d'écrire de façon compacte et efficace les lois de l'optique géométrique (voir le complément 1A). Ce formalisme a eu une seconde jeunesse dans le domaine de l'optique paraxiale que nous développerons dans la section 3.7.

Complement 1A

Introduction à l'optique matricielle des rayons

Dans ce complément, nous montrons que, dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique discutée au chapitre 1, la propagation d'un rayon dans un système optique centré peut être décrite par des matrices 2×2 . Au-delà de son intérêt intrinsèque, ce formalisme sera utilisé dans les compléments 3A et 3B dans le cadre de l'optique paraxiale.

1A.1 Description vectorielle des rayons optiques

Nous ne considérons ici que des rayons paraxiaux, c'est-à-dire des rayons lumineux qui sont "assez proches" d'un axe de propagation donné z . Par conséquent, à deux dimensions, de tels rayons peuvent être décrits, dans un plan z donné, par leur distance $r(z)$ à l'axe z et leur pente dr/dz par rapport à cet axe. Un tel rayon est représenté sur la figure 1A.1. Plus généralement, dans le cas de la propagation dans un milieu d'indice $n(z)$, on introduit

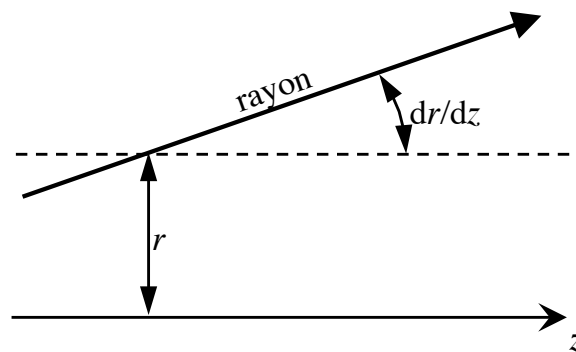


FIGURE 1A.1 – Description d'un rayon par sa position $r(z)$ et sa pente dr/dz .

la "pente réduite" $r'(z)$:

$$r'(z) \equiv n(z) \frac{dr(z)}{dz} . \quad (1A.1)$$

Le rayon peut alors être décrit par le vecteur $\mathbf{R}(z)$:

$$\mathbf{R}(z) = \begin{pmatrix} r(z) \\ r'(z) \end{pmatrix}. \quad (1A.2)$$

1A.2 Matrices $ABCD$

Nous donnons dans ce paragraphe quelques exemples de transformations matricielles des rayons à l'approximation paraxiale.

1A.2.1 Espace libre

Considérons la propagation d'un rayon de $z = z_1$ à $z = z_2 = z_1 + L$, comme dans la figure 1A.2. On a alors :

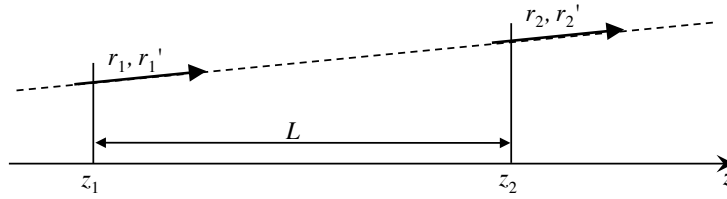


FIGURE 1A.2 – Propagation d'un rayon le long d'une distance L .

$$r'_2 = r'_1, \quad (1A.3)$$

$$r_2 = r_1 + \left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_1} L = r_1 + \frac{r'_1}{n} L, \quad (1A.4)$$

où n est l'indice de réfraction, supposé ici homogène, du milieu dans lequel la lumière se propage. Les équations (1A.3) et (1A.4) peuvent être résumées sous la forme :

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mathbf{R}_1, \quad (1A.5)$$

où la matrice $ABCD$ pour une propagation à travers un milieu homogène d'indice n et de longueur L est :

$$\text{Longueur } L : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1A.6)$$

1A.2.2 Lentille mince

On peut de manière similaire déterminer la matrice $ABCD$ d'une lentille mince de focale f :

$$\text{Lentille mince} : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}, \quad (1A.7)$$

avec la convention selon laquelle $f > 0$ désigne une lentille convergente.

1A.2.3 Miroir sphérique

Dans le cas où le rayon est réfléchi par un miroir sphérique (voir la figure 1A.3) de rayon de courbure R (avec $R > 0$ pour un miroir concave), il convient de distinguer les cas de l'incidence normale ($\theta = 0$) et d'un angle d'incidence quelconque ($\theta \neq 0$).

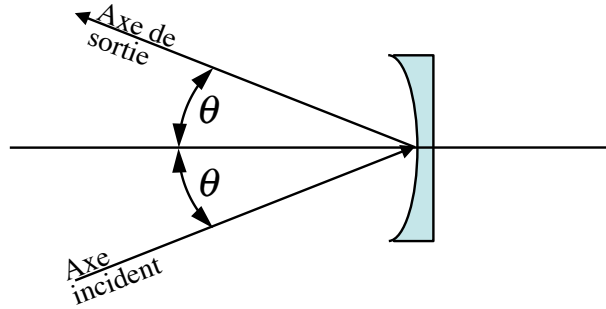


FIGURE 1A.3 – Reflection sur un miroir sphérique avec un angle d'incidence θ .

1A.2.3.1 Miroir sphérique à incidence normale ($\theta = 0$).

La réflexion sur le miroir sphérique de rayon de courbure R est alors équivalente à la traversée d'une lentille mince de focale $R/2$. Par conséquent, en vertu de l'équation (1A.7), sa matrice $ABCD$ est :

$$\text{Miroir } (\theta = 0) : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}. \quad (1A.8)$$

1A.2.3.2 Miroir sphérique sous une incidence quelconque ($\theta \neq 0$).

Dans ce cas le miroir se comporte de façons différentes dans le plan tangentiel (plan d'incidence) et le plan sagittal (plan orthogonal au plan d'incidence). Il est équivalent à un miroir sphérique à incidence normale à condition de remplacer son rayon de courbure par un rayon de courbure effectif R_e qui prend différentes valeurs dans les deux plans :

$$R_e = R \cos \theta \text{ dans le plan tangentiel ,} \quad (1A.9)$$

$$R_e = R / \cos \theta \text{ dans le plan sagittal ,} \quad (1A.10)$$

ce qui entraîne :

$$\text{Miroir } (\theta \neq 0) : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_e & 1 \end{pmatrix}. \quad (1A.11)$$

Il convient de remarquer que tous les éléments ci-dessus satisfont la relation suivante :

$$AD - BC = 1. \quad (1A.12)$$

Cette propriété reste donc valable pour n'importe quel produit des matrices $ABCD$ considérées ci-dessus.

1A.3 Éléments $ABCD$ en cascade

Supposons maintenant que nous souhaitons calculer l'évolution d'un rayon à travers un système composé d'une succession d'éléments indexés par les entiers $1, \dots, n$ et décrits par leurs matrices $ABCD$ respectives $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$. L'intérêt évident des matrices $ABCD$ réside dans le fait que la matrice \mathbf{M} décrivant le système dans son ensemble est simplement le produit des matrices des différents éléments :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n-1} \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 . \quad (1A.13)$$

1A.4 Evolution des rayons dans un système périodique

Considérons maintenant l'évolution d'un rayon dans un système périodique, c'est-à-dire un système qui reproduit le même séquence d'éléments optiques décrits par une matrice $ABCD$ \mathbf{M} . Un résonateur optique, par exemple, peut être vu comme un tel système périodique. En effet, dans un résonateur, la lumière parcourt des tours ou des allers-retours périodiquement. L'évolution du rayon dans un tel système va dépendre des propriétés des valeurs propres et vecteurs propres de \mathbf{M} .

1A.4.1 Rayons propres

Appelons λ_+ et λ_- les valeurs propres de \mathbf{M} . Elles sont solutions de l'équation suivante :

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \quad (1A.14)$$

Introduisons la demi-trace de la matrice $ABCD$:

$$m = \frac{A + D}{2} . \quad (1A.15)$$

Alors les deux solutions sont

$$\lambda_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - 1} , \quad (1A.16)$$

qui correspondent à deux rayons propres \mathbf{r}_+ et \mathbf{r}_- .

Comme tout rayon \mathbf{r}_0 à l'entrée du système périodique peut être écrit comme la combinaison des deux rayons propres du système, on a :

$$\mathbf{r}_0 = c_+ \mathbf{r}_+ + c_- \mathbf{r}_- . \quad (1A.17)$$

Le rayon, après n périodes du système, devient :

$$\mathbf{r}_n = c_+ \lambda_+^n \mathbf{r}_+ + c_- \lambda_-^n \mathbf{r}_- . \quad (1A.18)$$

Le comportement de ce rayon dépend des valeurs de λ_{\pm} .

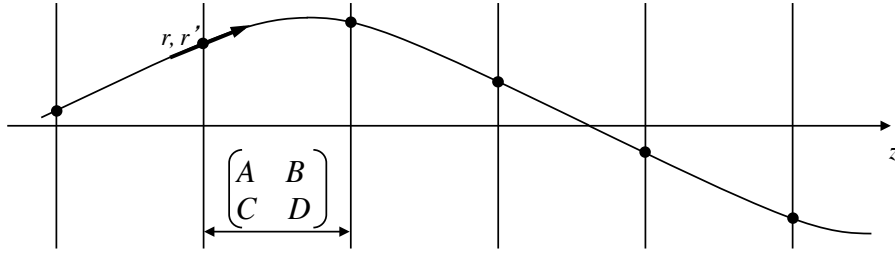


FIGURE 1A.4 – Evolution d'un rayon dans un système périodique stable.

1A.4.2 Système stable

Supposons dans un premier temps que

$$-1 \leq m \leq +1, \quad (1A.19)$$

c'est-à-dire

$$m^2 = \left(\frac{A+D}{2} \right)^2 \leq 1. \quad (1A.20)$$

Nous pouvons alors définir l'angle θ par :

$$m = \frac{A+D}{2} = \cos \theta, \quad (1A.21)$$

qui entraîne, selon l'équation (1A.16) :

$$\lambda_{\pm} = m \pm i\sqrt{1-m^2} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}. \quad (1A.22)$$

Les valeurs propres de la matrice $ABCD$ sont par conséquent complexes de module 1. L'équation (1A.18) devient alors :

$$\mathbf{r}_n = c_+ e^{in\theta} \mathbf{r}_+ + c_- e^{-in\theta} \mathbf{r}_-, \quad (1A.23)$$

qui peut se réécrire :

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 \cos n\theta + \mathbf{s}_0 \sin n\theta, \quad (1A.24)$$

avec \mathbf{r}_0 donné par l'équation (1A.17) et

$$\mathbf{s}_0 = i(c_+ \mathbf{r}_+ - c_- \mathbf{r}_-). \quad (1A.25)$$

L'équation (1A.23) montre que le rayon oscille périodiquement autour de l'axe du système, comme le montre la figure 1A.4. Ce genre de système est appelé un *système stable au sens de l'optique géométrique* : le rayon oscille périodiquement autour de l'axe sans s'échapper du système. Dans le cas où le système périodique est une cavité optique ceci signifie qu'un rayon lancé dans la cavité va y rester et ne pas s'échapper sur les côtés après quelques allers-retours.

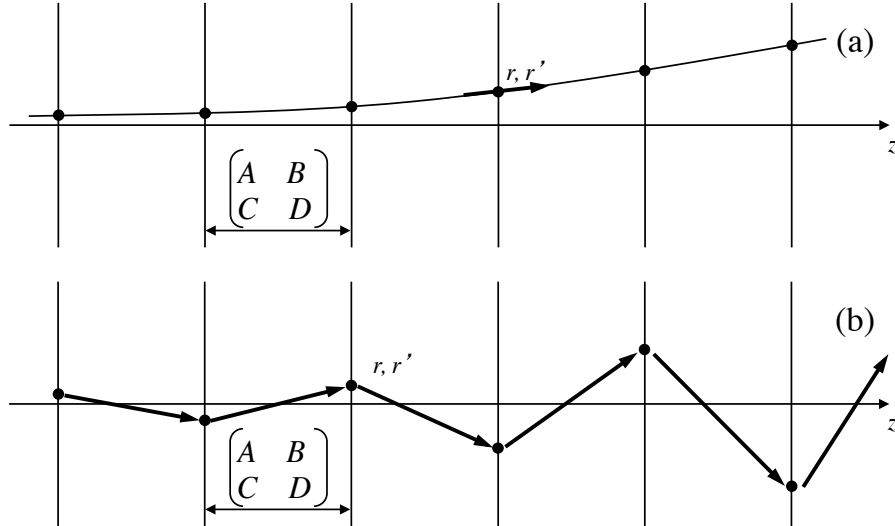


FIGURE 1A.5 – Evolution d'un rayon dans un système périodique instable avec (a) $M > 0$ et (b) $M < 0$.

1A.4.3 Système instable

Dans le cas opposé où

$$|m| > 1, \quad (1A.26)$$

signifiant que

$$m^2 = \left(\frac{A+D}{2} \right)^2 > 1, \quad (1A.27)$$

les valeurs propres du système deviennent, selon l'équation (1A.16) :

$$\lambda_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - 1} = \begin{cases} M \\ 1/M \end{cases}, \quad (1A.28)$$

où M est le *grandissement transverse* du système. Alors le rayon devient, après n périodes de propagation :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n &= c_+ M^n \mathbf{r}_+ + c_- M^{-n} \mathbf{r}_- \\ &= \mathbf{r}_0 \cosh n\theta + \mathbf{s}_0 \sinh n\theta, \end{aligned} \quad (1A.29)$$

où \mathbf{s}_0 dépend à nouveau des conditions initiales et $\theta = \ln M$.

Nous voyons dans ce cas que \mathbf{r}_n , et en particulier la position transverse du faisceau r_n , diverge exponentiellement : un rayon lancé dans un tel système finit par en sortir, comme le montre la figure 1A.5. Un tel système est dit *instable au sens de l'optique géométrique*.

Chapitre 2

Ondes planes

2.1 Introduction

Après avoir retrouvé l'optique géométrique à partir des équations de Maxwell, nous revenons bien vite à l'optique ondulatoire. En effet, dans cette partie, nous dérivons à partir des équations de Maxwell le comportement des ondes planes monochromatiques dans des milieux non dispersifs "simples". Nous commençons par décrire de telles ondes dans des milieux sans charges ni courants libres. Ceci nous permettra entre autres de trouver les résultats importants concernant la réflexion et la transmission de telles ondes à l'interface entre des diélectriques. Le cas des conducteurs simples est traité en complément 2C. Le problème de la pression de radiation est évoqué dans le complément 2A.

2.2 Rappel : théorème de Poynting

Avant d'entamer le programme décrit ci-dessus, il est nécessaire que tout le monde ait en tête les équations de Maxwell et le théorème de Poynting dans la matière. Les équations de Maxwell dans un milieu homogène, isotrope s'écrivent :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} . \quad (2.4)$$

On y adjoint les relations constitutives :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} , \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (2.6)$$

Considérons un volume V contenant des charges $\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}, t)$ et courants $\mathbf{j}_{\text{libre}}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ libres. Alors la puissance du travail mécanique exercé par les champs sur ces charges s'écrit :

$$\frac{dW_{\text{meca}}}{dt} = \int_V d^3r (\rho_{\text{libre}} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{libre}} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \int_V d^3r \mathbf{j}_{\text{libre}} \cdot \mathbf{E} . \quad (2.7)$$

Eliminons $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ en utilisant (2.2) :

$$\frac{dW_{\text{meca}}}{dt} = \int_V d^3r (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - \int_V d^3r \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} . \quad (2.8)$$

Le premier terme du membre de droite peut être réécrit en utilisant :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.9)$$

et les équations (2.1) et (2.6) pour obtenir :

$$(\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (2.10)$$

Ainsi (2.7) devient

$$\frac{dW_{\text{meca}}}{dt} = - \int_V d^3r \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \int_V d^3r \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \quad (2.11)$$

On obtient donc finalement le *théorème de Poynting* :

$$\boxed{\int_V d^3r \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = - \int_V d^3r \mathbf{j}_{\text{libre}} \cdot \mathbf{E} - \int_V d^3r \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) .} \quad (2.12)$$

Le membre de gauche est la dérivée dU_{EM}/dt de l'énergie électromagnétique dans le volume V :

$$U_{\text{EM}} = \int_V d^3r \frac{1}{2} (\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 + \mu \|\mathbf{H}\|^2) . \quad (2.13)$$

Le premier terme du membre de droite s'écrit $-dU_{\text{meca}}/dt$, c'est-à-dire l'opposé du travail exercée par le champ sur les charges. Finalement, le dernier terme est le flux du *vecteur de Poynting*

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \quad (2.14)$$

à travers la surface S entourant V . Donc le théorème de Poynting peut se réécrire :

$$\frac{d}{dt} (U_{\text{EM}} + U_{\text{meca}}) = - \int_S dA \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} , \quad (2.15)$$

où dA est un élément d'aire de S de normale $\hat{\mathbf{n}}$. Le théorème de Poynting peut aussi s'écrire localement

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{EM}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} ,} \quad (2.16)$$

où la *densité d'énergie du champ électromagnétique* est

$$\boxed{u_{\text{EM}} = \frac{1}{2} (\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 + \mu \|\mathbf{H}\|^2) .} \quad (2.17)$$

2.3 Ondes planes dans un milieu non dispersif sans charges ni courants libres

En l'absence de charges et courants libres, les équations de Maxwell (2.1-2.4) deviennent :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.21)$$

toujours associées aux relations constitutives

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.23)$$

On introduit traditionnellement l'indice de réfraction et l'impédance intrinsèque du milieu par les définitions suivantes :

$$n = c\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (2.24)$$

$$Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Dans le vide, Z prend la valeur $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377 \Omega$. En utilisant les relations constitutives, on peut éliminer \mathbf{D} et \mathbf{B} des équations de Maxwell qui deviennent :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.29)$$

On rappelle que le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.30)$$

2.3.1 Onde plane monochromatique

Intéressons nous au cas d'une onde plane monochromatique de fréquence ω :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.}. \quad (2.32)$$

En injectant ces champs dans les équations (2.26-2.29), on obtient les relations suivantes :

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathcal{H} = 0, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{k} \times \mathcal{E} = \omega\mu\mathcal{H}, \quad \mathbf{k} \times \mathcal{H} = -\omega\varepsilon\mathcal{E}. \quad (2.34)$$

Ces équations montrent que $(\mathbf{k}, \mathcal{E}, \mathcal{H})$ forme un trièdre directe : on parle d'onde TEM, pour transverse électromagnétique. En particulier, \mathcal{E} étant toujours orthogonal à \mathbf{k} , la polarisation de l'onde appartient au plan vectoriel de dimension 2 orthogonal à \mathbf{k} . On peut notamment observer des polarisations linéaires, circulaires ou elliptiques.

De plus, les équations (2.34) montrent que le rapport entre les amplitudes des champs est donné par :

$$\frac{\|\mathcal{E}\|}{\|\mathcal{H}\|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z . \quad (2.35)$$

De plus, en utilisant les deux mêmes équations (2.34), on obtient :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathcal{E} = -\omega^2 \mu \varepsilon \mathcal{E} . \quad (2.36)$$

En utilisant la transversalité de \mathcal{E} et l'équation (2.24), on obtient finalement la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \frac{ck}{n} , \quad (2.37)$$

où k est le module de \mathbf{k} . La vitesse de phase de l'onde est donnée par :

$$\mathbf{v}_\varphi = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} = \frac{c}{n} \hat{\mathbf{k}} , \quad (2.38)$$

où $\hat{\mathbf{k}}$ est un vecteur unitaire le long de la direction de propagation. La vitesse de propagation de l'énergie, définie par

$$\mathbf{v}_E = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{\langle u_{EM} \rangle} , \quad (2.39)$$

avec \mathbf{S} défini par l'équation (2.30) et la densité d'énergie électromagnétique u_{EM} donnée par :

$$u_{EM} = \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{E}\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{H}\|^2 . \quad (2.40)$$

On obtient finalement :

$$\mathbf{v}_E = \frac{2 \operatorname{Re}(\mathcal{E} \times \mathcal{H}^*)}{\varepsilon \|\mathcal{E}\|^2 + \mu \|\mathcal{H}\|^2} = \frac{2 \|\mathcal{E}\|^2 \hat{\mathbf{k}}}{Z(\varepsilon \|\mathcal{E}\|^2 + \mu \|\mathcal{H}\|^2)} = \frac{c}{n} \hat{\mathbf{k}} . \quad (2.41)$$

2.3.2 Bilan d'énergie pour des ondes planes monochromatiques

Supposons maintenant, dans cette partie seulement, que le milieu dans lequel se propage l'onde soit non magnétique ($\mu = \mu_0$) mais présente de l'absorption. Cette absorption peut être prise en compte en rendant complexe la permittivité¹

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon'' , \quad (2.42)$$

qui maintenant relie les amplitudes complexes de \mathbf{D} et \mathbf{E} :

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = (\varepsilon' + i\varepsilon'') \mathbf{E} . \quad (2.43)$$

1. Le petit chapeau sur $\hat{\varepsilon}$ est là pour souligner le fait que cette quantité est complexe.

En l'absence de charge et de courant libres, le théorème de Poynting appliqué à un volume V fermé par une surface S s'écrit :

$$\int_V d^3r \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = - \int_S dA \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (2.44)$$

où dA est l'élément d'aire sur la surface S de normale unitaire $\hat{\mathbf{n}}$. Nous allons maintenant utiliser les équations (2.31), (2.32) et (2.43) pour prendre la moyenne temporelle de l'équation (2.44). Néanmoins, si nous voulons décrire l'absorption, il convient de laisser les modules des amplitudes complexes \mathcal{E} et \mathcal{H} dépendre du temps. Par conséquent, la moyenne temporelle, notée $\langle \rangle$, est effectuée sur un temps long devant la période $2\pi/\omega$ mais court par rapport aux échelles de temps des variations des amplitudes des champs. On obtient finalement :

$$\left\langle \int_S dA \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\rangle + \frac{d}{dt} \int_V d^3r (\varepsilon' \|\mathcal{E}\|^2 + \mu \|\mathcal{H}\|^2) = - \int_V d^3r 2\omega \varepsilon'' \|\mathcal{E}\|^2. \quad (2.45)$$

Le premier terme du membre de gauche représente le flux d'énergie qui sort du volume V . Le second terme représente la variation de la quantité d'énergie électromagnétique stockée dans le milieu. Par conséquent, le membre de droite représente la puissance dissipée dans le milieu. $2\omega \varepsilon'' \|\mathcal{E}\|^2$ est donc la puissance absorbée par le milieu par unité de volume.

2.4 Réflexion et réfraction

Considérons maintenant le problème de la réflexion et de la réfraction à l'interface supposée plane entre deux milieux homogènes caractérisés par des constantes supposées réelles (ε_1, μ_1) et (ε_2, μ_2) , respectivement (voir la figure 2.1). On suppose que l'interface est perpendiculaire à z et que l'onde plane monochromatique incidente a son vecteur d'onde \mathbf{k}_i contenu dans le plan xz . Nous nous attendons à voir une partie de cette onde réfléchie et

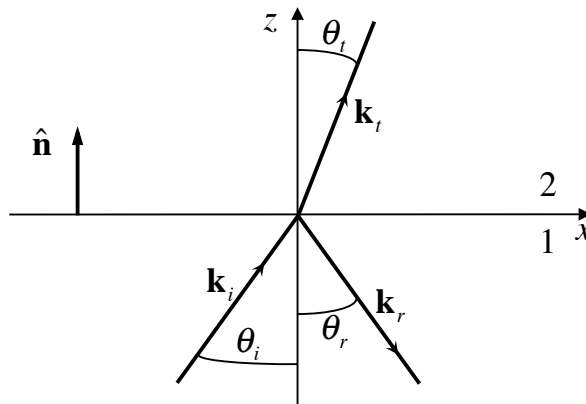


FIGURE 2.1 – Réflexion sur une interface plane entre deux milieux homogènes θ .

une autre partie transmise, ce qui suggère les formes suivantes pour les champs électriques

dans les milieux 1 et 2 :

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_i \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})] + \mathcal{E}_r \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} , \quad (2.46)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_t \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} . \quad (2.47)$$

Les autres champs ($\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$) prennent des formes analogues. A l'interface entre les deux milieux, les équations de Maxwell en l'absence de charges libres (équations 2.26-2.29), entraînent les conditions de raccordement suivantes :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2] = 0 , \quad (2.48)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2] = 0 , \quad (2.49)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = 0 , \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] = 0 . \quad (2.51)$$

Ces conditions de raccordement, qui doivent être satisfaites à tout instant, impliquent en particulier que les champs incident, réfléchi et transmis ont même fréquence ω , ce que nous avons déjà supposé de manière anticipée dans les équations (2.46) et (2.47).

2.4.1 Lois de Snell-Descartes

De plus, comme les équations (2.48-2.51) doivent être observées en tout point de l'interface $z = 0$, les projections des vecteurs d'onde sur le dioptre doivent être les mêmes :

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} , \quad (2.52)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} . \quad (2.53)$$

Les trois vecteurs d'onde sont donc coplanaires. De plus, l'équation (2.37) implique que

$$k_i = k_r = n_1 \frac{\omega}{c} \equiv k_1 , \quad (2.54)$$

ce qui, avec la condition $k_{ix} = k_{rx}$, implique que $\sin \theta_i = \sin \theta_r$, nous permettant donc de retrouver la loi de la réflexion déjà obtenue dans le cadre de l'optique géométrique dans la partie 1.2 :

$$\theta_r = \theta_i . \quad (2.55)$$

Dans le milieu 2, nous notons $k_t = k_2 = n_2 \omega / c$. Sa projection sur le dioptre est :

$$k_{tx} = k_2 \sin \theta_t = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_t . \quad (2.56)$$

Par conséquent, l'égalité $k_{ix} = k_{tx}$ redonne la loi de Snell-Descartes déjà dérivée dans la partie 1.6 :

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i . \quad (2.57)$$

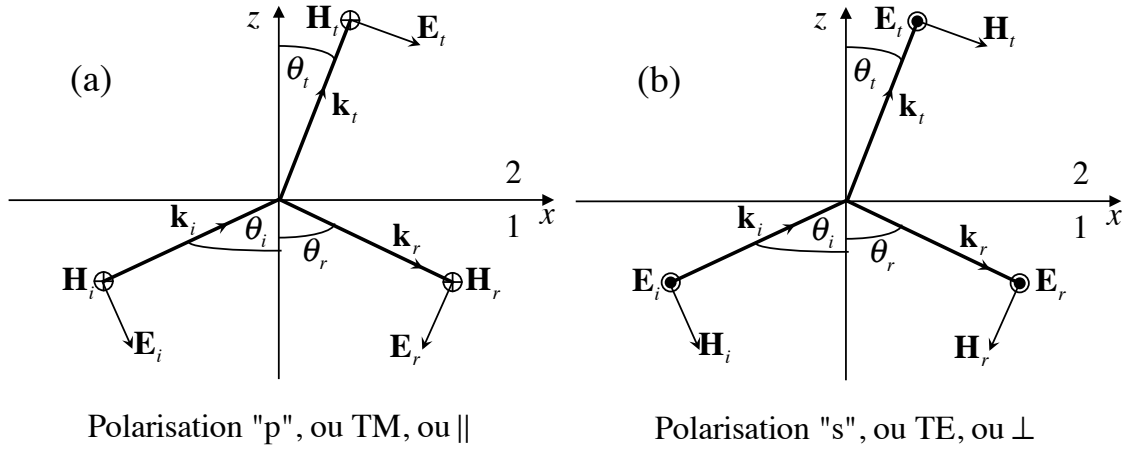


FIGURE 2.2 – Géométries de champs incidents sur une interface pour les polarisations p et s.

2.4.2 Coefficients de Fresnel

La symétrie du problème (voir la figure 2.1) nous incite à distinguer les cas de deux polarisations linéaires : la polarisation “p”, ou transverse magnétique (TM), pour laquelle le champ électrique est parallèle au plan d’incidence (figure 2.2(a)), et la polarisation “s”, ou transverse électrique (TE), pour laquelle le champ électrique est perpendiculaire au plan d’incidence (figure 2.2(b)).

Dans la suite de ce paragraphe, les polarisations des champs étant fixées, nous nous intéresserons à leurs amplitudes scalaires notées \mathcal{E}_i , \mathcal{H}_i , etc... Dans le cas d’une onde polarisée p, la relation de continuité (2.50) entraîne

$$\mathcal{E}_i \cos \theta_i - \mathcal{E}_r \cos \theta_r = \mathcal{E}_t \cos \theta_t . \quad (2.58)$$

De même, l’équation (2.51) donne

$$\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_t . \quad (2.59)$$

L’équation (2.35) permet de transformer cette dernière équation en

$$Z_2 (\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r) = Z_1 \mathcal{E}_t . \quad (2.60)$$

En combinant les équations (2.58) et (2.60), on obtient finalement les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la polarisation p :

$$r_p = \left[\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \right]_p = \frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} , \quad (2.61)$$

$$t_p = \left[\frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \right]_p = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} . \quad (2.62)$$

De la même manière, les relations de continuité donnent, dans le cas d’une onde polarisée s :

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_t , \quad (2.63)$$

$$\mathcal{H}_i \cos \theta_i - \mathcal{H}_r \cos \theta_r = \mathcal{H}_t \cos \theta_t . \quad (2.64)$$

En utilisant (2.35), l'équation (2.64) peut être transformée en :

$$Z_2 (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r) \cos \theta_i = Z_1 \mathcal{E}_t \cos \theta_t . \quad (2.65)$$

A nouveau, en combinant (2.63) et (2.65), on obtient les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la polarisation s :

$$r_s = \left[\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \right]_s = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} , \quad (2.66)$$

$$t_s = \left[\frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \right]_s = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} . \quad (2.67)$$

A l'incidence normale ($\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$), les polarisations s et p sont équivalentes, et les équations (2.66) et (2.67) deviennent ² :

$$r = \left[\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \right] = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} , \quad (2.68)$$

$$t = \left[\frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \right] = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} . \quad (2.69)$$

En particulier, dans le cas où $\mu_1 = \mu_2$, on obtient grâce à l'équation (2.35) :

$$r = \left[\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \right] = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} , \quad (2.70)$$

$$t = \left[\frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \right] = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} . \quad (2.71)$$

2.4.3 Bilan énergétique

Le coefficient de réflexion en énergie est donné par

$$R = \left| \frac{\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right| . \quad (2.72)$$

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donnée par :

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = 2 \operatorname{Re} [\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^*] = \frac{2}{Z} \|\boldsymbol{\mathcal{E}}\|^2 \hat{\mathbf{k}} . \quad (2.73)$$

Le module de la projection de $\hat{\mathbf{k}}$ sur $\hat{\mathbf{n}}$ étant la même pour les faisceaux incident et réfléchi, on obtient finalement :

$$R = \left| \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} \right|^2 = |r|^2 . \quad (2.74)$$

En appliquant ce résultat aux équations (2.61) et (2.66), on obtient finalement :

$$R_p = \left(\frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} \right)^2 , \quad (2.75)$$

$$R_s = \left(\frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} \right)^2 . \quad (2.76)$$

2. Le signe moins qui apparaît dans les équations (2.61) et (2.62) par rapport aux équations (2.66) et (2.67) à incidence normale n'est dû qu'aux conventions prises pour les champs (voir la figure 2.2).

Le coefficient de transmission en énergie est obtenu grâce à :

$$T = \left\| \frac{\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right\| = \frac{Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i} \left| \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \right|^2 . \quad (2.77)$$

En utilisant les équations (2.62) et (2.67), on obtient alors :

$$T_p = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t)^2} , \quad (2.78)$$

$$T_s = \frac{4Z_1 Z_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t)^2} . \quad (2.79)$$

On peut bien sûr vérifier que dans les deux cas on obtient

$$R + T = 1 . \quad (2.80)$$

2.5 Réflexion à l'interface entre deux diélectriques

Nous considérons dans cette partie le cas où les deux milieux sont des diélectriques ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). En utilisant l'équation (2.35), les équations (2.61) et (2.66) deviennent :

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} , \quad (2.81)$$

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} . \quad (2.82)$$

En utilisant la loi de Snell-Descartes $n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i$, ces expressions peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$r_s = \frac{\cos \theta_i \sin \theta_t - \cos \theta_t \sin \theta_i}{\cos \theta_i \sin \theta_t + \cos \theta_t \sin \theta_i} = \frac{-\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} , \quad (2.83)$$

$$r_p = \frac{\cos \theta_i \sin \theta_i - \cos \theta_t \sin \theta_t}{\cos \theta_i \sin \theta_i + \cos \theta_t \sin \theta_t} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} . \quad (2.84)$$

Nous allons dans la suite nous intéresser à l'évolution des coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence.

2.5.1 Cas où $n_1 < n_2$

La figure 2.3 représente l'évolution de $|r_s|$, $|r_p|$ et de leurs arguments dans le cas où $n_1 < n_2$.

Les polarisations s et p ont des comportements différents : la polarisation s voit son coefficient de réflexion augmenter de façon monotone en fonction de θ_i , jusqu'à atteindre la valeur 1 en incidence rasante. En revanche, $|r_p|$, qui est toujours inférieur à $|r_s|$, s'annule pour $\theta_i = \theta_B$, c'est-à-dire à l'angle de Brewster est donné par :

$$\theta_B = \arctan \left(\frac{n_2}{n_1} \right) . \quad (2.85)$$

Cet angle correspond aussi à un saut de phase de π (ou un changement de signe de r) pour la polarisation p.

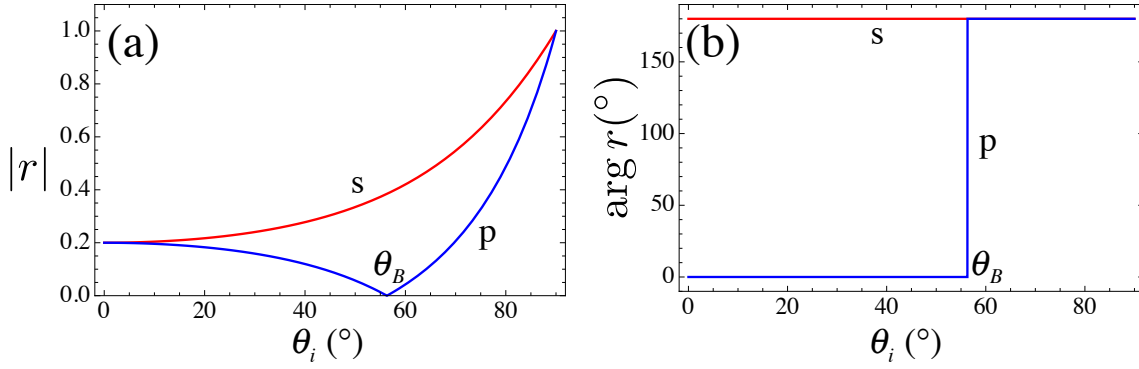


FIGURE 2.3 – Evolution du module (a) et du déphasage (b) associés aux coefficients de réflexion pour les polarisations s et p avec $n_1 = 1$ et $n_2 = 1.5$.

2.5.2 Cas où $n_2 < n_1$

Dans le cas contraire où $n_2 < n_1$, les coefficients de réflexion et le déphasage associé ont des comportements qualitativement différents, comme le montre la figure 2.4.

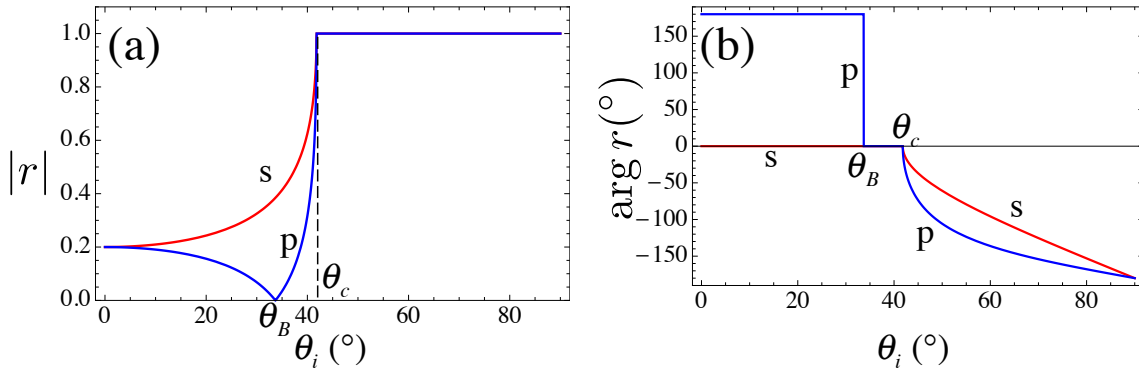


FIGURE 2.4 – Evolution du module (a) et du déphasage (b) associés aux coefficients de réflexion pour les polarisations s et p avec $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 1$.

On observe en effet qu'au-delà d'un certain angle θ_c , appelé l'angle critique, on a $|r_s| = |r_p| = 1$. On dit qu'il y a *réflexion totale*. Les valeurs de θ_i pour lesquelles il y a réflexion totale correspondent aux angles d'incidence pour lesquels la loi de Snell-Descartes (2.57) n'a plus de solution réelle pour θ_2 . On a par conséquent :

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad (2.86)$$

Pour $\theta_i \geq \theta_c$, les coefficients de réflexion r_s et r_p prennent la forme $\exp(i\varphi_s)$ et $\exp(i\varphi_p)$, les déphasages φ_s et φ_p étant représentés sur la figure 2.4(b). L'onde présente dans le milieu 2 prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{E}_t \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} \\ &= \mathcal{E}_t \exp[-i(\omega t - k_{tx}x - k_{tz}z)] + \text{c.c.} . \end{aligned} \quad (2.87)$$

La composante suivant x du vecteur d'onde doit être continue au passage de l'interface (voir 2.56), ce qui entraîne :

$$k_{tz}^2 = k_2^2 - k_{tx}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) < 0, \quad \text{pour } \theta_i > \theta_c. \quad (2.88)$$

Dans ce régime, nous définissons par conséquent κ par

$$k_{tz} = i\kappa, \quad (2.89)$$

avec

$$\kappa = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}. \quad (2.90)$$

Le champ transmis devient alors, en vertu de l'équation (2.87) :

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_t \exp(-\kappa z) \exp[-i(\omega t - k_{tx}x)] + \text{c.c.} \quad (2.91)$$

Cette équation montre que le champ transmis ne se propage que selon la direction x , c'est-à-dire le long de l'interface. En revanche, il n'y a pas de propagation dans la direction z . Le long de cette direction, l'amplitude du champ décroît exponentiellement, avec une profondeur de pénétration de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. De plus, on observe que la composante suivant z du vecteur de Poynting dans le milieu 2 est nulle, ce qui est logique en situation de réflexion totale. Ce type d'onde s'appelle une *onde évanescente*, et joue un grand rôle dans les microscopies en champ proche.

2.6 Le Fabry-Perot

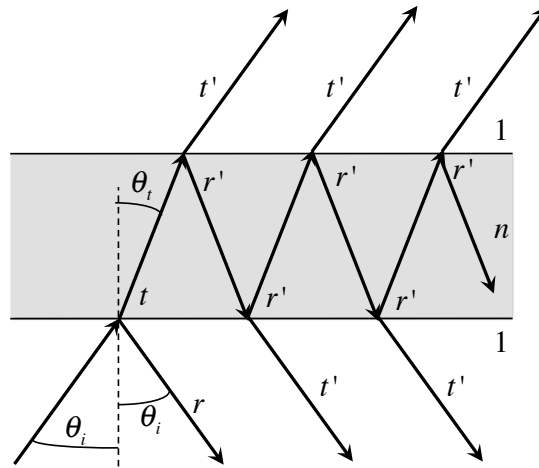


FIGURE 2.5 – Onde plane incidente sur une couche diélectrique.

Considérons maintenant une lame diélectrique à faces parallèles d'épaisseur d et d'indice n plongée dans le vide (voir la figure 2.5). Une onde plane monochromatique de

pulsation ω et d'amplitude complexe \mathbf{E}_i est incidente sur la structure avec un angle d'incidence θ_i . Alors l'amplitude complexe du champ transmis est la somme de toutes les ondes qui émergent de la structure après p allers-retours dans la lame, avec $p = 0, \dots, \infty$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t &= \mathcal{E}_i \left(tt' + tr'r't'e^{i\Delta\phi} + t(r'r')^2t'e^{i2\Delta\phi} + \dots \right) e^{i\Delta\phi/2} \\ &= \mathcal{E}_i tt' e^{i\Delta\phi/2} \sum_{p=0}^{\infty} (r'r')^{2p} e^{ip\Delta\phi} = \mathcal{E}_i \frac{tt' e^{i\Delta\phi/2}}{1 - r'^2 e^{i\Delta\phi}}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

où r et r' (t et t') sont les coefficients de réflexion (transmission) de l'interface air-diélectrique pour les deux sens de propagation et où $\Delta\phi$ est le déphasage accumulé par l'onde au cours d'un aller-retour dans la lame.

2.6.1 Relations de Stokes

Avant de continuer, examinons les relations qui existent entre les coefficients de réflexion et de transmission r , r' , t et t' . Dans ce but considérons une seule des interfaces de la figure 2.5, de coefficients de réflexion et de transmission r et t comme le montre la figure 2.6(a), et supposons que le système ne présente aucune perte. Dans ce cas, comme le montre la figure 2.6(b), imaginons que nous envoyons deux ondes des deux côtés de l'interface, d'amplitudes proportionnelles à r et t . Comme cette situation correspond à un renversement du temps par rapport à celle de la figure 2.6(a), l'onde transmise dans le vide doit avoir une amplitude de 1 et il ne doit pas y avoir d'onde réfléchie ou transmise dans le diélectrique. Or la situation de la figure 2.6(b) peut être vue comme le résultat de l'interférence entre les situations des figures 2.5(c) et 2.5(d). Nous pouvons donc déduire de cette équivalence

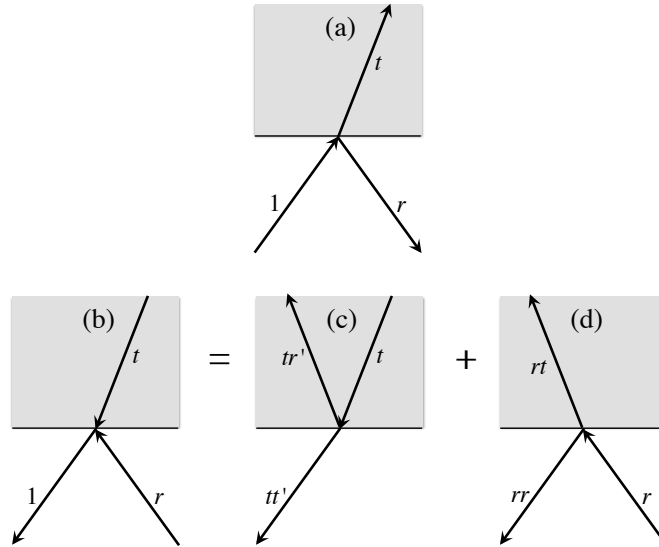


FIGURE 2.6 – Onde plane incidente sur une couche diélectrique.

les relations de Stokes :

$$r^2 + tt' = 1, \quad (2.93)$$

$$tr' + rt = 0. \quad (2.94)$$

De ces deux relations nous déduisons :

$$r = -r', \quad (2.95)$$

$$tt' = 1 - r^2 = 1 - R. \quad (2.96)$$

Ces deux relations, qui peuvent être vues comme une conséquence de la conservation de l'énergie par la lame, sont évidemment vérifiées par les coefficients de Fresnel que nous avons calculés précédemment. Le signe moins dans l'équation (2.95) joue un rôle essentiel dans de nombreux phénomènes d'optique classique et quantique.

2.6.2 Transmission du Fabry-Perot

En utilisant les équations (2.95) et (2.96), nous pouvons écrire la transmission en intensité du Fabry-Perot à partir du module au carré de (2.92) sous la forme :

$$\mathcal{T} = \left| \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\Delta\phi/2)}. \quad (2.97)$$

Le déphasage $\Delta\phi$ accumulé par l'onde sur un aller-retour peut être exprimé en fonction de l'angle interne θ_t :

$$\Delta\phi = 2n \frac{\omega}{c} d \cos \theta_t. \quad (2.98)$$

Expérimentalement, on peut donc varier $\Delta\phi$ en changeant l'angle d'incidence sur la lame. L'évolution de la transmission de la lame en fonction de $\Delta\phi$ est représentée sur la figure 2.7 pour différentes valeurs de R . On constate que l'interféromètre de Fabry-Perot transmet

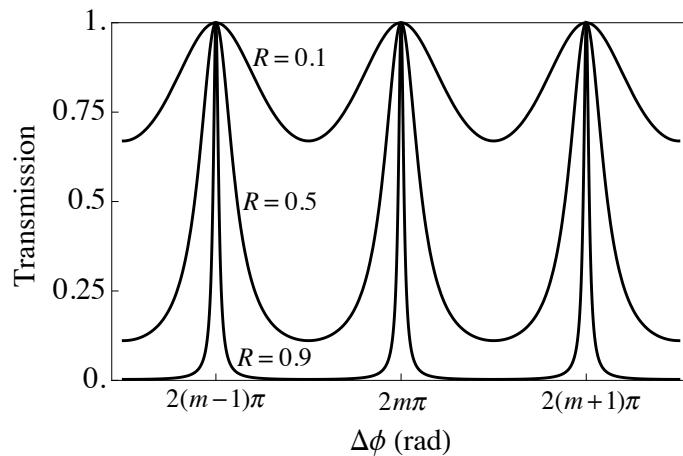


FIGURE 2.7 – Transmission du Fabry-Perot.

toute la lumière incidente quand $\Delta\phi$ est égal à un nombre entier de fois 2π , c'est-à-dire quand la longueur optique parcourue par la lumière au cours d'un aller-retour dans la

lame est égale à un nombre entier de fois la longueur d'onde, garantissant le caractère constructif du résultat de l'interférence des ondes partiellement transmises. A une telle résonance, la réflexion de la lame devient bien sûr nulle.

La largeur des pics de transmission de la figure 2.7, également appelés *pics d'Airy*, est caractérisée par la *finesse* du Fabry-Perot, qui est le rapport entre la distance entre deux pics et la largeur totale à mi-hauteur d'un pic. Elle vaut, quand la condition $1 - R \ll 1$ est respectée :

$$\mathcal{F} \approx \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R} . \quad (2.99)$$

L'interféromètre de Fabry-Perot joue un rôle important dans différents champs d'application, comme la spectroscopie, la métrologie optique ou le contrôle du spectre des lasers.

Complement 2A

Pression de radiation

Une onde progressive transporte de l'impulsion. Par conséquent, quand tout ou partie de cette onde est réfléchiée ou absorbée par un matériau, il s'exerce un transfert d'impulsion entre le champ et le milieu. La force qu'exerce la lumière sur le corps considéré s'appelle la pression de radiation. Le calcul de cette effet exploite la loi de conservation de l'impulsion qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial \mathbf{g}_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{T} . \quad (2A.1)$$

Dans cette équation, \mathbf{f} est la densité de force de Minkowski, définie par :

$$\mathbf{f} = \rho_l \mathbf{E} + \mathbf{j}_l \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon - \frac{1}{2} H^2 \nabla \mu , \quad (2A.2)$$

où ρ_l et \mathbf{j}_l sont les densités de charges et courants libres. \mathbf{g}_{EM} est la densité d'impulsion selon la définition de Minkowski ¹ :

$$\mathbf{g}_{EM} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \varepsilon \mu \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \varepsilon \mu \mathbf{S} . \quad (2A.3)$$

Finalement, \mathcal{T} est le tenseur (dyadique) des contraintes électromagnétiques, défini par ses composantes cartésiennes :

$$\mathcal{T}_{ij} = D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) . \quad (2A.4)$$

En intégrant l'équation (2A.1) sur un volume V fermé par une surface S , on obtient la force exercée sur ce volume :

$$\mathbf{F} = - \int_V d^3r \frac{\partial \mathbf{g}_{EM}}{\partial t} + \int_S dS \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathcal{T} , \quad (2A.5)$$

Considérons la situation représentée en figure 2A.1, où une onde plane monochromatique arrive en incidence normale sur une interface plane avec un milieu diélectrique. Dans le cas général, l'onde est partiellement réfléchiée. Pour calculer la pression de radiation

1. Il y a une importante controverse quant à la définition de la densité d'impulsion du champ dans un milieu matériel. Le résultat du présent calcul de la pression de radiation ne dépend pas de la définition de \mathbf{g} . Voir par exemple A. Zangwill, *op. cit.*

exercée par l'onde sur l'interface avec le diélectrique, nous allons prendre la moyenne temporelle de l'équation (2A.5). Comme l'onde que nous considérons est monochromatique, $\left\langle \frac{\partial \mathbf{g}_{\text{EM}}}{\partial t} \right\rangle$ s'annule en tout point, et la composante suivant j de la valeur moyenne de la force s'écrit ² :

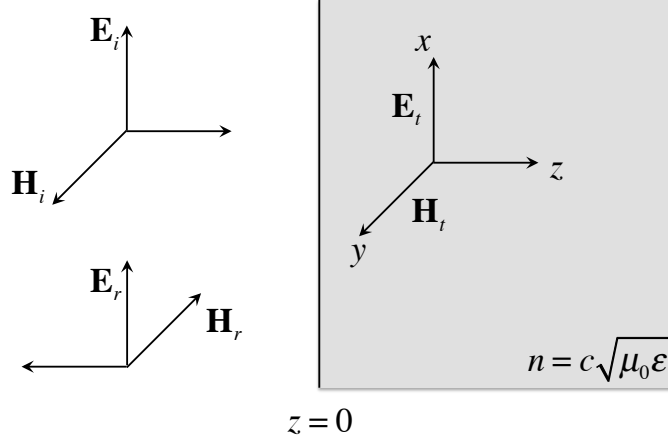


FIGURE 2A.1 – Ondes incidente, réfléchi et transmise par l'interface avec un diélectrique simple, et exerçant une pression de radiation sur ce diélectrique.

$$\langle F_j \rangle = \int_S dA n_k \langle \mathcal{T}_{kj} \rangle . \quad (2A.6)$$

Le volume d'intégration considéré ici est un volume limité par les plans $z = 0^+$ et $z = 0^-$ entourant l'interface.

Compte tenu des polarisations des champs (voir la figure 2A.1) et du fait que les milieux considérés sont isotropes, la moyenne du tenseur des contraintes s'écrit :

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \begin{pmatrix} \varepsilon \|\mathcal{E}\|^2 - \mu \|\mathcal{H}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \|\mathcal{E}\|^2 + \mu \|\mathcal{H}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \|\mathcal{E}\|^2 - \mu \|\mathcal{H}\|^2 \end{pmatrix} . \quad (2A.7)$$

Par conséquent, la pression de radiation moyennée sur une aire A du plan $z = 0$ vaut :

$$\langle P_{\text{rad}} \rangle = \frac{\langle F_z \rangle}{A} = \langle \mathcal{T}_{zz}(z = 0^+) \rangle - \langle \mathcal{T}_{zz}(z = 0^-) \rangle . \quad (2A.8)$$

Afin de calculer ces deux termes, nous exprimons les champs dans les deux régions de l'espace en fonction des champs définis dans la figure 2A.1 :

$$\mathcal{E}_x(z = 0^-) = \mathcal{E}_i(z = 0^-) + \mathcal{E}_r(z = 0^-) , \quad (2A.9)$$

$$\mathcal{H}_y(z = 0^-) = \mathcal{H}_i(z = 0^-) - \mathcal{H}_r(z = 0^-) , \quad (2A.10)$$

$$\mathcal{E}_x(z = 0^+) = \mathcal{E}_t(z = 0^+) , \quad (2A.11)$$

$$\mathcal{H}_y(z = 0^+) = \mathcal{H}_t(z = 0^+) . \quad (2A.12)$$

2. Nous adoptons, quand elle n'est pas ambiguë, la convention de sommation d'Einstein sur les indices muets apparaissant deux fois, comme par exemple k dans l'équation (2A.6).

En utilisant l'équation (2.35), on obtient alors

$$\langle \mathcal{T}_{zz}(z = 0^-) \rangle = -2\varepsilon_0 \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_i\|^2 - 2\varepsilon_0 \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_r\|^2, \quad (2A.13)$$

$$\langle \mathcal{T}_{zz}(z = 0^+) \rangle = -2\varepsilon \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_t\|^2, \quad (2A.14)$$

ce qui permet de réexprimer l'équation (2A.8) sous la forme :

$$\langle P_{\text{rad}} \rangle = 2\varepsilon_0 \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_i\|^2 \left(1 + \left\| \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}_r}{\boldsymbol{\mathcal{E}}_i} \right\|^2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left\| \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}_t}{\boldsymbol{\mathcal{E}}_i} \right\|^2 \right). \quad (2A.15)$$

On peut exprimer la pression de radiation en fonction de l'intensité incidente (voir l'équation 2.73)

$$I_i = \|\langle \mathbf{S}_i \rangle\| = \frac{2}{Z_0} \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_i\|^2 \quad (2A.16)$$

et des coefficients de réflexion et de transmission R et T définis par les équations (2.74) et (2.80), pour obtenir :

$$\langle P_{\text{rad}} \rangle = \frac{I_0}{c} (1 + R - nT). \quad (2A.17)$$

En remplaçant R et T par leurs expressions déduites des équations (2.70) et (2.71), on obtient finalement :

$$\langle P_{\text{rad}} \rangle = -2 \frac{I_0}{c} \frac{n-1}{n+1}. \quad (2A.18)$$

Le signe moins dans cette expression indique que, dans le cas où $n > 1$, la contribution à la pression de radiation exercée par l'onde transmise est plus forte que celle due aux ondes incidente et réfléchie.

Dans le cas où le milieu qui occupe le demi-espace $z > 0$ absorbe toute l'énergie transmise, l'équation (2A.17) se simplifie pour donner :

$$\langle P_{\text{rad}} \rangle = \frac{I_0}{c} (1 + R). \quad (2A.19)$$

En particulier, si la réflexion est totale ($R = 1$) cette expression devient $2\frac{I_0}{c}$: le double de l'impulsion de la lumière incidente est communiqué au réflecteur, par l'action duquel le sens de propagation du champ s'inverse.

Complement 2B

Ondes dans une structure multi-couche diélectrique

Le Fabry-Perot que nous avons vu au paragraphe 2.6 est un premier exemple de structure multi-couche. Des structures plus compliquées sont utilisées par exemple en optique pour réaliser des miroirs, des filtres, des traitements anti-reflet, etc.

Il est bien sûr hors de question, dans une structure multi-couche, de calculer le champ transmis en ajoutant les réflexions partielles à toutes les interfaces. On utilise plutôt un formalisme basé sur les matrices de transfert des champs, tel que décrit ci-dessous.

2B.1 Formalisme des matrices de transfert

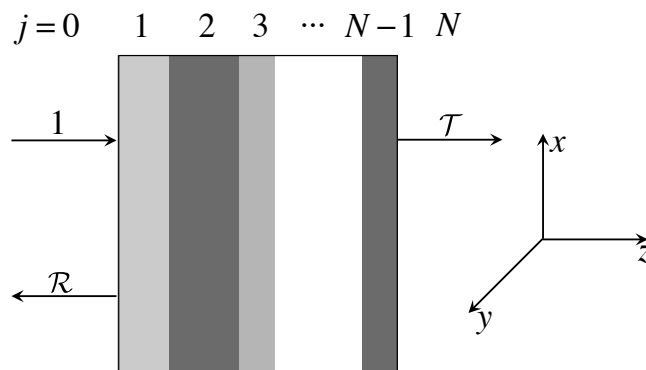


FIGURE 2B.1 – Structure multi-couche.

Considérons la structure composée de $N + 1$ couches planes diélectriques empilées perpendiculairement à l'axe z représentée sur la figure 2B.1. La première couche $j = 0$ est en fait le milieu de gauche qui s'étend depuis $z = -\infty$, et la dernière couche $j = N + 1$ est le milieu de droite qui s'étend jusqu'à $z = +\infty$. Par souci de simplicité, nous considérons une onde incidente depuis $z = -\infty$ polarisée selon x et arrivant à incidence normale. Notre but est de calculer la transmission \mathcal{T} et la réflectivité \mathcal{R} de la structure.

La couche j (voir la figure 2B.2) a un indice de réfraction n_j et une épaisseur d_j . Les

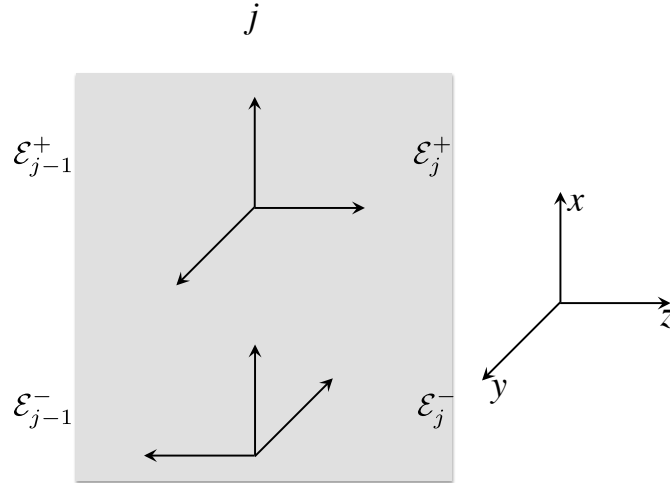


FIGURE 2B.2 – Une des couches de l’empilement de la figure 2B.1.

champs électrique et magnétique s’y propagent dans les deux sens, avec les polarisations symbolisées par les trièdres de la figure 2B.2. Nous repérons les champs dans la couche j par leurs amplitudes complexes \mathcal{E}_j^+ , \mathcal{E}_j^- , \mathcal{H}_j^+ et \mathcal{H}_j^- prises à droite de la couche. Comme les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont tangentiels aux interfaces, leurs amplitudes doivent être continues aux interfaces. Ecrivons cette condition de continuité pour l’interface séparant la couche $j - 1$ de la couche j :

$$\mathcal{E}_{j-1} \equiv \mathcal{E}_{j-1}^+ + \mathcal{E}_{j-1}^- = \mathcal{E}_j^+ e^{-i\phi_j} + \mathcal{E}_j^- e^{i\phi_j} , \quad (2B.1)$$

$$\mathcal{H}_{j-1} \equiv \mathcal{H}_{j-1}^+ + \mathcal{H}_{j-1}^- = \mathcal{H}_j^+ e^{-i\phi_j} + \mathcal{H}_j^- e^{i\phi_j} , \quad (2B.2)$$

où nous avons introduit le déphasage accumulé à la traversée de la couche j :

$$\phi_j = n_j \frac{\omega}{c} d_j . \quad (2B.3)$$

Les amplitudes complexes de \mathbf{E} et \mathbf{H} sont reliées par les relations (voir la figure 2B.2 et l’équation 2.35) :

$$Z_j \mathcal{H}_j^+ = \mathcal{E}_j^+ , \quad (2B.4)$$

$$Z_j \mathcal{H}_j^- = -\mathcal{E}_j^- . \quad (2B.5)$$

En combinant les équations (2B.1, 2B.2) avec les équations (2B.3, 2B.5), on peut relier les champs dans la couche $j - 1$ aux champs dans la couche j :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{j-1} \\ \mathcal{H}_{j-1} \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} \mathcal{E}_j \\ \mathcal{H}_j \end{pmatrix} , \quad (2B.6)$$

où la *matrice de transfert* M_j est donnée par :

$$M_j = \begin{pmatrix} \cos \phi_j & -iZ_j \sin \phi_j \\ -iZ_j^{-1} \sin \phi_j & \cos \phi_j \end{pmatrix} . \quad (2B.7)$$

Par conséquent, en considérant l'ensemble de la structure de la figure 2B.1, les champs d'entrée de sortie sont reliés par :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{H}_0 \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^N M_j \begin{pmatrix} \mathcal{E}_N \\ \mathcal{H}_N \end{pmatrix}, \quad (2B.8)$$

Dans le cas schématisé en figure 2B.1 où on n'envoie un champ que du côté gauche, on a :

$$\mathcal{E}_0^+ = 1, \quad (2B.9)$$

$$\mathcal{E}_0^- = \mathcal{R}, \quad (2B.10)$$

$$Z_0 \mathcal{H}_0^+ = 1, \quad (2B.11)$$

$$Z_0 \mathcal{H}_0^- = -\mathcal{R}, \quad (2B.12)$$

$$\mathcal{E}_N^+ = \mathcal{T}, \quad (2B.13)$$

$$\mathcal{E}_N^- = 0, \quad (2B.14)$$

ce qui permet finalement de réécrire (2B.8) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 + \mathcal{R} \\ (1 - \mathcal{R})Z_0^{-1} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^N M_j \begin{pmatrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}Z_N^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2B.15)$$

On peut alors facilement résoudre ce système de deux équations linéaires à deux inconnues pour extraire \mathcal{R} et \mathcal{T} .

2B.2 Exemple d'application : le miroir de Bragg

Nous pouvons illustrer l'utilité de ce formalisme des matrices de transfert dans une situation particulièrement importante du point de vue des applications, celle du miroir de Bragg.

Un tel miroir consiste en M paires identiques de couches de deux matériaux d'indices n_A et n_B et d'épaisseurs d_A et d_B , respectivement. Le but d'un miroir de Bragg est d'optimiser la réflectivité. Or l'équation (2.70) montre que le coefficient de réflexion à l'interface séparant le milieu A du milieu B est $\frac{n_A - n_B}{n_A + n_B}$. En inversant A et B, on voit que la réflexion sur l'interface suivante est déphasée de π . Si on veut par conséquent que les ondes réfléchies par toutes les interfaces interfèrent constructivement, il faut que la propagation le long d'un aller-retour dans chaque couche corresponde aussi à un changement de signe, c'est-à-dire que ϕ_A et ϕ_B , définis par (2B.3) soient tous les deux des multiples impairs de $\pi/2$.

Supposons dans un premier temps que les deux couches de chaque paire ont même épaisseur optique, c'est-à-dire :

$$\phi \equiv \phi_A = \phi_B. \quad (2B.16)$$

On peut alors réécrire (2B.15) avec :

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N M_j &= \left[\begin{pmatrix} \cos \phi & -iZ_A \sin \phi \\ -iZ_A^{-1} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -iZ_B \sin \phi \\ -iZ_B^{-1} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \right]^M \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \phi - \frac{Z_A}{Z_B} \sin^2 \phi & -i(Z_A + Z_B) \sin \phi \cos \phi \\ -i \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} \right) \sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi - \frac{Z_B}{Z_A} \sin^2 \phi \end{pmatrix}^M. \end{aligned} \quad (2B.17)$$

Dans le cas qui nous intéresse plus particulièrement où $\phi = \pi/2$, cette matrice devient diagonale :

$$\prod_{j=1}^N M_j = \begin{pmatrix} -\frac{Z_A}{Z_B} & 0 \\ 0 & -\frac{Z_B}{Z_A} \end{pmatrix}^M = \begin{pmatrix} -\frac{n_B}{n_A} & 0 \\ 0 & -\frac{n_A}{n_B} \end{pmatrix}^M. \quad (2B.18)$$

En supposant que les milieux d'entrée et de sortie sont identiques, on a $Z_0 = Z_N$, et l'équation (2B.15) permet finalement d'obtenir, en éliminant \mathcal{T} :

$$\mathcal{R} = \frac{\left(\frac{n_B}{n_A}\right)^{2M} - 1}{\left(\frac{n_B}{n_A}\right)^{2M} + 1}. \quad (2B.19)$$

On voit bien qu'en effet, $\mathcal{R} \rightarrow \pm 1$ quand $M \gg 1$. C'est cette structure de miroirs qui est utilisée pour les miroirs de cavités laser ou d'interféromètres de Fabry-Perot de grande finesse. Le choix de deux matériaux présentant un fort contraste d'indices permet de limiter le nombre de paires de couches, et par conséquent d'atteindre une forte réflexion sans être limité par les pertes des matériaux.

Complement 2C

Ondes planes dans les conducteurs

Les conducteurs jouent aussi un rôle important en optique. Ils sont en effet utilisés pour réaliser des miroirs à large bande spectrale, ou dans des domaines de longueur d'onde dans lesquels les matériaux diélectriques deviennent absorbants.

2C.1 Modèle de conducteur simple

Au paragraphe 2.3.2, nous avons déjà introduit une forme d'absorption due à la partie imaginaire de la permittivité diélectrique. Nous considérons maintenant un conducteur simple, c'est-à-dire un milieu homogène isotrope sans charges libres défini par les relations constitutives suivantes :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} , \quad (2C.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} , \quad (2C.2)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} , \quad (2C.3)$$

où σ est la conductivité du milieu. A partir des équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 , \quad (2C.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (2C.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (2C.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , \quad (2C.7)$$

on obtient la même équation de propagation pour \mathbf{E} et \mathbf{H} :

$$\left(\nabla^2 - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 , \quad (2C.8)$$

$$\left(\nabla^2 - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = 0 . \quad (2C.9)$$

En suivant une démarche similaire à celle aboutissant à l'équation (2.45), on obtient le théorème de Poynting dans un volume V d'un tel milieu, qui montre que le travail exercé

par le champ sur les courants dissipe par effet Joule une puissance égale à :

$$\frac{dW}{dt} = \int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \int_V d^3r \|\mathbf{E}\|^2 . \quad (2C.10)$$

2C.2 Propagation d'une onde plane monochromatique

Comme dans le cas du milieu diélectrique parfait, on cherche des solutions sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} , \quad (2C.11)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} . \quad (2C.12)$$

En injectant ces champs dans les équations de Maxwell (2C.4-2C.7), on obtient :

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0 , \quad (2C.13)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{H} = 0 , \quad (2C.14)$$

$$\mathbf{k} \times \mathcal{E} = \omega \mu \mathcal{H} , \quad (2C.15)$$

$$\mathbf{k} \times \mathcal{H} = -(\omega \varepsilon + i\sigma) \mathcal{E} . \quad (2C.16)$$

La dernière de ces équations nous incite à remplacer la permittivité réelle ε par la permittivité complexe $\hat{\varepsilon}$ définie par :

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon' + i\varepsilon'' . \quad (2C.17)$$

Nous allons donc être amenés à définir un indice complexe

$$\hat{n}(\omega) = n' + in'' , \quad (2C.18)$$

qui va dépendre de ω . Ainsi même dans le cas d'un conducteur "sans dispersion", c'est-à-dire pour lequel ε , μ et σ ne dépendent pas de la fréquence, le milieu devient dispersif au sens où son indice de réfraction dépend de la fréquence.

En prenant $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ complexe, de longueur \hat{k} complexe, la relation de dispersion du milieu s'obtient à partir des équations (2C.15) et (2C.16) :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \hat{k}^2 = \mu \hat{\varepsilon}(\omega) \omega^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + i\mu \sigma \omega \equiv \hat{n}^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (2C.19)$$

On obtient donc

$$k'^2 - k''^2 = \mu \varepsilon \omega^2 , \quad (2C.20)$$

$$2\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = \sigma \mu \varepsilon . \quad (2C.21)$$

A ce stade, on suppose que \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' sont colinéaires, ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{k} = \hat{k} \hat{\mathbf{k}} = (n' + in'') \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} , \quad (2C.22)$$

et, en utilisant les équations (2C.15) et (2C.16) que les champs restent transverses :

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0, \quad (2C.23)$$

$$\hat{Z}\mathcal{H} = \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad (2C.24)$$

où l'impédance complexe est donnée par

$$\hat{Z}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\hat{\varepsilon}(\omega)}}. \quad (2C.25)$$

Finalement, le champ électrique de l'onde (2C.11) s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\mathcal{E}} e^{-n'' \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} \exp[-i(\omega t - \frac{\omega}{c} n' \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} \quad (2C.26)$$

L'amplitude de ce champ s'amortit au cours de la propagation. On peut définir le coefficient d'absorption linéique pour l'intensité :

$$\alpha = 2n'' \frac{\omega}{c}. \quad (2C.27)$$

Finalement, les équations (2C.18) et (2C.19) permettent de déduire les relations suivantes :

$$n'^2 - n''^2 = \mu \varepsilon c^2, \quad (2C.28)$$

$$2n' n'' = \mu \sigma \frac{c^2}{\omega}, \quad (2C.29)$$

d'où on déduit les parties réelle et imaginaire de l'indice :

$$n' = c \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad (2C.30)$$

$$n'' = c \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}. \quad (2C.31)$$

2C.3 Effet de peau dans un “bon conducteur”

L'équation (2C.26) correspond à un champ dont l'intensité diverge quand $z \rightarrow +\infty$. Elle ne convient donc pas pour un milieu conducteur infini. En revanche, elle peut parfaitement avoir un sens physique pour une onde réfractée dans un milieu métallique qui occupe le demi-espace $z > 0$ et provenant du vide qui occupe l'autre demi-espace $z < 0$. Nous supposons ici que notre conducteur est ce qu'on appelle un “bon conducteur”, c'est-à-dire qu'il obéit à l'approximation¹

$$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1. \quad (2C.32)$$

Dans ce cas, les équations (2C.30) et (2C.31) deviennent :

$$n' \approx n'' \approx c \sqrt{\frac{\mu \sigma}{2\omega}} = \frac{c/\omega}{\delta(\omega)} \gg 1, \quad (2C.33)$$

1. Cette approximation, supposant que σ ne dépend pas de la fréquence, est plutôt valable aux basses fréquences.

où on a introduit la profondeur de peau :

$$\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}. \quad (2C.34)$$

De même que l'indice, les parties imaginaire et réelle de l'impédance du milieu ont quasiment les mêmes valeurs, en effet :

$$\hat{Z}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon + i\sigma/\omega}} \approx \sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{-i\pi/4} = \frac{1-i}{\sigma\delta}. \quad (2C.35)$$

Comme n' est grand devant 1, la loi de Snell-Descartes suggère que l'onde réfractée dans le conducteur se propage quasiment perpendiculairement à la surface, quel que soit l'angle d'incidence. Le champ (2C.26) dans le conducteur est donc tangentiel à la surface et s'écrit, en utilisant (2C.33) et (2C.35) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right] + \text{c.c.}, \quad (2C.36)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sigma\delta}{1-i} \hat{\mathbf{z}} \times \mathcal{E} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right] + \text{c.c.}. \quad (2C.37)$$

Ces équations montrent plusieurs choses : i) la vitesse de phase de l'onde dans le conducteur, égale à c/n' , est très petite devant c ; ii) le champ s'amortit très vite, et ne pénètre le conducteur que sur une profondeur de l'ordre de δ ; iii) le champ magnétique est beaucoup plus intense que dans un milieu non conducteur.

2C.4 Réflexion sur un bon conducteur

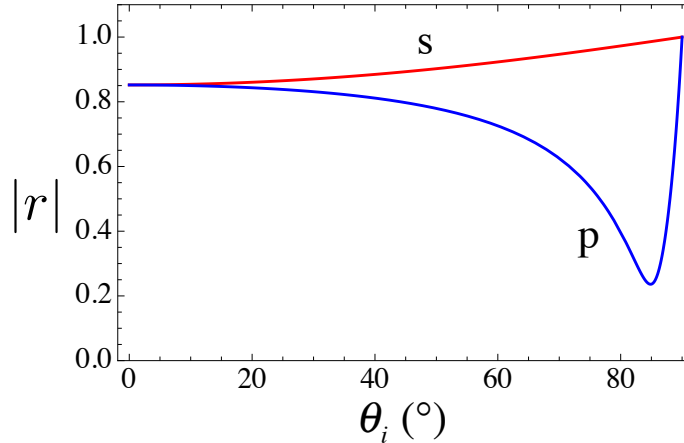


FIGURE 2C.1 – Evolution des modules des coefficients de réflexion pour les polarisations s et p avec $n_1 = 1$ et $\hat{n}_2 = 10.0 + i5.0$.

Les lois de Fresnel dérivées au paragraphe 2.4.2 restent valables pour des impédances complexes $\hat{Z} = \mu c/\hat{n}$. Les coefficients de Fresnel deviennent alors complexes :

$$\hat{r}_p = \frac{\hat{Z}_1 \cos \theta_i - \hat{Z}_2 \cos \theta_t}{\hat{Z}_1 \cos \theta_i + \hat{Z}_2 \cos \theta_t} = \frac{\mu_1 \hat{n}_2 \cos \theta_i - \mu_2 \hat{n}_1 \cos \theta_t}{\mu_1 \hat{n}_2 \cos \theta_i + \mu_2 \hat{n}_1 \cos \theta_t} \quad (2C.38)$$

et

$$r_s = \frac{\hat{Z}_2 \cos \theta_i - \hat{Z}_2 \cos \theta_t}{\hat{Z}_2 \cos \theta_i + \hat{Z}_1 \cos \theta_t} = \frac{\mu_2 \hat{n}_1 \cos \theta_i - \mu_1 \hat{n}_2 \cos \theta_t}{\mu_2 \hat{n}_1 \cos \theta_i + \mu_1 \hat{n}_2 \cos \theta_t}. \quad (2C.39)$$

Supposons que l'onde est incidente depuis un milieu 1 non absorbant, soit $\hat{n}_1 = n_1$. Nous supposons aussi que le milieu 2 est un bon conducteur, donc $n'_2 \approx n''_2 \gg n_1$ et que $\mu_1 = \mu_2$. Evaluons alors le module au carré de (2C.38) ou (2C.39) à incidence normale :

$$R(\omega) = |\hat{r}(\omega)|^2 \approx \frac{1 - n_1/n'_2}{1 + n_1/n'_2} \approx 1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon_1\omega}{\sigma_2}}. \quad (2C.40)$$

Cette relation est connue sous le nom d'équation de Hagen-Rubens.

On peut calculer l'évolution de la réflectivité en fonction de l'angle d'incidence θ_i en utilisant les équations (2C.38) et (2C.39) avec $\theta_t = 0$. La figure 2C.1 montre l'évolution des modules de \hat{r}_s et \hat{r}_p pour $n_1 = 1$ et $\hat{n}_2 = 10.0 + i5.0$. On voit qu'il reste un "pseudo angle de Brewster" pour la polarisation p .

Chapitre 3

Diffraction

3.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons soigneusement évité de parler de la structure spatiale des ondes lumineuses, à part le long de leur direction de propagation. Dans cette partie, nous traitons de la théorie de la diffraction. Les phénomènes de diffraction sont souvent présentés comme des preuves expérimentales du caractère ondulatoire de la lumière. En particulier, la théorie de la diffraction permet de décrire des effets qui vont au-delà de l'optique géométrique, comme la présence de rayonnement dans l'ombre d'un obstacle, ou l'étalement d'un faisceau de lumière collimatée. Notre but ici est d'une part de présenter les théories classiques de la diffraction et d'autre part d'attirer l'attention du lecteur sur quelques effets amusants.

3.2 Equation de Helmholtz

Dans un souci de simplicité, nous considérons dans cette section que la lumière se propage dans le vide. Dans ce cas, n'importe quelle composante E_i du champ électrique d'une onde obéit à l'équation de propagation scalaire, obtenue en combinant les équations (2.18-2.21) avec $\mu = \mu_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$:

$$\nabla^2 E_i(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 . \quad (3.1)$$

$E_i(\mathbf{r}, t)$ est une fonction des trois coordonnées spatiales et du temps. Dans la suite, nous aurons à calculer des transformées de Fourier sur une ou plusieurs de ces variables. Dans tous les cas, que le champ soit dans l'espace réel ou dans l'espace réciproque, ou qu'il soit exprimé en fonction du temps ou de la fréquence, nous continuerons obstinément à le noter E_i . L'espace dans lequel ce champ évolue sera repéré par les variables entre parenthèses.

Commençons par prendre la transformée de Fourier temporelle de E_i^1 :

$$E_i(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt E_i(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}, \quad (3.2)$$

dont l'inverse est

$$E_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega E_i(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (3.3)$$

En prenant la transformée de Fourier temporelle de l'équation de propagation (3.1), on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 E_i(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} E_i(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (3.4)$$

3.3 Diffraction “naturelle” : propagation d'un faisceau à partir d'un plan

Utilisons cette équation de Helmholtz pour exposer le principe de la résolution d'un problème de diffraction dans le vide : nous considérons un faisceau monochromatique qui se propage dans la direction $+z$. A partir de la distribution du champ de ce faisceau dans le plan $z = 0$, nous souhaitons prédire l'évolution du faisceau pour $z > 0$. Pour ce faire, nous remarquons que dans un plan z fixé, $E_i(x, y, z, \omega)$ est une fonction de x et y dont nous pouvons calculer la transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle :

$$E_i(x, y, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dk_x dk_y E_i(k_x, k_y, z, \omega) e^{i(k_x x + k_y y)}. \quad (3.5)$$

En injectant dans l'équation de Helmholtz, on obtient une équation différentielle ordinaire pour $E_i(k_x, k_y, z, \omega)$ vu comme une fonction de z :

$$\frac{\partial^2 E_i(k_x, k_y, z, \omega)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \right) E_i(k_x, k_y, z, \omega) = 0. \quad (3.6)$$

La solution de ce type d'équations est une somme de deux exponentielles :

$$E_i(k_x, k_y, z, \omega) = \alpha(k_x, k_y, \omega) e^{ik_z z} + \beta(k_x, k_y, \omega) e^{-ik_z z}, \quad (3.7)$$

avec

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}, & \text{si } \frac{\omega^2}{c^2} > k_x^2 + k_y^2, \\ \pm i \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Nous nous intéressons ici à un champ qui se propage dans le sens des z croissants, d'où $\beta = 0$. α est obtenu à partir du champ dans le plan initial $z = 0$:

$$E_i(x, y, z = 0, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dk_x dk_y \alpha(k_x, k_y, \omega) e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (3.9)$$

1. Attention : dans ce cours, nous adoptons une convention différente de celle de la mécanique quantique. La raison en est que nous voulons que la transformée de Fourier de la convolution temporelle soit le produit des transformées de Fourier, sans facteur $\sqrt{2\pi}$.

ce qui montre que $\alpha(k_x, k_y, \omega)$ est la transformée de Fourier spatiale de $E_i(x, y, z, \omega)$ dans le plan $z = 0$:

$$\alpha(k_x, k_y, \omega) = E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega) . \quad (3.10)$$

Et le champ en tout point s'écrit finalement :

$$E_i(x, y, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dk_x dk_y E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} . \quad (3.11)$$

Ceci montre donc tout simplement que *le faisceau considéré s'écrit comme une superposition d'ondes planes* dont les vecteurs d'ondes, de composantes (k_x, k_y, k_z) , satisfont la relation de dispersion dans le vide

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (3.12)$$

3.4 Fréquences spatiales et propagation

L'inverse de l'équation (3.9), associée à l'équation (3.10), permet de déterminer la transformée de Fourier spatiale du champ $E_i(x, y, z = 0, \omega)$ dans le plan $z = 0$

$$E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega) = \iint dx dy E_i(x, y, z = 0, \omega) e^{-i(k_x x + k_y y)} . \quad (3.13)$$

Cette décomposition du champ dans le plan $z = 0$ a deux interprétations qui méritent d'être discutées :

- i) $E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega)$ peut être vu comme l'amplitude complexe de l'onde plane de vecteur d'onde transverse donné par k_x, k_y . L'équation (3.11) montre que toutes les composantes d'ondes planes qui constituent le faisceau se propagent indépendamment et que le champ dans un plan z donné est la superposition linéaire de ces ondes planes.
- ii) $E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega)$ peut aussi être vu comme l'amplitude de la composante du champ qui oscille spatialement aux fréquences spatiales $f_x = k_x/2\pi$ et $f_y = k_y/2\pi$ selon les deux directions transverses. Par exemple, une image dans le plan $z = 0$ contiendra surtout des fréquences spatiales proches de $f_x = f_y = 0$ si elle est assez homogène et présente peu de contrastes. En revanche, une image qui présente de rapides variations spatiales de luminosité, comme des petits détails bien contrastés, contiendra des fréquences spatiales élevées. Comme chacune de ces fréquences spatiales doit respecter la relation de dispersion

$$(2\pi f_x)^2 + (2\pi f_y)^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} , \quad (3.14)$$

on voit que les fréquences spatiales faibles vont donner lieu à des ondes planes qui s'éloignent peu de l'axe Oz , alors que les fréquences spatiales rapides vont correspondre à des ondes planes qui s'écartent très vite de l'axe Oz .

L'équation (3.14) a une conséquence importante pour l'imagerie et de nombreuses autres applications de l'optique : seules les fréquences spatiales (f_x, f_y) telles que

$$(2\pi f_x)^2 + (2\pi f_y)^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.15)$$

correspondent à des valeurs de k_z réelles, c'est-à-dire à des ondes planes qui peuvent se propager. Les fréquences spatiales plus rapides vont donner lieu à des ondes qui décroissent exponentiellement selon z , c'est-à-dire à des ondes évanescentes. Par conséquent, tous les détails d'une image ou d'un faisceau qui correspondent à des variations plus rapides que les fréquences spatiales qui respectent l'équation (3.15), c'est-à-dire tels que $f_x, f_y > 1/\lambda$, vont disparaître au cours de la propagation. La propagation est donc un *filtre passe-bas des fréquences spatiales* avec une bande passante égale à $1/\lambda$. En d'autres termes, tous les détails plus petits que la longueur d'onde vont disparaître à la propagation, c'est-à-dire en "*champ lointain*".

Cette limitation explique qualitativement la limite de résolution spatiale des techniques de microscopie "standard" (critère de Rayleigh). Cependant, depuis quelques décennies, de nombreuses techniques, dite de microscopie en champ proche, visent à interroger le champ évanescent, c'est-à-dire la partie du champ proche du plan observé qui correspond à des valeurs complexes de k_z , c'est-à-dire à des fréquences spatiales supérieures à $1/\lambda$. Ces techniques permettent d'obtenir des images présentant une résolution transverse sub-longueur d'onde.

L'équation (3.13) permet aussi de déduire des caractéristiques importantes concernant la propagation libre d'un faisceau. Si on considère par exemple un faisceau homogène de dimensions transverses Δx et Δy dans le plan $z = 0$ et se propageant selon z , les propriétés de la transformée de Fourier nous donnent les inégalités $\Delta x \Delta k_x \geq \frac{1}{2}$ et $\Delta y \Delta k_y \geq \frac{1}{2}$. Par conséquent, l'ouverture angulaire acquise par ce faisceau au cours de sa propagation devra respecter :

$$\theta_x \approx \frac{\lambda}{\Delta x}, \quad (3.16)$$

$$\theta_y \approx \frac{\lambda}{\Delta y}. \quad (3.17)$$

3.5 "Principe" de Huygens-Fresnel

L'équation (3.11) permet de calculer le champ dans un plan z donné en fonction de la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$. Nous pouvons utiliser cette expression pour démontrer ce résultat classique qu'est le principe de Huygens-Fresnel. Avant de procéder à cette démonstration, rappelons de quoi il s'agit. La figure 3.1 présente la situation classique de la diffraction par une ouverture dans un plan : l'ouverture située en $z = 0$ est éclairée par une onde de champ $E_i(x', y', z = 0, \omega)$ et on cherche à déterminer le champ dans un plan $z > 0$. Le principe de Huygens-Fresnel énonce que le champ dans le plan z est le résultat de l'interférence d'ondelettes sphériques émises par tous les points de l'ouverture dans le plan z , et émises avec l'amplitude et la phase du champ incident.

On voit donc que pour passer du développement en ondes planes de l'équation (3.11) au principe de Huygens-Fresnel, nous allons devoir effectuer un changement de base, en passant de la base des ondes planes à celle des ondes sphériques. Ceci est possible grâce

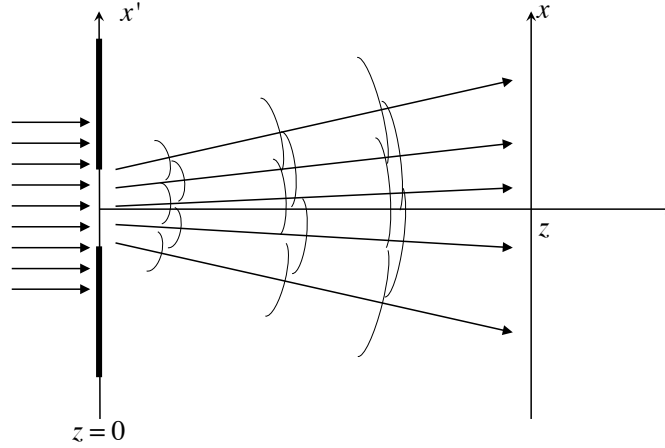


FIGURE 3.1 – Diffraction par une ouverture.

au développement de Weyl d'une onde sphérique sur une base d'ondes planes² :

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi} \iint dk_x dk_y \frac{\exp[i(k_x x + k_y y + k_z |z|)]}{k_z}, \quad (3.18)$$

les composantes k_x , k_y et k_z satisfaisant la relation de dispersion (3.12), c'est-à-dire que k_z peut être vu comme une fonction de k_x et k_y . Dérivons cette équation par rapport à z , pour $z > 0$, pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikr)}{r} = -\frac{1}{2\pi} \iint dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \exp[ik_z(k_x, k_y)|z|], \quad (3.19)$$

qui montre que $-\frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikr)}{r}$ et $\exp[ik_z(k_x, k_y)|z|]$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre.

L'équation (3.11) montre que $E_i(x, y, z, \omega)$ est la transformée de Fourier du produit de $E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega)$ et de $\exp[ik_z(k_x, k_y)|z|]$. Or on sait que la transformée de Fourier d'un produit est le produit de convolution des transformées de Fourier.³ Par conséquent, $E_i(x, y, z, \omega)$ est le produit de convolution des transformées de Fourier de $E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega)$ et de $\exp[ik_z(k_x, k_y)|z|]$, c'est-à-dire de $E_i(x, y, z = 0, \omega)$ et de $-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikr)}{r}$:

$$E_i(x, y, z, \omega) = \iint dx' dy' E_i(x', y', z = 0, \omega) \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp[ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right), \quad (3.20)$$

où

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}. \quad (3.21)$$

Or on calcule que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp[ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = \frac{\exp[ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \left(ik \frac{z}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} - \frac{z}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^2} \right), \quad (3.22)$$

2. Voir Born et Wolf, *op. cit.*, page 711.

3. Avec notre convention, la transformée de Fourier de la convolution $[f(t) * g(t)](t)$ est le produit $f(\omega)g(\omega)$ des transformées de Fourier alors que la transformée de Fourier inverse de $[f(\omega) * g(\omega)](\omega)$ est $2\pi f(t)g(t)$.

qui permet de réécrire l'équation (3.20) sous la forme de la *première formule de Rayleigh-Sommerfeld* :

$$E_i(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \iint dx' dy' E_i(x', y', z = 0, \omega) \exp[ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \times \frac{z}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^2} \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} - ik \right). \quad (3.23)$$

Pour $z \gg \lambda$, on peut négliger le premier terme dans la parenthèse, pour obtenir finalement l'intégrale de Huygens-Fresnel classique :

$$E_i(x, y, z, \omega) = -\frac{i}{\lambda} \iint dx' dy' E_i(x', y', z = 0, \omega) \exp[ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \frac{\cos \theta}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}, \quad (3.24)$$

où nous avons introduit le facteur d'obliquité

$$\cos \theta = \frac{z}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}. \quad (3.25)$$

3.6 Diffraction de Fraunhofer

L'expression du champ diffracté prend une forme particulière quand $z \gg |x|, |y|$. Une façon éclairante de considérer cette situation consiste à remonter à la décomposition en ondes planes du champ à l'équation (3.11). Dans le cas où $z \gg |x|, |y|$ et $k_x, k_y \ll k$, on peut développer l'argument de l'exponentielle au premier ordre en k_x/k et k_y/k pour obtenir :

$$e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \simeq e^{ikz} \exp \left[i \left(k_x x - \frac{k_x^2 z}{2k} \right) \right] \exp \left[i \left(k_y y - \frac{k_y^2 z}{2k} \right) \right]. \quad (3.26)$$

En utilisant l'approximation de la phase stationnaire⁴, on obtient alors, à l'ordre le plus bas :

$$E_i(x, y, z, \omega) = -\frac{ik}{2\pi} E_i \left(k_x = \frac{kx}{z}, k_y = \frac{ky}{z}, z = 0, \omega \right) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.29)$$

On retrouve donc le résultat bien connu qu'en champ lointain ($z \rightarrow \infty$), le champ émis dans la direction $(k_x = \frac{kx}{z}, k_y = \frac{ky}{z})$ est proportionnel à la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$: la diffraction en champ lointain "calcule" la transformée de

4. L'approximation de la phase stationnaire consiste à évaluer une intégrale du type :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda g(x)} dx, \quad (3.27)$$

dans la situation où $\lambda \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que l'argument de l'exponentielle oscille très rapidement. On peut alors montrer qu'à l'ordre le plus bas en $1/\lambda$, $I(\lambda)$ est dominée par les termes correspondant aux zéros de $g'(x)$. Si par exemple $g'(x)$ n'a qu'un zéro noté x_0 dans l'intervalle $]a, b[$, alors $I(\lambda)$ vaut, à l'ordre le plus bas en $1/\lambda$:

$$I(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |g''(x_0)|}} f(x_0) e^{i\lambda g(x_0)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sign}[g''(x_0)]}. \quad (3.28)$$

Il est assez facile de démontrer cette égalité à partir d'un développement de Taylor de $g(x)$ à l'ordre 2 autour de x_0 .

Fourier du champ incident dans le plan $z = 0$ et l'affiche dans les dimensions spatiales transverses.

On peut bien sûr retrouver ce résultat à partir de l'intégrale de Huygens-Fresnel (3.24) en y faisant l'approximation $x, y \ll z$ et en négligeant les termes quadratiques.

En guise d'illustration de la diffraction de Fraunhofer, considérons un diaphragme rectangulaire, de côtés $2w_x$ et $2w_y$, éclairé par une onde plane monochromatique à incidence normale (voir la Figure 3.2). Nous souhaitons calculer la figure de diffraction à la distance $D \gg w_x, w_y \gg \lambda$ du diaphragme.

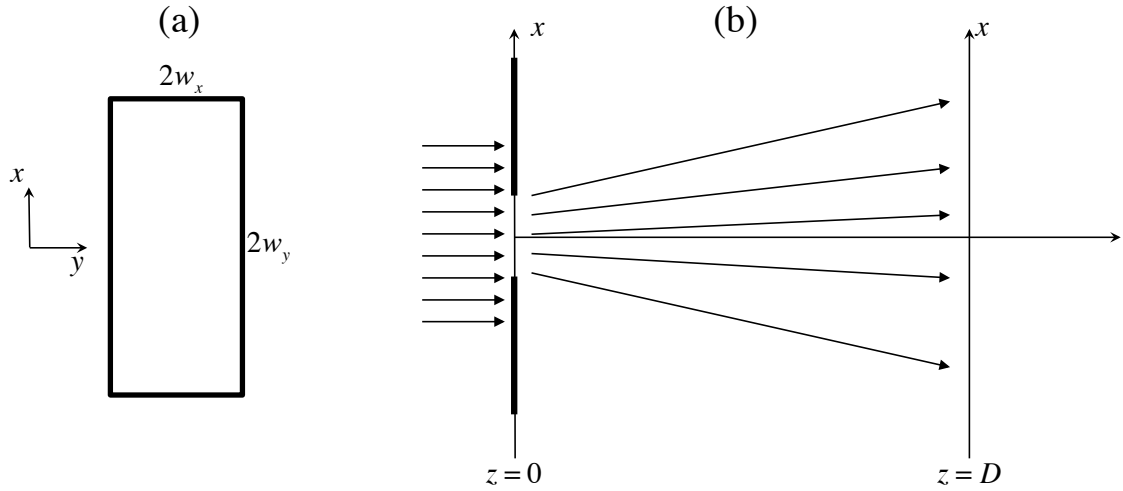


FIGURE 3.2 – Diffraction par une ouverture rectangulaire.

L'équation (3.13) permet de calculer le spectre d'onde plane du champ dans le plan du diaphragme, transformée de Fourier spatiale du champ incident :

$$E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega) = \int_{-w_x}^{w_x} dx \int_{-w_y}^{w_y} dy E_0 e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (3.30)$$

où E_0 est l'amplitude de l'onde. L'intégration aboutit à :

$$E_i(k_x, k_y, z = 0, \omega) = 4E_0 \frac{\sin k_x w_x}{k_x} \frac{\sin k_y w_y}{k_y}. \quad (3.31)$$

En injectant ce résultat dans l'équation (3.29), on obtient finalement :

$$E_i(x, y, D, \omega) = -\frac{4i}{\lambda} E_0 \frac{\sin\left(\frac{2\pi w_x}{\lambda D} x\right)}{\frac{2\pi}{\lambda D} x} \frac{\sin\left(\frac{2\pi w_y}{\lambda D} y\right)}{\frac{2\pi}{\lambda D} y} e^{ikD}. \quad (3.32)$$

La figure 3.3 représente l'intensité obtenue dans le plan de l'écran, c'est-à-dire le module au carré du champ de l'équation (3.32), avec les paramètres suivants : $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, $D = 1.0 \text{ m}$, $w_x = 50 \mu\text{m}$ et $w_y = 200 \mu\text{m}$. La figure a bien l'allure d'un produit de deux sinus cardinaux. De plus, conformément aux propriétés de la transformation de Fourier, la figure est quatre fois plus large dans la direction x que dans la direction y , dû au fait que $w_x = w_y/4$.

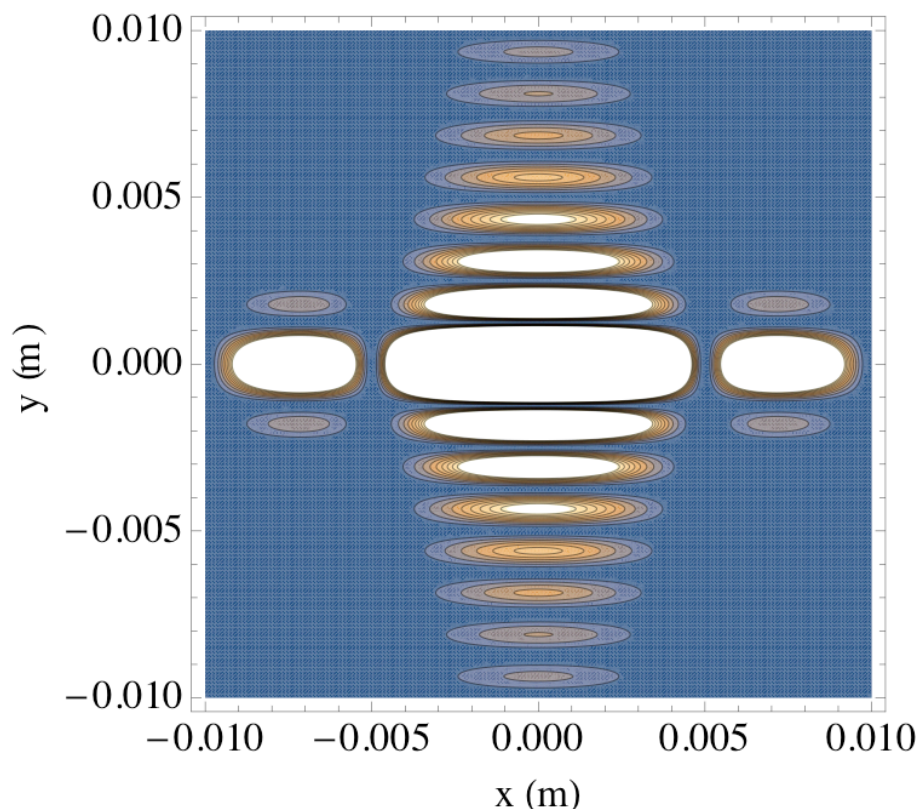


FIGURE 3.3 – *Figure de diffraction due à une ouverture rectangulaire.*

3.7 Optique paraxiale

Au chapitre 1, nous avons dérivé les principes de base de l'optique géométrique à partir des équations de Maxwell. L'optique géométrique est ce que l'on peut qualifier de niveau le plus bas d'approximation en optique : elle considère des objets, les rayons, qui ont une dimension transverse nulle. A l'opposé, la résolution directe des équations aux dérivées partielles que sont les équations de Maxwell permet en principe de résoudre n'importe quel problème, mais au prix d'une complexité importante et souvent au détriment de la compréhension physique des phénomènes. Dans la section présente, nous nous plaçons à un degré d'approximation intermédiaire, valable pour des faisceaux étroits, proches de ce que l'on appelle la limite de diffraction, et pour lesquels le champ a une direction de propagation principale et n'est pas trop étroit dans les directions orthogonales à la direction de propagation.

3.7.1 Equation d'onde à l'approximation paraxiale

Considérons un champ monochromatique de pulsation ω , que nous supposons scalaire, comme dans la partie précédente :

$$E(x, y, z, t) = \mathcal{V}(x, y, z) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} . \quad (3.33)$$

Alors, dans un milieu diélectrique homogène, les équations de Maxwell aboutissent à l'équation de Helmholtz suivante :

$$\Delta \mathcal{V} + k^2 \mathcal{V} = 0 , \quad (3.34)$$

avec

$$k = n \frac{\omega}{c} . \quad (3.35)$$

Supposons maintenant que le champ considéré se propage essentiellement dans la direction z . Nous pouvons alors écrire le champ de la manière suivante :

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \mathcal{E}(x, y, z) e^{ikz} , \quad (3.36)$$

qui est équivalente à :

$$E(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z) e^{-i(\omega t - kz)} + \text{c.c.} . \quad (3.37)$$

L'équation d'onde (3.34) devient alors :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0 . \quad (3.38)$$

Si nous souhaitons décrire un faisceau lumineux qui se propage essentiellement dans la direction $+z$, il semble raisonnable d'effectuer l'approximation de l'amplitude lentement variable pour \mathcal{E} , c'est-à-dire :

$$\left| \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \right| , \quad (3.39)$$

qui permet d'aboutir à l'équation d'onde à l'approximation paraxiale :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0 , \quad (3.40)$$

que nous pouvons finalement réécrire de façon plus générale :

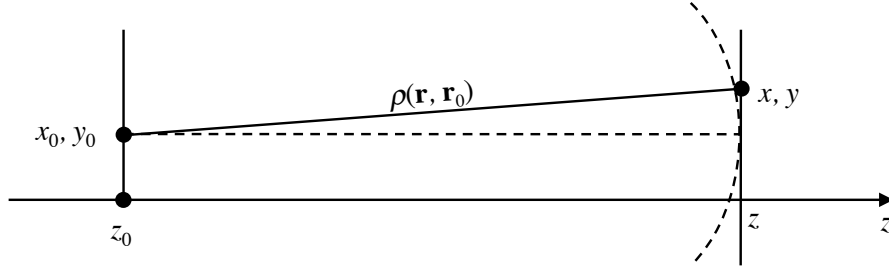
$$\boxed{\Delta_{\perp} \mathcal{E} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0} . \quad (3.41)$$

Cette équation de propagation reste valable tant qu'on reste "suffisamment proche" de l'axe z . Cela signifie en particulier qu'il ne faut pas considérer des faisceaux trop petits, c'est-à-dire dont les dimensions transverses deviennent de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, car alors la divergence du faisceau ne serait plus négligeable par rapport à π .

3.7.2 Intégrale de Huygens à l'approximation de Fresnel

Une façon alternative de traiter ce problème consiste à partir de l'intégrale de Huygens-Fresnel (3.24). Avant tout, il convient d'exposer l'approximation de Fresnel dans le contexte des ondes sphériques. Ces ondes sphériques sont des solutions exactes de l'équation d'ondes. Au point \mathbf{r} , une onde sphérique émise au point source \mathbf{r}_0 s'écrit :

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{e^{ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} , \quad (3.42)$$

FIGURE 3.4 – Onde sphérique proche de l'axe z .

où $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ est la distance entre les points \mathbf{r} et \mathbf{r}_0 :

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (3.43)$$

Supposons que ces deux points sont proches de l'axe z (voir la figure 3.4). L'*approximation de Fresnel* consiste à développer $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ au deuxième ordre des coordonnées transverses :

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \simeq z - z_0 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)}. \quad (3.44)$$

L'équation (3.42) devient alors :

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \simeq \frac{1}{z - z_0} \exp \left[ik(z - z_0) + ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right], \quad (3.45)$$

ou, de manière équivalente :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \simeq \frac{1}{z - z_0} \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right]. \quad (3.46)$$

Le même type d'approximation peut être appliqué à l'intégrale de Huygens (3.24). Nous avons vu que le principe de Huygens permet de calculer le champ $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ en un point \mathbf{r} à partir du champ $\mathcal{V}_0(\mathbf{r}_0)$ sur une surface donnée S_0 , en supposant que chaque point \mathbf{r}_0 de cette surface émet une ondelette sphérique avec une amplitude et une phase imposées par le champ $\mathcal{V}_0(\mathbf{r}_0)$:

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = -\frac{in}{\lambda} \iint_{S_0} dS_0 \mathcal{V}_0(\mathbf{r}_0) \frac{e^{ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} \cos \theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad (3.47)$$

où $\cos \theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ est le facteur d'obliquité qui dépend de l'angle $\theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ entre la normale à la surface S_0 en \mathbf{r}_0 et $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Remarquons que λ est la longueur d'onde dans le vide et n l'indice du milieu considéré. L'approximation de Fresnel consiste à remplacer l'onde sphérique dans l'équation (3.47) par son approximation de Fresnel et de prendre le facteur d'obliquité égal à 1, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, y, z) &= -\frac{in e^{ik(z-z_0)}}{\lambda(z-z_0)} \iint dx_0 dy_0 \mathcal{V}_0(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad \times \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

ou encore :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = -\frac{in}{\lambda L} \iint dx_0 dy_0 \mathcal{E}_0(x_0, y_0, z_0) \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2L} \right], \quad (3.49)$$

avec $L = z - z_0$.

Dans le cas d'un problème à une seule dimension transverse, cette intégrale de Huygens à l'approximation de Fresnel devient :

$$\mathcal{E}(x, z) = \sqrt{-\frac{in}{\lambda L}} \int dx_0 \mathcal{E}_0(x_0, z_0) \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2}{2L} \right]. \quad (3.50)$$

3.7.3 Faisceaux gaussiens

Nous nous intéressons maintenant à un type de solution de l'équation d'ondes à l'approximation paraxiale, qui joue un rôle central en physique des lasers : les faisceaux gaussiens.

3.7.3.1 Onde sphérique complexe

Comme nous venons de le voir, le champ créé en un point (x, y, z) par une source ponctuelle située en (x_0, y_0, z_0) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, y, z) &= \frac{1}{z - z_0} \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right] \\ &= \frac{1}{R(z)} \exp \left[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2R(z)} \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

avec $R(z) = z - z_0$ et où nous ne nous soucions pas pour le moment de l'amplitude de l'onde. Ceci peut se généraliser à n'importe quelle valeur de la courbure du front d'onde à l'origine en écrivant :

$$R(z) = R_0 + z - z_0. \quad (3.52)$$

Remarquons qu'avec notre convention, $R > 0$ correspond à une onde sphérique divergente et $R < 0$ à une onde sphérique convergente.

L'onde sphérique de l'équation (3.51) est une solution de l'équation d'onde paraxiale (3.41) et obéit à l'intégrale de Huygens-Fresnel (3.49) pour n'importe quelles valeurs de x_0 , y_0 et z_0 . Ces trois nombres peuvent être considérés comme de simples paramètres de l'onde. En particulier, rien ne nous empêche de leur attribuer des valeurs complexes. Essayons donc de prendre $x_0 = y_0 = 0$ et remplaçons z_0 par $z_0 - q_0$ avec q_0 complexe. Alors l'équation (3.52) doit être remplacée par :

$$q(z) = z - (z_0 - q_0) = q_0 + z - z_0, \quad (3.53)$$

qui est également complexe. En particulier, nous avons :

$$q(z_0) = q_0. \quad (3.54)$$

L'équation (3.51) devient alors :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{1}{z - z_0 + q_0} \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_0 + q_0)} \right] = \frac{1}{q(z)} \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right]. \quad (3.55)$$

$q(z)$ s'appelle le *rayon de courbure complexe* de l'onde. Séparons les parties réelle et imaginaire de $1/q(z)$ en définissant $R(z)$ et $w(z)$ ainsi :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{n\pi w(z)^2}. \quad (3.56)$$

Alors l'équation (3.55) devient :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \frac{1}{q(z)} \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right]. \quad (3.57)$$

3.7.3.2 Modes gaussiens d'ordre plus élevés

Le faisceau gaussien de l'équation (3.57) n'est que le membre d'ordre le plus bas d'une famille infinie de solutions de l'intégrale de Huygens-Fresnel. Nous allons décrire ici les deux plus importantes familles : les modes de Hermite-Gauss en coordonnées cartésiennes et les modes de Laguerre-Gauss en coordonnées cylindriques.

Dérivation formelle de la solution fondamentale.

Re-dérivons la solution fondamentale de façon plus formelle. Nous cherchons une solution du type :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = A(z) \exp \left(ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right). \quad (3.58)$$

Nous injectons l'équation (3.58) dans l'équation d'onde paraxiale (3.41), ce qui donne :

$$\frac{k^2}{q(z)^2} \left(-1 + \frac{dq}{dz} \right) (x^2 + y^2) + 2ik \left(\frac{A(z)}{q(z)} + \frac{dA}{dz} \right) = 0, \quad (3.59)$$

ce qui aboutit finalement aux deux équations différentielles suivantes :

$$\frac{dq}{dz} = 1, \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{A(z)} \frac{dA}{dz} = -\frac{1}{q(z)}. \quad (3.61)$$

Ces équations ont pour solutions :

$$q(z) = q_0 + z - z_0, \quad (3.62)$$

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{q_0}{q(z)}, \quad (3.63)$$

équivalentes à l'équation (3.57).

Modes d'ordres plus élevés en coordonnées cartésiennes.

En coordonnées cartésiennes, nous pouvons séparer les deux variables transverses et chercher une solution sous la forme :

$$\mathcal{E}_{mp}(x, y, z) = \mathcal{E}_m(x, z) \mathcal{E}_p(y, z), \quad (3.64)$$

chaque composante satisfaisant une équation paraxiale 2D :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_m}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial z} = 0. \quad (3.65)$$

La solution peut être cherchée sous la forme :

$$\mathcal{E}_m(x, z) = A [q(z)] h_m \left(\frac{x}{p(z)} \right) \exp \left(ik \frac{x^2}{2q(z)} \right). \quad (3.66)$$

Après des calculs un peu pénibles, on aboutit la solution connue sous le nom de mode de Hermite-Gauss⁵ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(x, z) &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^m m! w_0} \right)^{1/2} \left(\frac{q_0}{q(z)} \right)^{1/2} \left(\frac{q_0 q^*(z)}{q_0^* q(z)} \right)^{m/2} \\ &\times H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left[i \frac{kx^2}{2q(z)} \right], \end{aligned} \quad (3.67)$$

où $q(z)$ est toujours donnée par l'équation (3.62) et H_m est le polynôme de Hermite d'ordre entier m . En définissant le déphasage de Gouy

$$\tan \psi(z) \equiv - \frac{n\pi w(z)^2}{R(z)\lambda}, \quad (3.68)$$

l'équation (3.67) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(x, z) &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{\exp [i(2m+1)(\psi(z) - \psi_0)]}{2^m m! w(z)}} \\ &\times H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \exp \left[i \frac{kx^2}{2q(z)} \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ces modes de Hermite-Gauss constituent une base orthonormale de fonctions, sur laquelle on peut décomposer n'importe quel faisceau.

Le fait que nous ayons séparé les coordonnées x et y rend ce formalisme particulièrement adapté au traitement des systèmes astigmatiques. Dans ce cas, les deux directions transverses sont traitées indépendamment et le champ complet est le produit des deux champs bidimensionnels obtenus selon les deux directions x et y .

5. On peut retrouver cette solution en remarquant une analogie formelle entre ce problème et celui de la détermination des solutions stationnaires de l'oscillateur harmonique quantique.

Modes d'ordres élevés en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, les modes dits de Laguerre-Gauss constituent une autre famille de solutions données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{pm}(r, \theta, z) = & \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0m})\pi(m+p)!}} \frac{\exp[i(2p+m+1)(\psi(z) - \psi_0)]}{w(z)} \\ & \times \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^m L_p^m\left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right) \exp\left[i\frac{kr^2}{2q(z)} - im\theta\right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dans cette expression, l'entier $p \geq 0$ est l'indice radial et l'entier m l'indice azimutal. Les L_p^m sont les polynômes de Laguerre généralisés.

3.7.4 Propriétés physiques des faisceaux gaussiens

3.7.4.1 Mode fondamental TEM₀₀

Le mode gaussien fondamental s'appelle le mode TEM₀₀. En prenant $z_0 = 0$, le champ se propage selon :

$$\mathcal{E}(x, y, z) = \mathcal{E}_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{i\psi(z)} \exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right], \quad (3.71)$$

avec

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{\lambda}{n\pi w(z)^2}. \quad (3.72)$$

En espace libre, le rayon de courbure complexe $q(z)$ évolue le long de la propagation selon :

$$q(z) = z - iz_R, \quad (3.73)$$

où z_R est la longueur de Rayleigh définie par :

$$z_R = \frac{n\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (3.74)$$

Les paramètres du faisceau évoluent de la manière suivante au cours de la propagation :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \quad (3.75)$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}, \quad (3.76)$$

$$\psi(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (3.77)$$

L'évolution de l'allure du faisceau gaussien au cours de sa propagation est schématisée en figure 3.5. Dans chaque plan z fixé, le faisceau est caractérisé par le rayon $w(z)$ à $1/e^2$ de sa distribution transverse d'intensité et le rayon de courbure $R(z)$ de son front d'onde sphérique. Leurs expressions découlent des équations (3.75) et (3.76) et leurs évolutions en fonction de z sont illustrées sur la figure 3.6.

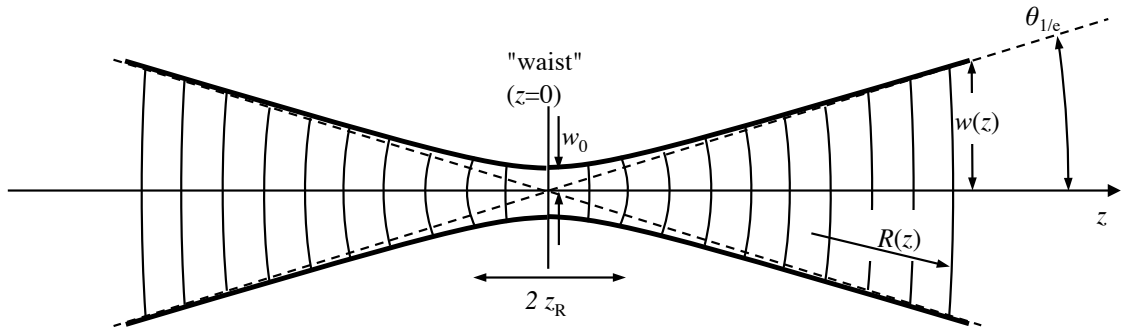
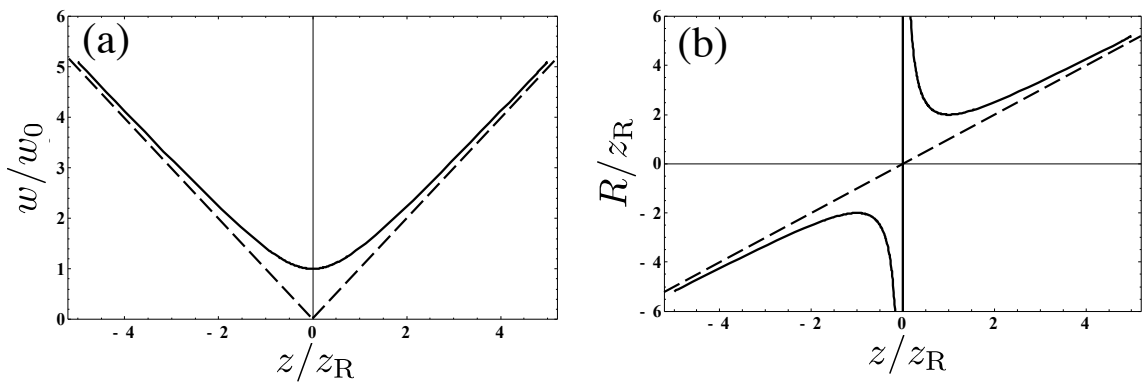


FIGURE 3.5 – Propagation du faisceau gaussien fondamental.

FIGURE 3.6 – Evolutions de (a) w/w_0 et (b) R/z_R en fonction de z/z_R . Les lignes pointillées correspondent aux comportements asymptotiques pour $z \rightarrow \pm\infty$.

Il convient de distinguer deux régions. Le *champ proche* $|z| < z_R$ est également appelé *zone de Rayleigh*. Dans cette région, w reste de l'ordre de w_0 : le faisceau ne subit quasiment aucun étalement par diffraction. La valeur minimale du rayon du mode est w_0 , atteinte en $z = 0$. Le plan $z = 0$ s'appelle la taille ("waist" en anglais) du faisceau, et la quantité w_0 s'appelle le rayon du faisceau à la taille. Dans la zone de Rayleigh, le front d'onde est initialement plan et atteint sa courbure maximale pour $z = z_R$.

Le *champ lointain* correspond à $|z| \gg z_R$. Dans cette région, le front d'onde est quasiment celui d'une onde sphérique centrée en $z = 0$, qui tend vers un front d'onde plan pour les grandes valeurs de z . Le rayon $w(z)$ du mode évolue linéairement z . L'angle de divergence du faisceau devient :

$$\theta_{1/e} = \frac{\lambda}{n\pi w_0}, \quad (3.78)$$

ce qui est en accord avec notre discussion sur la diffraction libre des faisceaux (voir l'équation 3.16).

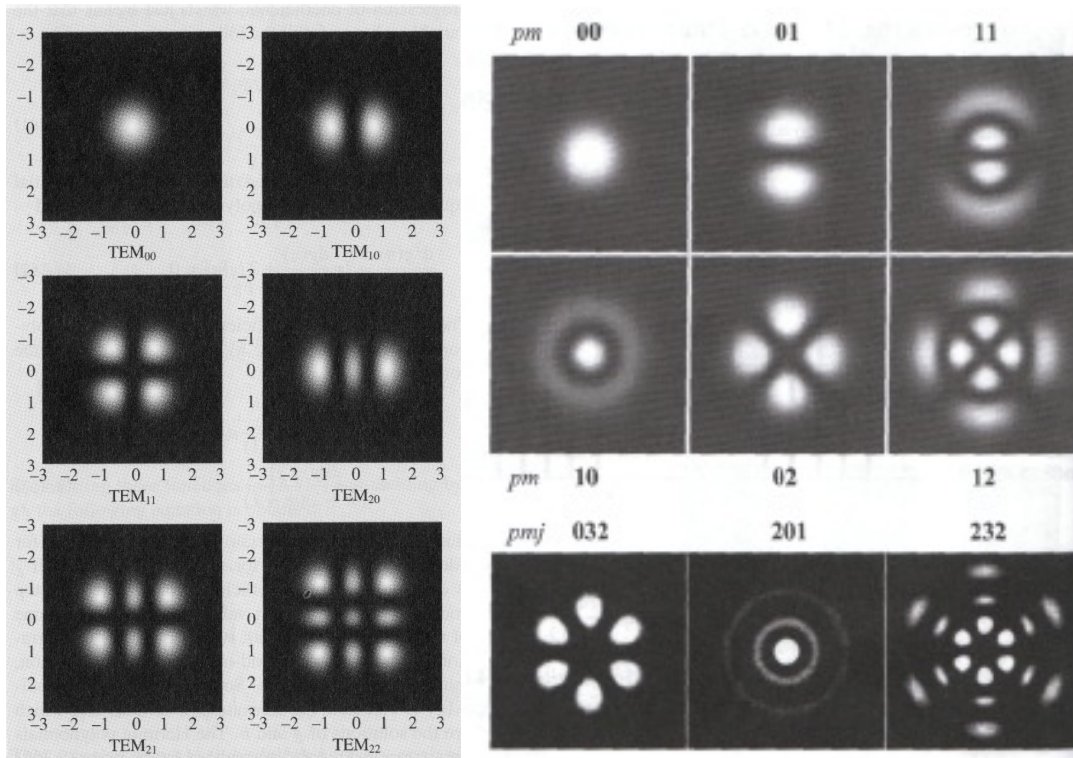


FIGURE 3.7 – Profils d'intensité de quelques modes de Hermite-Gauss (à gauche) et de Laguerre-Gauss (à droite).

3.7.4.2 Modes de Hermite-Gauss

Le mode de Hermite-Gauss TEM_{mn} de l'équation (3.67) a le même front d'onde sphérique que le mode fondamental TEM_{00} mais la distribution d'intensité suivante :

$$I_{mn}(x, y, z) \propto \left[H_m \left(\frac{\sqrt{2} x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2} y}{w(z)} \right) \right]^2 \exp \left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w(z)^2} \right]. \quad (3.79)$$

La partie de gauche de la figure 3.7 reproduit quelques exemples de profils d'intensité de ces modes. Le mode d'ordre m correspond au $m^{\text{ème}}$ polynôme de Hermite et présente par conséquent m nœuds d'intensité.

3.7.4.3 Modes de Laguerre-Gauss

En coordonnées cylindriques, le mode de Laguerre-Gauss d'indices pm a p nœuds d'intensité dans la direction radiale et m plans nodaux dans la direction orthoradiale. La figure 3.7 en donne quelques exemples. Le dernier indice j dans la figure 3.7 correspond au choix entre une dépendance angulaire du champ en $\cos m\theta$ ou en $\sin m\theta$.

3.7.5 Conclusion sur les faisceaux gaussiens

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, les faisceaux gaussiens jouent aujourd'hui un rôle important en optique car ce sont eux qui sont générés par la plupart des lasers.

Des outils spécifiques ont donc été développés pour calculer leur propagation et la façon dont ils sont générés par les cavités lasers. Ces sujets sont abordés dans les compléments 3A et 3B.

Complément 3A

Matrices $ABCD$ et faisceaux gaussiens

Nous avons vu en complément 1A comment la propagation d'un rayon proche de l'axe z peut être décrite par l'utilisation des matrices $ABCD$. Dans ce complément, nous montrons que ces mêmes matrices peuvent décrire l'évolution d'un faisceau gaussien dans un système paraxial.

3A.1 Généralisation de l'intégrale de Huygens à n'importe quel système paraxial

Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.7, dans le cas d'une seule dimension transverse x , l'intégrale de Huygens peut être utilisée pour obtenir la distribution de champ \mathcal{V}_2 dans le plan z_2 à partir de la distribution de champ \mathcal{V}_1 dans le plan z_1 , avec les plans z_1 et z_2 séparés par une distance de propagation L dans un milieu diélectrique homogène :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_2(x_2) &= e^{ikL} \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, x_1) \mathcal{V}_1(x_1) dx_1 \\ &= \sqrt{\frac{-in}{\lambda L}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_1(x_1) e^{ik\rho(x_1, x_2)} dx_1 ,\end{aligned}\tag{3A.1}$$

où la longueur de chemin $\rho(x_1, x_2)$ est donnée, à l'approximation de Fresnel, par :

$$\rho(x_1, x_2) = \sqrt{L^2 + (x_2 - x_1)^2} \simeq L + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2L} .\tag{3A.2}$$

Le noyau de Huygens-Fresnel pour la propagation libre est donc :

$$K(x_2, x_1) = \sqrt{\frac{-in}{\lambda L}} \exp \left[i \frac{n\pi(x_2 - x_1)^2}{\lambda L} \right] .\tag{3A.3}$$

Nous souhaitons généraliser ce noyau de Huygens-Fresnel à la situation dans laquelle l'onde incidente $\mathcal{V}_1(x_1)$ est envoyée dans un système paraxial quelconque caractérisé par sa matrice $ABCD$ (voir la figure 3A.1). Ce système peut lui-même être une combinaison

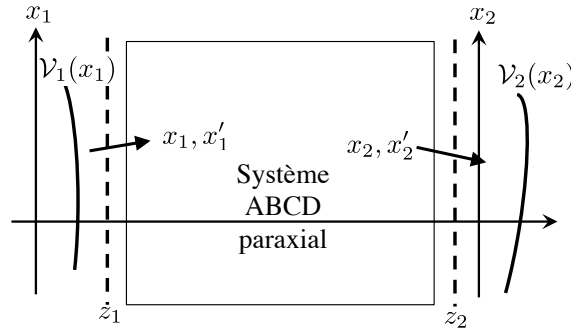


FIGURE 3A.1 – Propagation d'un front d'onde à travers un système paraxial arbitraire décrit par sa matrice ABCD (d'après A. E. Siegman, *op. cit.*).

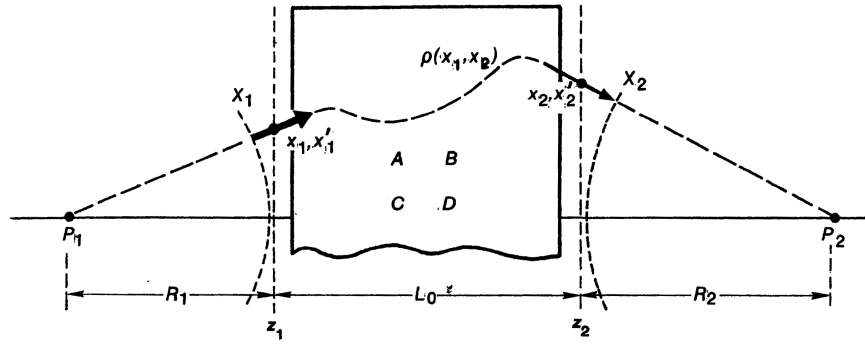


FIGURE 3A.2 – Propagation d'un rayon de P_1 à P_2 , qui sont des points conjugués via le système paraxial décrit par la matrice ABCD (D'après A. E. Siegman, *op. cit.*).

de systèmes paraxiaux individuels (lentilles, morceaux de propagation en espace libre, miroirs, interfaces...).

Considérant un rayon entrant dans le système ABCD à la position x_1 et en sortant à la position x_2 , alors, comme $x_2 = Ax_1 + Bx'_1$, nous avons :

$$x'_1 = \frac{x_2 - Ax_1}{B}, \quad (3A.4)$$

ce qui entraîne :

$$x'_2 = Cx_1 + Dx'_1 = \frac{Dx_2 - x_1}{B}, \quad (3A.5)$$

où nous avons fait usage du fait que le déterminant d'une matrice ABCD vaut toujours 1. Le rayon qui entre dans le système en x_1 avec la pente réduite x'_1 peut être vu comme émergeant d'un point source P_1 situé à une distance R_1 avant le plan d'entrée du système ABCD (voir la figure 3A.2) avec :

$$\frac{R_1}{n_1} = \frac{x_1}{x'_1} = \frac{Bx_1}{x_2 - Ax_1}. \quad (3A.6)$$

De manière similaire, à la sortie, le rayon peut être vu comme une onde sphérique de

rayon de courbure R_2 donné par :

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{x_2}{x'_2} = \frac{Bx_2}{Dx_2 - x_1} . \quad (3A.7)$$

Les centres P_1 et P_2 des ondes sphériques sont des points conjugués par le système optique : tout rayon passant par P_1 doit arriver en P_2 . Selon le principe de Fermat, tous les rayons reliant deux points conjugués ont même longueur optique. En particulier, le rayon allant de P_1 par P_2 via X_1 et X_2 que nous considérons ici (voir la figure 3A.2) doit avoir la même longueur optique que celui qui va de P_1 à P_2 le long de l'axe optique. Appelons L_0 l'épaisseur optique, le long de l'axe optique, de notre système $ABCD$:

$$L_0 = \sum_i n_i L_i , \quad (3A.8)$$

où les n_i et L_i sont les indices et les épaisseurs des différents éléments constitutifs du système $ABCD$ considéré. Alors la longueur optique du rayon connectant P_1 à P_2 le long de l'axe est :

$$P_1 P_2 = n_1 R_1 + L_0 - n_2 R_2 . \quad (3A.9)$$

La longueur optique du rayon allant de P_1 à P_2 via X_1 et X_2 est donnée, à l'approximation de Fresnel, par :

$$\begin{aligned} P_1 X_1 X_2 P_2 &= P_1 X_1 + X_1 X_2 + X_2 P_2 \\ &\simeq n_1 \left(R_1 + \frac{x_1^2}{2R_1} \right) + \rho(x_1, x_2) - n_2 \left(R_2 + \frac{x_2^2}{2R_2} \right) . \end{aligned} \quad (3A.10)$$

En combinant les équations (3A.6), (3A.7), (3A.9), et (3A.10), on obtient :

$$\rho(x_1, x_2) = L_0 + \frac{Ax_1^2 - 2x_1x_2 + Dx_2^2}{2B} , \quad (3A.11)$$

qui est la généralisation de l'équation (3A.2) à n'importe quel système paraxial décrit par $ABCD$. Nous obtenons finalement, la formulation généralisée de l'intégrale de Huygens-Fresnel :

$$\mathcal{V}_2(x_2) = e^{ikL_0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, x_1) \mathcal{V}_1(x_1) dx_1 , \quad (3A.12)$$

avec le noyau :

$$K(x_2, x_1) = \sqrt{\frac{-i}{B\lambda}} \exp \left[i \frac{\pi}{B\lambda} (Ax_1^2 - 2x_1x_2 + Dx_2^2) \right] , \quad (3A.13)$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. Le facteur $\sqrt{\frac{-i}{B\lambda}}$ permet de conserver le flux du vecteur de Poynting et permet de retrouver l'équation (3A.3) dans le cas de la propagation libre.

Commentaire : On remarque que l'échange de x_1 et x_2 dans le noyau de propagation revient à échange A et D dans la matrice $ABCD$. Ceci permet de déduire immédiatement la matrice de propagation en sens inverse pour un système dont on connaît la matrice $ABCD$ dans la direction de propagation positive :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{\text{propagation selon } -z} = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} . \quad (3A.14)$$

3A.2 Le formalisme ABCD pour les faisceaux gaussiens

Imaginons maintenant que nous envoyons un faisceau gaussien sur notre système paraxial ABCD. En se limitant à une dimension transverse, le faisceau incident s'écrit :

$$\mathcal{E}_1(x_1) = \exp\left(i\frac{\pi x_1^2}{q_1 \lambda_1}\right), \quad (3A.15)$$

avec

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} + i\frac{\lambda_1}{\pi w_1^2}. \quad (3A.16)$$

Ici, nous notons toujours la longueur d'onde comme étant celle dans le milieu considéré. Par exemple, λ_1 dans les équations (3A.15) et (3A.16) est la longueur d'onde dans le milieu d'indice n_1 situé à l'entrée du système ABCD considéré. En utilisant le principe de Huygens-Fresnel généralisé des équations (3A.12) et (3A.13), le faisceau à l'entrée du système paraxial est donné par :

$$\mathcal{E}_2(x_2) = \sqrt{\frac{-i}{B\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{\pi x_1^2}{q_1 \lambda_1} + i\frac{\pi}{B\lambda}(Ax_1^2 - 2x_1x_2 + Dx_2^2)\right] dx_1. \quad (3A.17)$$

En utilisant l'identité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u + i\alpha)^2}{\delta^2}\right] du = \sqrt{\pi}\delta, \quad (3A.18)$$

$\mathcal{E}_2(x_2)$ peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_2(x_2) = \sqrt{\frac{1}{A + n_1 B/q_1}} \exp\left(i\frac{\pi x_2^2}{q_2 \lambda_2}\right), \quad (3A.19)$$

avec

$$\frac{q_2}{n_2} = \frac{A(q_1/n_1) + B}{C(q_1/n_1) + D}. \quad (3A.20)$$

Les équations (3A.19) et (3A.20) montrent qu'un système paraxial transforme un faisceau gaussien en un autre faisceau gaussien, les rayons de courbure complexes des deux faisceaux étant reliés par l'équation (3A.20). Cette équation s'appelle la *loi ABCD pour les faisceaux gaussiens*.

Nous définissons alors le *rayon de courbure complexe réduit* \hat{q} du faisceau gaussien se propageant dans un milieu d'indice n_0 :

$$\frac{1}{\hat{q}} = \frac{n_0}{q} = \frac{n_0}{R} + i\frac{\lambda}{\pi w^2} = \frac{1}{\hat{R}} + i\frac{\lambda}{\pi w^2}. \quad (3A.21)$$

Alors, la loi ABCD (3A.20) s'écrit

$$\hat{q}_2 = \frac{A\hat{q}_1 + B}{C\hat{q}_1 + D}. \quad (3A.22)$$

Complement 3B

Modes des cavités optiques

Nous avons vu dans la section 2.6 comment deux interfaces planes parallèles définissaient un résonateur de type Fabry-Perot. Un tel interféromètre est l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle les cavités optiques, qui sont utilisées dans les domaines des lasers et de l'optique non-linéaire. Dans ce complément, nous cherchons à aller au-delà de la description de la section 2.6, dans laquelle on décrivait les ondes comme des ondes planes d'extension transverse infinie. En particulier, nous montrons comment l'utilisation de miroirs sphériques permet de confiner la lumière dans la cavité et à quelles conditions les modes propres de cette cavité sont les modes gaussiens que nous avons discutés dans la section 3.7.

3B.1 Introduction : le concept de mode

Comme annoncé, notre but ici est d'aller au-delà de l'image de l'onde plane pour déterminer la distribution de champ exacte dans une cavité, en prenant en compte ses caractéristiques géométriques. La figure 3B.1 représente une cavité optique typique, de longueur L_{cav} , constituée ici de trois miroirs, plans ou sphériques, et dans laquelle circule une onde progressive dont nous cherchons à déterminer les caractéristiques.

3B.1.1 Noyau de propagation

Le champ monochromatique intracavité se propage essentiellement le long de l'axe z (voir la figure 3B.1). Nous pouvons donc le chercher sous la forme du produit d'une onde plane et d'une enveloppe complexe lentement variable $\mathcal{E}(x, y, z)$:

$$E(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z)e^{-i(\omega t - kz)} + c.c. \quad (3B.1)$$

Pendant sa propagation dans la cavité, le champ subit les réflexions sur les miroirs, la diffraction par des diaphragmes, des effets de lentille, etc... Comme nous l'avons vu ci-dessus, ceci peut être décrit par la transformation linéaire général ci-dessous qui relie l'amplitude du champ $\mathcal{E}^{(1)}(x, y, z_0)$ après un tour dans la cavité, prise dans le plan $z = z_0$,

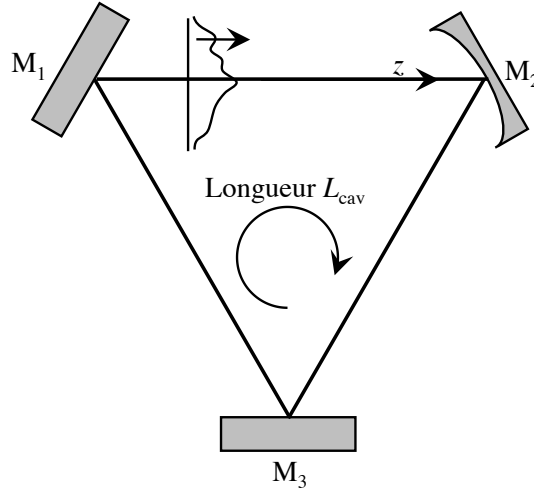


FIGURE 3B.1 – Mode transverse se propageant dans une cavité.

à l'amplitude du même champ un tour plus tôt $\mathcal{E}^{(0)}(x, y, z_0)$:

$$\mathcal{E}^{(1)}(x, y, z_0) = \int \int K(x, y, x_0, y_0) \mathcal{E}^{(0)}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 . \quad (3B.2)$$

Le noyau de propagation $K(x, y, x_0, y_0)$ qui apparaît dans cette équation contient les détails de la cavité. Il dépend bien sûr du plan z_0 dans lequel le mode est considéré.

3B.1.2 Mode propre

Un mode propre de cette cavité dans le plan z_0 est un vecteur propre de la transformation linéaire (3B.2), et vérifie donc :

$$\gamma_{mn} \mathcal{E}_{mn}(x, y, z_0) = \int \int K(x, y, x_0, y_0) \mathcal{E}_{mn}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 , \quad (3B.3)$$

où γ_{mn} est la valeur propre complexe associée. Les deux indices m et n désignent le mode transverse considéré le long de deux coordonnées transverses (cartésiennes ou autres). Alors, l'équation (3B.2) devient :

$$\mathcal{E}_{mn}^{(1)}(x, y, z_0) = \gamma_{mn} \mathcal{E}_{mn}^{(0)}(x_0, y_0, z_0) . \quad (3B.4)$$

Comme la cavité de la figure 3B.1 ne contient aucun gain, nous avons $|\gamma_{mn}| < 1$ et les pertes par diffraction par tour dans la cavité sont, pour le mode considéré

$$\Pi_{\text{diff}} = 1 - |\gamma_{mn}|^2 . \quad (3B.5)$$

Le mode qui a les plus faibles pertes, quand il existe, s'appelle le mode fondamental de la cavité.

Si on veut que le mode donné par l'équation (3B.3) soit résonnant dans la cavité, il faut que la phase accumulée au bout d'un tour soit un multiple entier de 2π , d'où :

$$\arg(\gamma_{mn}) + kL_{\text{cav,opt}} = 2p\pi , \quad (3B.6)$$

où p est un entier. Ceci détermine la fréquence propre d'un mode particulier :

$$\omega_{mn} = 2\pi \frac{c}{L_{cav,opt}} \left(p - \frac{\arg(\gamma_{mn})}{2\pi} \right). \quad (3B.7)$$

Il convient de remarquer que la transformation de l'équation (3B.2) est en général non hermitienne. Rien ne garantit que ne serait-ce qu'un mode existe. Cependant, dans la pratique il semble que toutes les cavités optiques trouvent des modes pour résonner. . .

3B.1.3 L'approche de type Fox et Li

Historiquement, la première approche couronnée de succès ayant permis de déterminer le mode fondamental d'une cavité a été mise en œuvre numériquement par Fox et Li en 1961. Ils "envoyèrent" numériquement un front d'onde plan dans un résonateur à deux miroirs plans et à une seule dimension transverse y ("strip resonator"). Ils utilisèrent alors

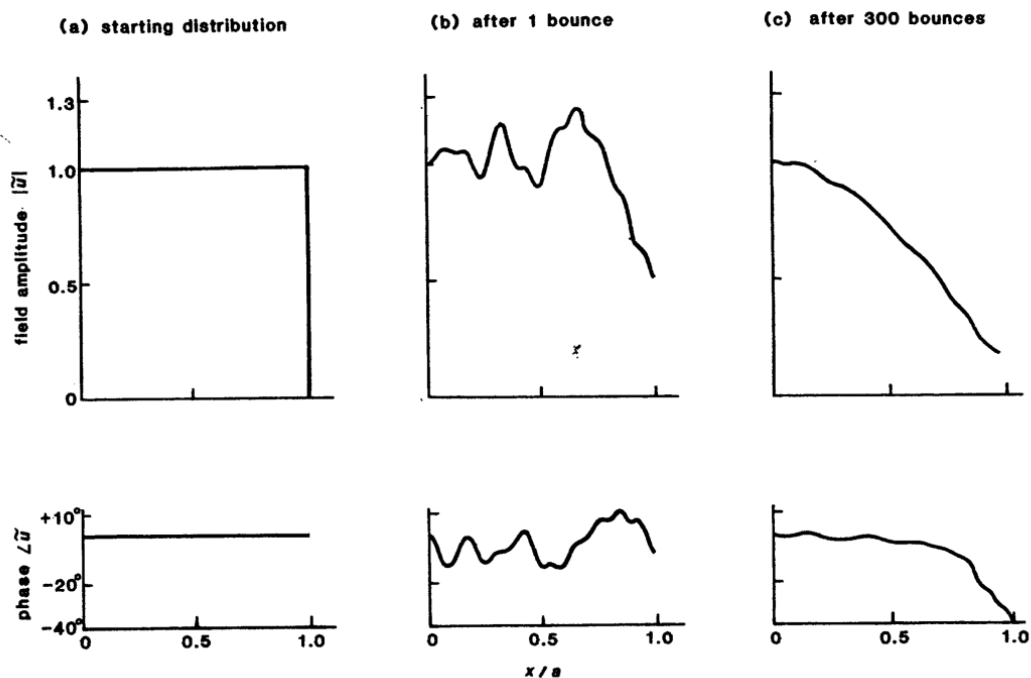


FIGURE 3B.2 – Résultats typiques de calculs de type Fox et Li. La distribution uniforme de champ en (a) est "lancée" dans la cavité. (b) Distribution de champ après un aller-retour dans la cavité. (c) Distribution de champ stationnaire après 300 allers-retours dans la cavité (d'après A. E. Siegman, Lasers, op. cit.).

l'intégrale de Huygens-Fresnel pour calculer l'évolution du champ intra-cavité au cours de ses allers-retours successifs, comme le montre la figure 3B.2. Ils observèrent alors qu'après un grand nombre d'allers-retours, le profil du champ se stabilise : on obtient alors le mode fondamental de la cavité, comme par exemple dans la figure 3B.2(c). En particulier, on peut voir à partir de la figure 3B.2(c) que le champ n'est pas nul au bord du miroir. L'atténuation du champ après un aller-retour permet de déterminer les pertes du mode propre.

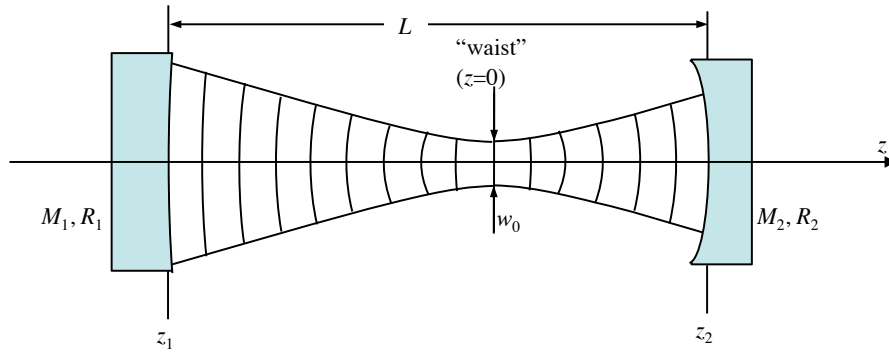


FIGURE 3B.3 – Cavité à deux miroirs.

3B.1.4 Une approche analytique ?

Nous allons maintenant voir que les modes propres des cavités dites stables peuvent être déterminées analytiquement. Pour traiter ce problème, nous commençons avec le cas simple d'une cavité à deux miroirs puis nous généraliserons notre approche en utilisant le formalisme $ABCD$ appliqué aux faisceaux gaussiens.

3B.2 Cavités stables à deux miroirs

Considérons la cavité de la figure 3B.3. Elle est constituée de deux miroirs M_1 et M_2 de rayons de courbure respectifs R_1 et R_2 , séparés par une distance L . Selon notre définition, la longueur de la cavité est $L_{\text{cav}} = 2L$. Nous prenons R_1 et R_2 positifs quand les miroirs sont concaves, comme dans l'exemple de la figure 3B.3.

3B.2.1 Dérivation du mode

La question à laquelle nous voulons répondre est la suivante : existe-t-il un faisceau gaussien qui serait un mode propre de cette cavité ? Ou, en d'autres termes, existe-t-il un faisceau gaussien qui, après un aller-retour dans cette cavité, redevient identique à ce qu'il était initialement ? Nous voyons qu'une telle solution peut exister si les rayons de courbure des fronts d'onde sur les deux miroirs épousent la courbure de ces deux miroirs. Ainsi, si l'origine $z = 0$ correspond à la taille de ce faisceau gaussien, nous devons avoir, selon l'équation (3.76) :

$$-R_1 = R(z_1) = z_1 + \frac{z_R^2}{z_1}, \quad (3B.8)$$

$$R_2 = R(z_2) = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2}, \quad (3B.9)$$

où z_R est la longueur de Rayleigh du faisceau que nous cherchons et z_1 et z_2 sont les abscisses des miroirs par rapport à la taille située en $z = 0$. Ils obéissent à l'équation suivante :

$$L = z_2 - z_1. \quad (3B.10)$$

Introduisons les “paramètres g ” :

$$-g_1 = 1 - L/R_1 \text{ et } g_2 = 1 - L/R_2 . \quad (3B.11)$$

Les solutions des équations (3B.8-3B.10) sont données par :

$$z_R^2 = \frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} L^2 , \quad (3B.12)$$

et

$$z_1 = -\frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} L , \quad (3B.13)$$

$$z_2 = \frac{g_1(1 - g_2)}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} L . \quad (3B.14)$$

Ceci donne l’expression suivante pour le rayon du faisceau à la taille :

$$w_0^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2}} , \quad (3B.15)$$

et aux expressions suivantes pour les rayons du faisceau sur les miroirs :

$$w_1^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)}} , \quad (3B.16)$$

$$w_2^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 g_2)}} . \quad (3B.17)$$

3B.2.2 Diagramme de stabilité

Nous voyons à partir des équations (3B.12), (3B.16) et (3B.17) qu’un tel faisceau gaussien existe si

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 . \quad (3B.18)$$

Cette condition est la condition de stabilité du résonateur à deux miroirs. Elle correspond à la région hachurée dans le plan (g_1, g_2) de la figure 3B.4. Les points situés dans les zones hachurées de la figure 3B.4 correspondent en fait aux résonateurs géométriquement stables (au sens de la définition donnée en section 1A.4), pour lesquelles les résultats du présent paragraphe sont valables. Les points situés en dehors de ces régions correspondent à des cavités qui ont aussi des modes. Mais les modes propres de tels résonateurs dits instables ne sont pas des modes gaussiens.

Quelques cas particuliers portent des noms bien définis. Le cas pour lequel $R_1 = R_2$ est appelé *résonateur symétrique*. Le cas où le miroir M_1 est plan ($g_1 = 1$) est appelé *résonateur hémisphérique*. Le cas où $R_1 = R_2 = L$ est appelé *résonateur confocal symétrique*. En effet, dans ce cas, les foyers des deux miroirs coïncident avec le milieu de la cavité. Les cas où $R_1, R_2 \gg L$ sont appelés *quasi-plans*. Finalement, le cas où $R_1 + R_2$ est presque égal à L est appelé *résonateur quasi-concentrique* et le *résonateur hémisphérique* correspond au cas où M_1 est plan et R_2 est légèrement plus grand que L .

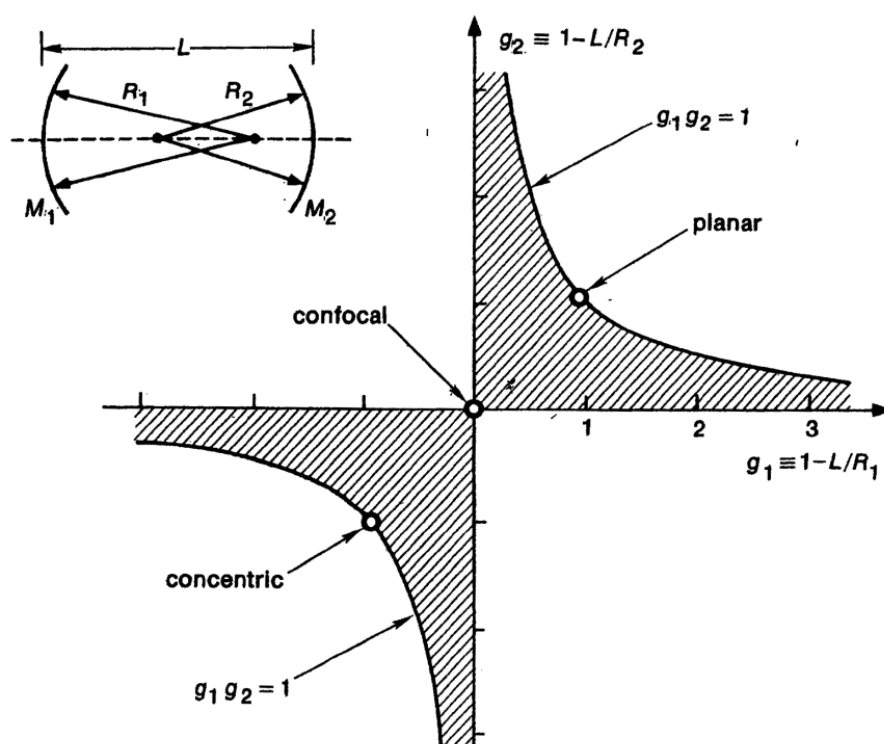


FIGURE 3B.4 – Diagramme de stabilité pour la cavité à deux miroirs (d'après A. E. Siegman, Lasers, op. cit.).

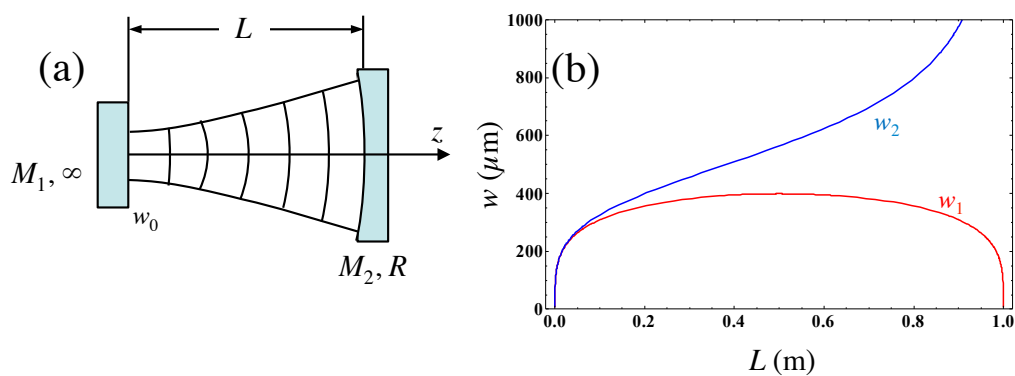


FIGURE 3B.5 – Cas d'une cavité plan-concave avec $\lambda = 1 \mu\text{m}$ et $R = 1 \text{ m}$.

En guise d'exemple, considérons le cas particulier dans lequel le miroir M_1 est plan, entraînant $g_1 = 1$, et prenons $R_2 = R$. Alors, la taille du faisceau est située sur le miroir plan (voir la figure 3B.5(a)) et les rayons du mode sur les deux miroirs sont donnés par :

$$w_1 = w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \sqrt{L(R-L)}} , \quad (3B.19)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{\lambda R}{\pi} \sqrt{\frac{L}{R-L}}} . \quad (3B.20)$$

La figure 3B.5(b) représente l'évolution de ces deux rayons en fonction de la longueur L de la cavité pour $\lambda = 1 \mu\text{m}$ et $R = 1 \text{ m}$. Nous pouvons voir qu'au voisinage de la limite de stabilité $L = R$, la taille du mode tend vers zéro alors que le rayon sur le miroir sphérique diverge.

3B.2.3 Fréquences des modes transverses

Nous n'avons considéré jusqu'à maintenant que le mode gaussien fondamental. Si nous nous tournons vers les modes de Hermite-Gauss d'ordres plus élevés, l'équation (3.69) montre que la phase accumulée par le mode TEM_{nm} du miroir M_1 au miroir M_2 est :

$$\varphi(1 \rightarrow 2) = kL + (n + m + 1) [\psi(z_2) - \psi(z_1)] , \quad (3B.21)$$

où $\psi(z)$ est le déphasage de Gouy donné en équation (3.77). En utilisant les équations (3B.13) et (3B.14), on montre alors que

$$\psi(z_2) - \psi(z_1) = -\cos^{-1} \pm \sqrt{g_1 g_2} , \quad (3B.22)$$

où le signe $+$ s'applique dans le quart en haut à droite de la figure 3B.4 ($g_1, g_2 > 0$) et le signe moins dans le coin en bas à gauche de ce diagramme ($g_1, g_2 < 0$). Si nous voulons que le mode TEM_{nm} soit résonant dans notre cavité, alors la phase de l'équation (3B.21) doit être égale à un nombre entier de fois π , ce qui implique :

$$\frac{\omega}{c} L - (n + m + 1) \cos^{-1} \pm \sqrt{g_1 g_2} = p\pi , \quad (3B.23)$$

où p est un entier. Ceci entraîne les fréquences de résonance suivantes pour les modes transverses :

$$\frac{\omega_{nmp}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \left[p + (n + m + 1) \frac{\cos^{-1} \pm \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} \right] . \quad (3B.24)$$

Le terme provenant du déphasage de Gouy évolue entre 0 et 1 :

$$\frac{\cos^{-1} \pm \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pour la cavité quasi-plane } (g_1, g_2 \rightarrow 1), \\ 1/2 & \text{pour la cavité quadri-confocale } (g_1, g_2 \rightarrow 0), \\ 1 & \text{pour la cavité quasi-concentrique } (g_1, g_2 \rightarrow -1). \end{cases} \quad (3B.25)$$

La différence de fréquence entre deux modes transverses successifs est :

$$\Delta\nu_{\text{trans}} = \frac{c}{2L} \frac{\cos^{-1} \pm \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} . \quad (3B.26)$$

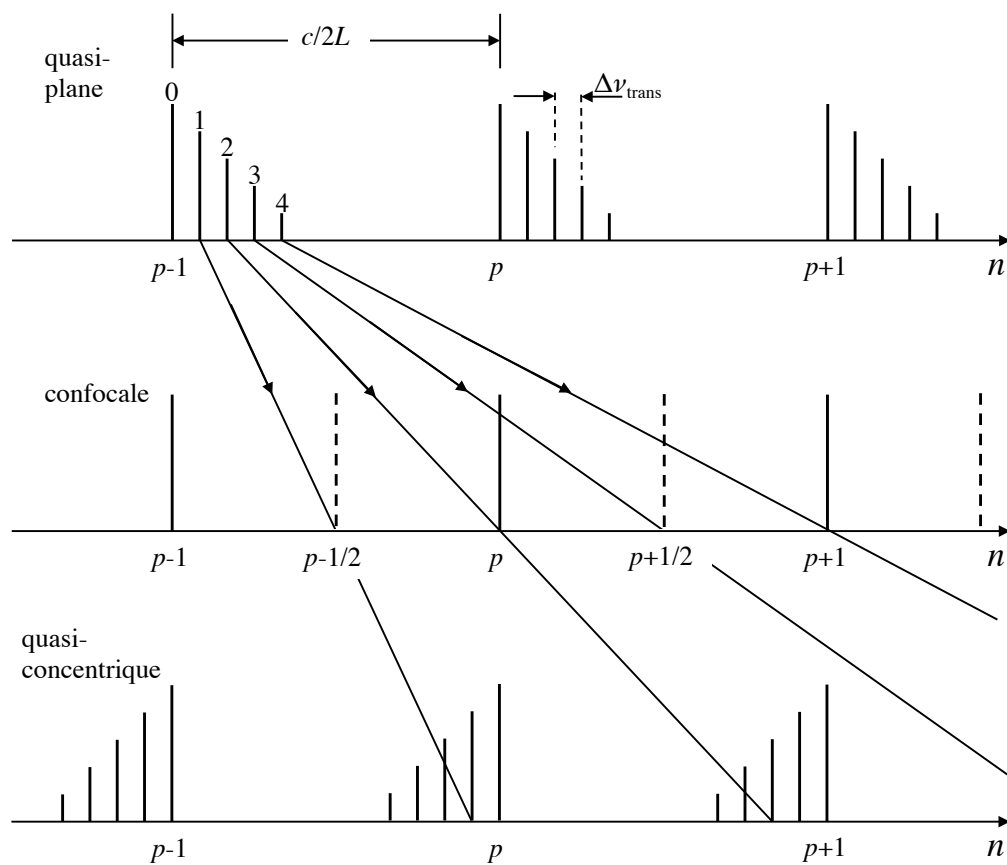
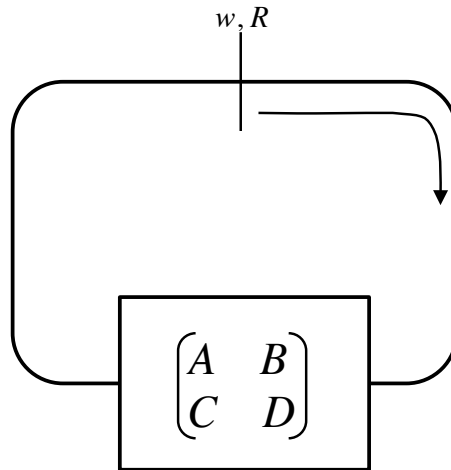


FIGURE 3B.6 – Spectre des modes transverses de trois types de cavités. Les nombres $0 \dots 4$ correspondent à $n + m$ pour les différents modes transverses.

FIGURE 3B.7 – Cavité générale décrite par une matrice $ABCD$.

La figure 3B.6 représente les spectres de modes transverses de différents types de cavités. La cavité confocale est une situation particulièrement pathologique dans laquelle les modes pairs et impairs sont regroupés en deux peignes de fréquences propres séparés par la moitié d'un intervalle spectral libre $c/2L$ de la cavité.

3B.3 Application du formalisme $ABCD$ aux cavités

Ce formalisme $ABCD$ peut être appliqué à la détermination des modes propres gaussiens de n'importe quelle cavité linéaire ou plane. Considérons la cavité schématisée en figure 3B.7. Un tour dans cette cavité, en démarrant d'un plan de référence donné, est décrit par une matrice $ABCD$ obtenue en multipliant les matrices des différents éléments intracavité.

Dans le cas de la figure 3B.7, le faisceau gaussien dans le plan de référence est décrit par son rayon de courbure complexe réduit \hat{q} qui doit vérifier :

$$\hat{q} = \frac{A\hat{q} + B}{C\hat{q} + D} . \quad (3B.27)$$

Cette égalité équivaut à :

$$\frac{1}{\hat{q}^2} + \frac{A - D}{B} \frac{1}{\hat{q}} + \frac{1 - AD}{B^2} = 0 , \quad (3B.28)$$

qui a les solutions suivantes :

$$\frac{1}{\hat{q}} = \frac{D - A}{2B} \pm \frac{1}{B} \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1} . \quad (3B.29)$$

Si nous voulons que cette solution corresponde à une mode gaussien, \hat{q} doit être complexe. Ceci impose la condition de stabilité suivante :

$$\text{Cavité stable} \Leftrightarrow -1 \leq m = \frac{A + D}{2} \leq 1 , \quad (3B.30)$$

qui est la même condition de stabilité que celle trouvée au paragraphe 1A.4 pour les systèmes périodiques [voir l'équation (1A.19)].

Dans le cas où la cavité est effectivement stable, l'équation (3B.29) devient :

$$\frac{1}{\hat{q}} = \frac{D - A}{2B} + \frac{i}{|B|} \sqrt{1 - m^2}, \quad (3B.31)$$

qui implique, en utilisant l'équation (3A.21), les valeurs suivantes pour les paramètres du mode :

$$R = \frac{2nB}{D - A}, \quad (3B.32)$$

et

$$w = \sqrt{\frac{\lambda|B|}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}}. \quad (3B.33)$$

Chapitre 4

Propagation dans les milieux dispersifs

Dans le chapitre précédent, nous n'avons considéré que du rayonnement monochromatique, et des matériaux non dispersifs. Or les lasers actuels permettent de générer des impulsions de durées de l'ordre de la femtoseconde (10^{-15} s), qui couvrent donc un spectre très large. Dans ce cas, il n'est plus possible de négliger la dispersion du milieu, et les impulsions se propagent en subissant diverses déformations. De même, dans le domaine microonde, de nombreux milieux présentent de très fortes dispersions (molécule au voisinage d'une raie d'absorption, plasma, etc...). Notre but dans ce chapitre est de décrire de façon très simple l'électromagnétisme dans de tels milieux dispersifs (section 4.1) puis d'y propager des impulsions courtes (section 4.2). Le complément 4A décrit quelques techniques utilisées pour mesurer de telles impulsions courtes.

4.1 Milieux dispersifs

Dans cette section, nous introduisons quelques généralités sur les milieux dispersifs, que nous appliquerons à la propagation des impulsions lumineuses dans la section suivante.

4.1.1 Description des milieux dispersifs

La dispersion d'un milieu, c'est-à-dire la variation de ses constantes σ , ε et μ , provient du temps de réponse fini du milieu. Considérons en effet par exemple la conductivité d'un milieu. Celle-ci est due par exemple à des charges massives qui se mettent en mouvement. La réponse de ces charges à une variation du champ électrique n'est pas instantanée et nous sommes donc réduits à écrire, pour un milieu linéaire, homogène et local :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \sigma(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') , \quad (4.1)$$

où la borne supérieure de l'intégrale traduit la causalité du phénomène. Nous pouvons étendre cette intégrale à toute la droite réelle :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sigma(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') , \quad (4.2)$$

en introduisant la causalité dans la réponse du milieu :

$$\sigma(\tau) = 0 \text{ pour } \tau < 0 . \quad (4.3)$$

Alors, en prenant la transformée de Fourier temporelle de la convolution qui est dans l'équation (4.2), on obtient ¹ :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\sigma}(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (4.4)$$

où $\hat{\sigma}(\omega)$ est complexe. Comme $\sigma(\tau)$ est une fonction réelle, sa transformée de Fourier obéit à la symétrie suivante :

$$\hat{\sigma}(-\omega) = \hat{\sigma}^*(\omega) , \quad (4.5)$$

c'est-à-dire que la partie réelle $\sigma'(\omega)$ de $\hat{\sigma}(\omega)$ est une fonction paire alors que la partie imaginaire $\sigma''(\omega)$ est une fonction impaire.

Dans la suite de ce chapitre, nous appliquerons le même formalisme à $\hat{\varepsilon}(\omega)$ et $\hat{\mu}(\omega)$.

4.1.2 Energie dans un milieu dispersif

La dispersion des constantes du milieu a un effet profond sur le comportement énergétique du milieu. Pour le voir, repartons du théorème de Poynting appliqué à une volume V :

$$\int_V d^3r \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = - \int_V d^3r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \int_V d^3r \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) . \quad (4.6)$$

Commentaire : Avant d'aller plus loin, une petite remarque s'impose sur le terme de courant libre dans l'équation ci-dessus. A haute fréquence, on ne peut pas distinguer entre un courant de conduction $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ et un courant de polarisation $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$. En effet, en passant dans l'espace de Fourier, on peut écrire dans ce dernier cas :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \varepsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) , \quad (4.7)$$

ce qui permet de relier la conductivité à la susceptibilité diélectrique. Alors, compte tenu de

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\varepsilon}(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (4.8)$$

on a finalement :

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_0 + i \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\omega} . \quad (4.9)$$

On voit donc qu'on peut introduire le courant \mathbf{j} dans les équations de Maxwell soit comme un courant de conductivité, soit via la constante diélectrique. C'est une simple question de choix : l'essentiel est de ne pas l'introduire deux fois.

1. Nous attirons à nouveau l'attention du lecteur sur le fait que nous notons de la même manière les champs et termes sources et leurs transformées de Fourier. En revanche, nous mettons un chapeau sur $\hat{\sigma}(\omega)$ pour attirer l'attention sur le caractère complexe de cette quantité.

Notre but ici est de distinguer dans le terme de gauche de l'équation (4.6) quelle est la partie de la variation d'énergie qui provient de la dissipation. Suite à la partie 2.3.2, nous supputons que la dissipation provient plutôt des parties imaginaires de $\hat{\varepsilon}(\omega)$ et $\hat{\mu}(\omega)$. Nous allons donc essayer de séparer les termes contenant les parties imaginaires de ces constantes de ceux dépendant des parties réelles. Dans ce but, nous écrivons, en tirant parti de la réalité des champs :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.}] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega)] e^{-i\omega t} ,\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.}] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\hat{\varepsilon}(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \hat{\varepsilon}^*(\omega)\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\hat{\varepsilon}^*(-\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \hat{\varepsilon}^*(\omega)\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\varepsilon}^*(\omega) [\mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)] e^{i\omega t} .\end{aligned}\tag{4.11}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_1) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega_1)] \\ &\quad \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega_2) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega_2)] \times i\omega_2 \hat{\varepsilon}^*(\omega_2) \\ &\quad \times \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] .\end{aligned}\tag{4.12}$$

En changeant ω_1 en $-\omega_2$ et ω_2 en $-\omega_1$, cette dernière expression devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_1) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega_1)] \\ &\quad \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega_2) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega_2)] \times (-i\omega_1) \hat{\varepsilon}(\omega_1) \\ &\quad \times \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] .\end{aligned}\tag{4.13}$$

En faisant la demi-somme des deux équations précédentes, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_1) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega_1)] \\ &\quad \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega_2) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega_2)] \times i [\omega_2 \hat{\varepsilon}^*(\omega_2) - \omega_1 \hat{\varepsilon}(\omega_1)] \\ &\quad \times \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] .\end{aligned}\tag{4.14}$$

En séparant alors parties réelle et imaginaire de $\hat{\varepsilon}$, on sépare $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ en deux termes :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_E}{\partial t} + Q_E ,\tag{4.15}$$

avec

$$\begin{aligned}
u_E(t) &= \frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_1) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega_1)] \\
&\quad \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega_2) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega_2)] \times \frac{\omega_2 \varepsilon'(\omega_2) - \omega_1 \varepsilon'(\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} \\
&\quad \times \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] , \tag{4.16}
\end{aligned}$$

et

$$Q_E(t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega)] \omega \varepsilon''(\omega) e^{-i\omega t} . \tag{4.17}$$

De manière similaire, on peut mettre le terme magnétique sous la forme de deux termes :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_M}{\partial t} + Q_M , \tag{4.18}$$

où u_M et Q_M ont les mêmes formes que u_E et Q_E en remplaçant ε par μ et \mathbf{E} par \mathbf{H} .

Les équations précédentes, notamment l'équation (4.18) et son équivalent pour la partie magnétique, montrent que dans le cas général, les expressions trouvées sont assez épouvantables. On peut néanmoins les simplifier en supposant que le spectre du rayonnement considéré est relativement étroit autour d'une valeur centrale ω , et donc faire des développements de Taylor au premier ordre pour les valeurs de ε' et μ' . On obtient alors les expressions suivantes pour l'énergie stockée dans le milieu :

$$u_{EM}(t) = u_E(t) + u_M(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \varepsilon'(\omega)] \|\mathbf{E}(t)\|^2 + \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \mu'(\omega)] \|\mathbf{H}(t)\|^2 \right\} \tag{4.19}$$

et pour le taux d'absorption de l'énergie :

$$Q(t) = Q_E(t) + Q_M(t) = \omega [\varepsilon''(\omega) \|\mathbf{E}(t)\|^2 + \mu''(\omega) \|\mathbf{H}(t)\|^2] . \tag{4.20}$$

L'équation (4.19) est sensiblement différent de l'expression (2.40) obtenue pour un milieu non dispersif : elle fait apparaître la dynamique interne des charges du milieu considéré. De plus, notons que l'absorption de l'énergie dans le milieu correspond à un signe positif pour ε'' et μ'' .

4.1.3 Relations de dispersion

Considérons une onde plane monochromatique se propageant dans notre milieu dispersif :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} , \tag{4.21}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{c.c.} . \tag{4.22}$$

Alors les équations de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \tag{4.23}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{4.24}$$

entraînent

$$\mathbf{k} \times \mathcal{E} = \omega \hat{\mu}(\omega) \mathcal{H} , \quad (4.25)$$

$$\mathbf{k} \times \mathcal{H} = -\omega \hat{\varepsilon}(\omega) \mathcal{E} . \quad (4.26)$$

En combinant ces deux équations on obtient

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathcal{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}) \mathbf{k} - \|\mathbf{k}\|^2 \mathcal{E} = -\omega^2 \hat{\mu}(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) \mathcal{E} . \quad (4.27)$$

Essayons de rester le plus général possible et décomposons le champ électrique en une partie longitudinale parallèle à \mathbf{k} et une partie transverse orthogonale à \mathbf{k} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\perp + \mathcal{E}_\parallel . \quad (4.28)$$

En injectant dans (4.27), on obtient :

$$\|\mathbf{k}\|^2 \mathcal{E}_\perp = \omega^2 \hat{\mu}(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) (\mathcal{E}_\perp + \mathcal{E}_\parallel) . \quad (4.29)$$

On obtient donc deux relations de dispersion différentes pour les ondes transverses et longitudinales. Pour les ondes transverses on a :

$$[\omega^2 \hat{\mu}(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) - \|\mathbf{k}\|^2] \mathcal{E}_\perp = 0 , \quad (4.30)$$

qui permet de définir l'indice complexe $\hat{n}(\omega)$:

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\hat{\mu}(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega)} = \frac{\omega}{c} \hat{n}(\omega) , \quad (4.31)$$

à partir duquel on définit l'impédance complexe du milieu :

$$\hat{Z}(\omega) = \sqrt{\frac{\hat{\mu}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)}} . \quad (4.32)$$

D'autre part, les ondes longitudinales doivent obéir à la condition suivante, obtenue à partir de (4.28) :

$$\hat{\mu}(\omega) \hat{\varepsilon}(\omega) \mathcal{E}_\parallel = 0 . \quad (4.33)$$

4.1.4 Deux modèles de milieux dispersifs

Avant d'aller plus loin, nous présentons brièvement deux modèles classiques simples de milieux dispersifs, l'un dû à Drude pour les conducteurs et l'autre, dû à Lorentz, pour les isolants électriques.

4.1.4.1 Modèle de Drude

Dans le modèle de Drude pour les milieux conducteurs, on postule l'existence dans le matériau d'électrons libres soumis à deux forces contradictoires : la force de Lorentz due au champ électrique appliqué et des collisions, séparées en moyenne d'un intervalle de temps τ . Alors, en présence d'un champ électrique

$$\mathbf{E} = \mathcal{E} \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} , \quad (4.34)$$

la vitesse \mathbf{v} d'un électron de masse m et charge q est gouvernée par l'équation

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau} . \quad (4.35)$$

En régime stationnaire, on peut aussi écrire la vitesse de la charge en notation complexe :

$$\mathbf{v} = \mathcal{V} \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} , \quad (4.36)$$

pour obtenir

$$\mathcal{V} = \frac{q\mathcal{E}/m}{1/\tau - i\omega} . \quad (4.37)$$

A partir de la définition de la conductivité :

$$\mathbf{j} = \mathcal{J} \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} , \quad (4.38)$$

on obtient

$$\mathcal{J} = nq\mathcal{V} = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{\mathcal{E}}{1 - i\omega\tau} = \hat{\sigma}(\omega)\mathcal{E} , \quad (4.39)$$

où n est la densité de charges libres. Finalement :

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{nq^2\tau/m}{1 - i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} . \quad (4.40)$$

En introduisant la fréquence plasma

$$\omega_p^2 = \frac{nq^2}{\varepsilon_0 m} , \quad (4.41)$$

et en utilisant (4.9), on obtient finalement la permittivité relative du conducteur de Drude :

$$\frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} + i \frac{\omega_p^2\tau}{\omega} \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} . \quad (4.42)$$

Dans le cas fréquent pour lequel $\omega_p \gg 1/\tau$, on peut simplifier cette expression pour obtenir, si $\omega\tau \ll 1$:

$$\frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_0} \approx -\omega_p^2\tau^2 + i \frac{\omega_p^2\tau}{\omega} . \quad (4.43)$$

De plus, à haute fréquence $\omega \gg 1/\tau$, $\hat{\varepsilon}$ devient quasiment purement réelle :

$$\frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_0} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} . \quad (4.44)$$

Au-delà du fait que le matériau considéré est dispersif, cette expression montre que $\hat{\varepsilon}$ change de signe au voisinage de la fréquence plasma.

4.1.4.2 Modèle de Lorentz

Le modèle de Lorentz a été établi avant le développement de la mécanique quantique. C'est un modèle remarquable en ce sens qu'il prédit un grand nombre de caractéristiques des transitions dans les milieux diélectriques. Bien sûr, certains aspects de ces systèmes, comme la position et la force exacte des raies, la saturation et la possibilité d'avoir non

plus de l'absorption mais du gain sont purement quantiques et ne sont pas prévus par le modèle de Lorentz.

Dans cette approche, les transitions sont modélisées comme provenant d'oscillateurs amortis classiques, sortes de petites masses chargées subissant une force de rappel et une force de dissipation, dont l'écart $\mathbf{r}(t)$ par rapport à la position d'équilibre obéit à l'équation :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + m\Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + m\omega_0^2 \mathbf{r} = -e\mathbf{E} , \quad (4.45)$$

où m est la masse de l'oscillateur, $-e$ sa charge, Γ le coefficient de dissipation², ω_0 la fréquence propre de l'oscillateur et \mathbf{E} le champ appliqué. En régime stationnaire, en écrivant

$$\mathbf{E}(t) = \mathcal{E} \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} , \quad (4.46)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathcal{R} \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} , \quad (4.47)$$

on obtient

$$\mathcal{R} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \mathcal{E} . \quad (4.48)$$

Ce déplacement des charges négatives par rapport à leur position d'équilibre correspond à la création d'un dipôle de moment $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}(t)$. Si n est la densité de tels dipôles par unité de volume, alors la polarisation du milieu s'écrit :

$$\mathbf{P}(t) = n\mathbf{p}(t) = \frac{ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \mathcal{E} \exp(-i\omega t) + \text{c.c.} . \quad (4.49)$$

On en déduit l'indice et la permittivité diélectrique du milieu

$$\hat{n}^2(\omega) = \frac{\hat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} . \quad (4.50)$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} , \quad (4.51)$$

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2} . \quad (4.52)$$

Ces expressions présentent une résonance à $\omega = \omega_0$. La figure 4.1 montre que l'absorption (ε'') a une forme quasiment lorentzienne, et que la dispersion est normale en dehors de la résonance et anormale à résonance.

4.1.5 Relations de Kramers-Kronig

Au début de ce chapitre, nous avons rappelé que la réponse des matériaux est causale, ce qui nous a permis d'introduire la transformée de Fourier des différentes fonctions

2. On peut montrer que cette dissipation peut provenir du rayonnement émis par l'électron sous l'effet de son accélération (voir le cours sur le rayonnement).

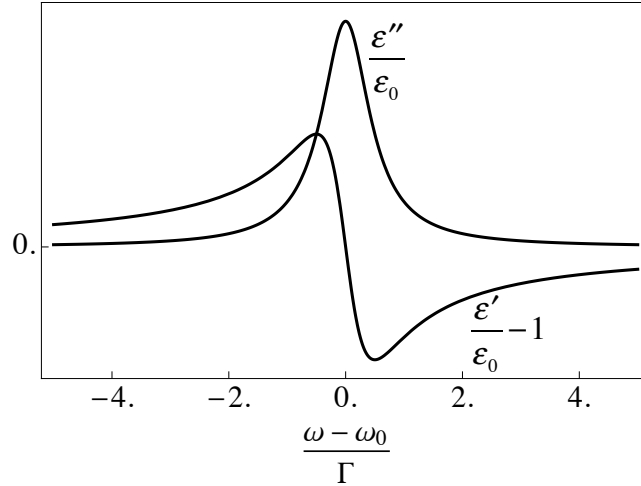


FIGURE 4.1 – Evolutions de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\hat{\varepsilon}$ dans le modèle de Lorentz.

réponses. Cette causalité dans le domaine temporel a son pendant dans le domaine spectral : ce sont les relations de Kramers-Kronig qui lient partie réelle et partie imaginaire des susceptibilités.

Considérons une susceptibilité quelconque $\chi(t)$. Comme cette fonction respecte la causalité, elle est nulle pour $t < 0$, et donc :

$$\chi(t) = \Theta(t)\chi(t) , \quad (4.53)$$

où $\Theta(t)$ est la fonction de Heaviside, égale à 1 pour $t > 0$ et à zéro sinon. La transformée de Fourier de (4.53) donne :

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{\Theta}(\omega) * \hat{\chi}(\omega) , \quad (4.54)$$

La transformée de Fourier de la fonction de Heaviside vaut :

$$\hat{\Theta}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \text{v.p.} \frac{i}{\omega} . \quad (4.55)$$

Donc l'équation (4.54) devient :

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2} \hat{\chi}(\omega) + \frac{i}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega - \omega'} . \quad (4.56)$$

On obtient finalement

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega - \omega'} , \quad (4.57)$$

d'où nous pouvons extraire les parties réelle et imaginaire :

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi''(\omega')}{\omega - \omega'} , \quad (4.58)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi'(\omega')}{\omega - \omega'} . \quad (4.59)$$

Ces équations, connues sous le nom de relations de Kramers-Kronig, relient la partie réelle de la susceptibilité à une fréquence donnée à toutes les valeurs de la partie imaginaire à toutes les fréquences, et réciproquement. Elles ont donc un intérêt pratique : une mesure de la partie réelle ou imaginaire permet de reconstituer l'autre partie. Par exemple, la mesure du spectre d'absorption d'un diélectrique permettra de reconstituer par le calcul l'évolution de l'indice de réfraction, qui est en général beaucoup plus difficile à mesurer avec précision.

De plus, ces relations montrent que dissipation de l'énergie (via la partie imaginaire de la susceptibilité) et dispersion (dépendance en ω de la partie réelle de la susceptibilité) sont intrinsèquement liés. Cette propriété très générale des susceptibilités linéaires, conséquence de leur caractère causal, renforce notre discussion du paragraphe 4.1.2 ci-dessus, dans lequel la dispersion apparaît dans l'écriture de la densité d'énergie du champ.

4.2 Propagation d'impulsions dans les milieux dispersifs

Dans cette partie, nous nous intéressons à la façon dont des impulsions lumineuses se propagent, de façon linéaire, dans un diélectrique dispersif. Ce problème est très actuel car les impulsions fournies par les lasers à verrouillage de modes ont des durées aussi faibles que quelques femtosecondes, ce qui correspond à des largeurs spectrales de plusieurs dizaines de nanomètres. Dans ces conditions, il n'est plus possible de négliger les effets dispersifs qui vont par exemple donner lieu à un étalement temporel de l'impulsion. Or cet étalement est souvent un effet délétère pour les applications qui dépendent de la concentration dans le temps d'un maximum d'énergie lumineuse.

Notre but ici est donc de décrire comment une impulsion se propage dans un milieu dispersif. Nous prendrons des impulsions de forme gaussienne pour alléger les calculs.

4.2.1 Dispersion. Dérive de fréquence

4.2.1.1 Rappel : transformée de Fourier d'une gaussienne

Nous résumons dans ce paragraphe quelques relations utiles sur la transformation de Fourier des gaussiennes. Considérons une fonction $f(t)$ du temps. Rappelons d'abord les notations que nous adoptons dans ce cours pour les transformations de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (4.60)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (4.61)$$

Dans le cas d'une fonction gaussienne réelle :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\Delta t_0^2}\right), \quad (4.62)$$

la transformée de Fourier est aussi une gaussienne réelle :

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\Delta t_0 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}\right), \quad (4.63)$$

avec

$$\Delta\omega\Delta t_0 = 1 . \quad (4.64)$$

Mentionnons également l'équation ci-dessous qui sera utile pour des valeurs complexes de δ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(u + i\alpha)^2}{\delta^2} \right] du = \sqrt{\pi}\delta . \quad (4.65)$$

4.2.1.2 Propagation d'une impulsion gaussienne dans un milieu dispersif

Envoyons donc une impulsion gaussienne dans un milieu diélectrique dispersif. Nous supposons que nous sommes dans le domaine de transparence du matériau et que ce matériau est non magnétique ($\mu = \mu_0$).

Description de l'impulsion à l'entrée du milieu

On considère une impulsion gaussienne se propageant selon z et incidente en $z = 0$ sur un milieu dispersif :

$$E(z = 0, t) = \mathcal{E}(z = 0, t)e^{-i\omega_p t} + \text{c.c.} , \quad (4.66)$$

avec une enveloppe gaussienne donnée par :

$$\mathcal{E}(z = 0, t) = E_0 \exp \left(-\frac{t^2}{2\Delta t_0^2} \right) . \quad (4.67)$$

Alors le champ de l'équation (4.66) peut être réécrit sous la forme :

$$E(z = 0, t) = E^{(+)}(z = 0, t) + \text{c.c.} , \quad (4.68)$$

où la partie de fréquence positive du signal, également connue sous le vocable de "signal analytique", est :

$$E^{(+)}(z = 0, t) = E_0 \exp \left(-\frac{t^2}{2\Delta t_0^2} \right) e^{-i\omega_p t} . \quad (4.69)$$

La transformée de Fourier de ce signal analytique, qui est aussi la partie de fréquence positive du champ électrique de l'équation (4.68), est donnée par :

$$\hat{E}^{(+)}(0, \omega) = \hat{E}_0 \exp \left(-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\Delta\omega^2} \right) , \quad (4.70)$$

avec

$$\hat{E}_0 = \sqrt{2\pi}\Delta t_0 E_0 . \quad (4.71)$$

Alors l'impulsion à l'entrée du milieu dispersif peut être vue comme une somme d'ondes monochromatiques :

$$E^{(+)}(z = 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{E}^{(+)}(z = 0, \omega) , \quad (4.72)$$

qui se propagent toutes selon z avec leurs nombre d'onde propres $k(\omega) = n(\omega)\omega/c$, accumulant une *phase spectrale* $k(\omega)z$, ce qui entraîne :

$$E^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}^{(+)}(z = 0, \omega) e^{-i\omega t} e^{ik(\omega)z} . \quad (4.73)$$

Dispersion du milieu

Dans la fenêtre de transparence d'un matériau diélectrique, $k(\omega)$ s'écrit :

$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} . \quad (4.74)$$

Nous faisons un développement de Taylor au deuxième ordre³ autour de la fréquence centrale ω_p du spectre de l'impulsion :

$$k(\omega) \simeq k(\omega_p) + (\omega - \omega_p) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_p} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_p)^2 \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_p} . \quad (4.75)$$

Le deuxième terme de ce développement aboutit à la définition de la *vitesse de groupe* :

$$v_g = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}} . \quad (4.76)$$

Le troisième terme s'appelle la *dispersion du deuxième ordre* ou la *dispersion du délai de groupe* :

$$\beta_2 = \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_p} . \quad (4.77)$$

TABLE 4.1 – Quelques exemples de paramètres de dispersion pour deux verres optiques différents. T_g est le délai de groupe par mm de propagation.

Material	λ_0 (nm)	n_0	T_g (fs/mm)	β_2 (fs ² /mm)
BK7	400	1.5308	5282	120.79
	500	1.5214	5185	86.87
	600	1.5163	5136	67.52
	800	1.5108	5092	43.96
	1000	1.5075	5075	26.93
	1200	1.5049	5069	10.43
SF10	400	1.7783	6626	673.68
	500	1.7432	6163	344.19
	600	1.7267	5980	233.91
	800	1.7112	5830	143.38
	1000	1.7038	5771	99.42
	1200	1.6992	5743	68.59

Quelques exemples typiques de ces paramètres sont donnés dans la table 4.1. Il convient de remarquer que comme de tels matériaux sont en général utilisés dans leur fenêtre de transparence, ils se situent dans la zone de dispersion “normale”, c'est-à-dire que $\beta_2 > 0$.

3. Ce développement est valable uniquement quand les termes suivants sont négligeables, c'est-à-dire à la fois pour des impulsions pas trop courtes dans des milieux modestement dispersifs. Dans certaines situations, il faut bien sûr prendre en compte les termes suivants, voire même ne pas faire de développement limité du tout.

Propagation et étalement d'impulsion

En utilisant les équations (4.73, 4.75-4.77), l'impulsion à l'abscisse z s'écrit :

$$E^{(+)}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}_0 \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\Delta\omega^2} \right] \times \exp \left[-i\omega t + ik_p z + i(\omega - \omega_p) \frac{z}{v_g} + i(\omega - \omega_p)^2 \frac{\beta_2 z}{2} \right], \quad (4.78)$$

où nous avons introduit

$$k_p = k(\omega_p). \quad (4.79)$$

Avec le changement de variable

$$u = \omega - \omega_p, \quad (4.80)$$

on obtient :

$$E^{(+)}(z, t) = \frac{\hat{E}_0}{2\pi} e^{-i(\omega_p t - k_p z)} \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \left[-\frac{u^2}{2\Delta u^2} - iu \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right], \quad (4.81)$$

avec

$$\frac{1}{\Delta u^2} = \frac{1}{\Delta\omega^2} - i\beta_2 z. \quad (4.82)$$

En utilisant l'équation (4.65), on obtient finalement :

$$E^{(+)}(z, t) = \Delta u \Delta t_0 E_0 e^{-i(\omega_p t - k_p z)} \times \exp \left[-\frac{\left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{2\Delta t(z)^2} \right] \exp \left[-i \frac{\left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{2\Delta t(z)^2} \beta_2 \Delta\omega^2 z \right], \quad (4.83)$$

avec

$$\Delta t(z)^2 = \Delta t_0^2 + \Delta\omega^2 \beta_2^2 z^2. \quad (4.84)$$

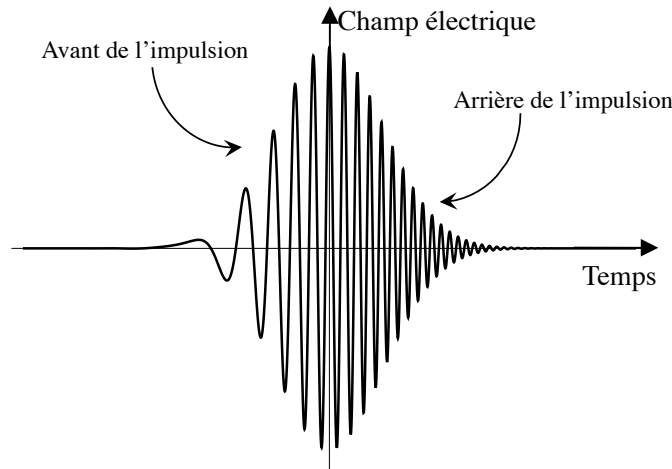


FIGURE 4.2 – Champ électrique d'une impulsion présentant un chirp positif.

L'équation (4.83) montre que l'enveloppe de l'impulsion voyage le long de z à la vitesse de groupe v_g , alors que les plans équiphases se propagent à la vitesse de phase définie par :

$$v_\varphi = \frac{\omega_p}{k_p} = \frac{c}{n(\omega_p)} . \quad (4.85)$$

La vitesse de groupe et la vitesse de phase sont en général différentes.

Les deux derniers termes de cette équation montrent que la dispersion $\beta_2 \neq 0$ du matériau est responsable de l'étalement de l'impulsion décrit dans l'équation (4.84) et de l'apparition d'un glissement de fréquence ("chirp" en anglais, qui signifie littéralement gazouillis). Comme le montre la table 4.1, les milieux transparents usuels ont une dispersion positive : l'impulsion acquiert un chirp positif (voir la figure 4.2) quand elle se propage dans un milieu optique ordinaire. On voit que la fréquence de la lumière augmente en fonction du temps pendant la durée de l'impulsion car les hautes fréquences se propagent moins vite que les basses fréquences.

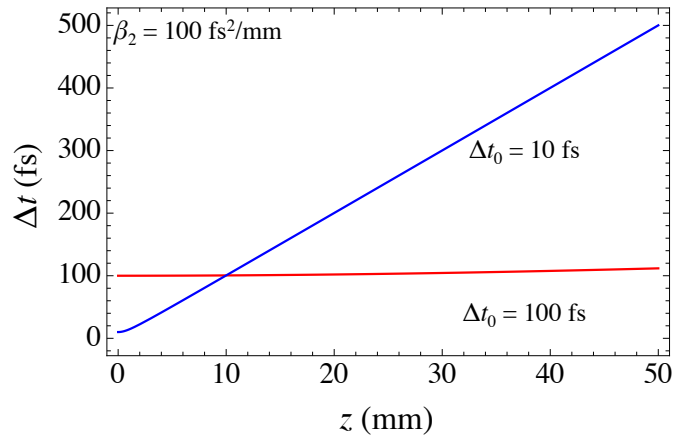


FIGURE 4.3 – Evolution de la durée d'une impulsion se propageant à travers un milieu dispersif avec $\beta_2 = 100 \text{ fs}^2/\text{mm}$ pour deux durées initiales d'impulsion $\Delta t_0 = 10 \text{ fs}$ et $\Delta t_0 = 100 \text{ fs}$.

La figure 4.3 reproduit l'évolution de la durée de l'impulsion $\Delta t(z)$ donnée par l'équation (4.84) pour $\beta_2 = 100 \text{ fs}^2/\text{mm}$ et deux durées initiales d'impulsion : $\Delta t_0 = 10 \text{ fs}$ et $\Delta t_0 = 100 \text{ fs}$. Le rôle de la largeur spectrale de l'impulsion $\Delta\omega = 1/\Delta t_0$ est frappant. En effet, comme les fréquences "bleues" acquièrent du retard à la propagation par rapport aux fréquences "rouges", ce retard est d'autant plus grand que l'impulsion est courte et donc large spectralement. Cela explique pourquoi une impulsion s'étaie d'autant plus vite qu'elle était courte au départ, quand toutes ses composantes spectrales étaient superposées temporellement.

Commentaire : Dans le cas des matériaux optiques habituels, tels que les verres du tableau 4.1, l'indice augmente avec ω dans la zone de transparence. C'est ce qu'on appelle la dispersion normale (voir aussi la figure 4.1). Dans ce cas-là l'équation (4.76) montre que la vitesse de groupe est inférieure à c : l'enveloppe de l'impulsion se propage plus lentement que la vitesse de la lumière dans le

vide. Des expériences récentes, basées sur des résonances atomiques contrôlées, ont permis d'exacerber cette dispersion positive ($dn/d\omega \gg 1$) au point de réduire la vitesse de groupe de la lumière quasiment à zéro : on parle de lumière "lente" et même de "lumière arrêtée". Bien sûr, dans ces situations, si on réduit par exemple la vitesse de groupe de la lumière d'un facteur 1000, la durée de l'impulsion sera aussi réduite d'un facteur 1000 (compression d'impulsion).

Cependant il ne faut pas croire que la vitesse de groupe de la lumière est toujours comprise entre 0 et c . On peut en fait trouver des situations dans lesquelles le milieu, tout en étant quasiment transparent, présente une dispersion négative ($dn/d\omega < 0$) suffisamment forte pour que v_g dépasse c , voire devienne négative ! On parle alors respectivement de lumière rapide et de lumière à vitesse de groupe négative. Dans ce dernier cas, l'enveloppe de l'impulsion se propage à l'envers dans le milieu, et une impulsion sort du milieu avec un retard de groupe négatif, comme l'illustre la figure 4.4. Cette situation, même

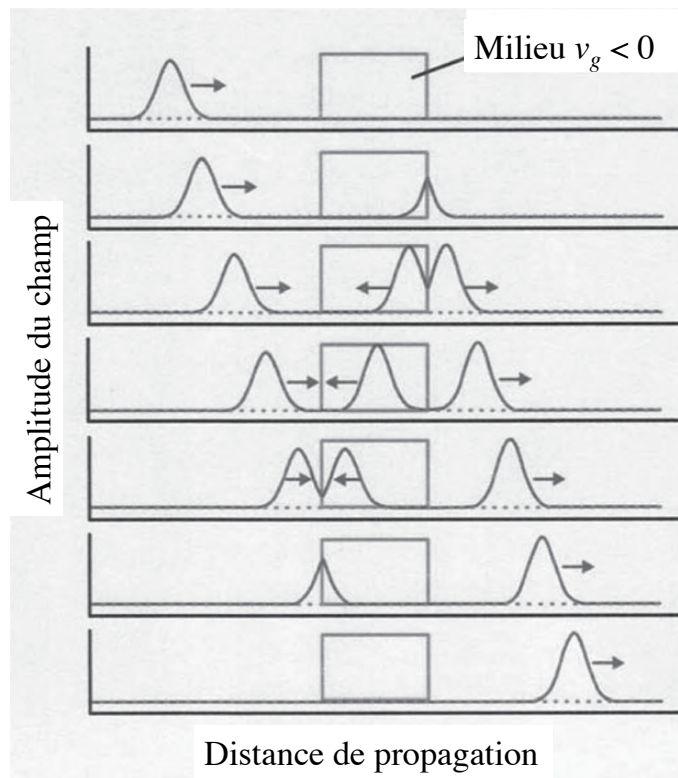


FIGURE 4.4 – Étapes successives de la propagation d'un paquet d'onde à travers un milieu à vitesse de groupe négative. Adapté de D. J. Gauthier et R. W. Boyd, *Photonics Spectra*, Janvier 2007.

si elle est troublante, ne contredit en rien la causalité einsteinienne : on peut montrer qu'aucune information ne voyage plus vite que c .

4.2.1.3 Propagation d'une impulsion à dérive de fréquence dans un milieu dispersif

Considérons maintenant la propagation dans le milieu dispersif d'une impulsion qui présente initialement un chirp. La partie analytique du champ vaut :

$$E^{(+)}(0, t) = E_0 \exp \left[-\frac{1 + iC}{2} \frac{t^2}{\Delta t_0^2} \right] e^{-i\omega_p t}, \quad (4.86)$$

où C est le taux de chirp. La transformée de Fourier de $E^{(+)}(0, t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(0, \omega) &= \hat{E}_0 \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2(1 + iC)} \Delta t_0^2 \right] \\ &= \hat{E}_0 \exp \left[-\frac{\Delta t_0^2 (1 - iC)}{2(1 + C^2)} (\omega - \omega_p)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.87)$$

montrant ainsi que la largeur spectrale de l'impulsion est $\sqrt{1 + C^2}/\Delta t_0$ au lieu de $1/\Delta t_0$ pour une impulsion non chirpée. Pour une impulsion sans chirp respectant l'égalité (4.64), on parle d'impulsion "limitée par transformée de Fourier". Notre impulsion chirpée (4.86) n'est pas limitée par transformée de Fourier.

Après propagation à travers une épaisseur z de milieu dispersif, le spectre de l'impulsion devient :

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(z, \omega) &\propto \hat{E}^{(+)}(0, \omega) \exp \left[\frac{i}{2} \beta_2 (\omega - \omega_p)^2 z \right] \\ &\propto \hat{E}_0 \exp \left[-(\omega - \omega_p)^2 \left(\frac{\Delta t_0^2}{2(1 + iC)} - \frac{i}{2} \beta_2 z \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Par conséquent, la forme de l'impulsion s'écrit :

$$\begin{aligned} E^{(+)}(z, t) &\propto E_0 \exp \left[-\frac{\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{4} \left(\frac{\Delta t_0^2}{2(1 + iC)} - \frac{i}{2} \beta_2 z \right)^{-1} \right] \\ &\propto E_0 \exp \left[-\frac{\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{2} \frac{\Delta t_0^2 + i(C\Delta t_0^2 + \beta_2 C^2 z + \beta_2 z)}{(\Delta t_0^2 + \beta_2 C z)^2 + \beta_2^2 z^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.89)$$

On peut extraire la durée de l'impulsion de l'équation (4.89) :

$$\Delta t(z) = \Delta t_0 \sqrt{\left(1 + \frac{\beta_2 C z}{\Delta t_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\right)^2}. \quad (4.90)$$

La figure 4.5 représente l'évolution de $\Delta t(z)$ en fonction de z dans deux cas différents. L'impulsion peut être comprimée quand $C\beta_2 < 0$. Dans ce cas, $\Delta t(z)$ est minimal à l'abscisse z_{\min} donnée par :

$$z_{\min} = -\frac{C}{1 + C^2} \frac{\Delta t_0^2}{\beta_2}. \quad (4.91)$$

La durée minimale correspondante de l'impulsion est donnée par :

$$\Delta t_{\min} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 + C^2}}, \quad (4.92)$$

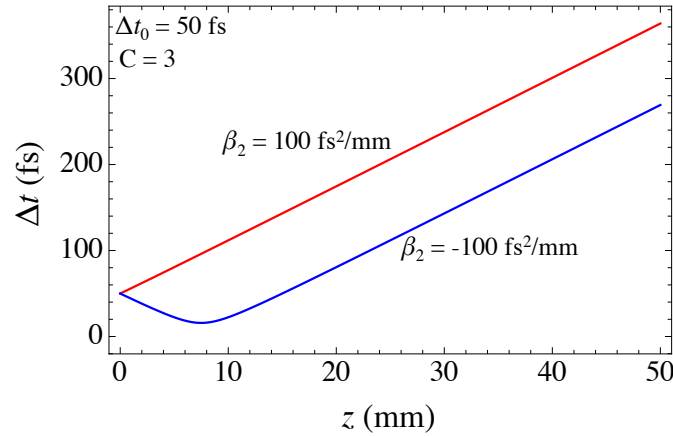


FIGURE 4.5 – Evolution de la durée d’une impulsion à dérive de fréquence se propageant dans un milieu dispersif avec $\beta_2 = \pm 100 \text{ fs}^2/\text{mm}$ pour une durée initiale $\Delta t_0 = 50 \text{ fs}$ et un paramètre de chirp $C = 3$.

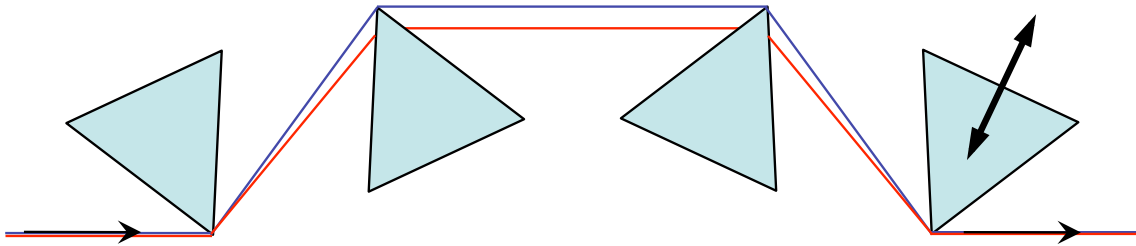


FIGURE 4.6 – Ligne à retard de groupe ajustable utilisant quatre prismes.

qui est consistant avec le fait que la largeur spectrale de l’impulsion vaut $\sqrt{1 + C^2}/\Delta t_0$.

Il est par conséquent clair que pour comprimer une impulsion présentant un chirp positif, il faut disposer d’une dispersion négative. Ceci ne peut pas être obtenu dans un milieu transparent ordinaire, et nécessite des techniques plus sophistiquées basées sur des fibres optiques à dispersion négative, un interféromètre de Gires-Tournois, une paire de prisme, des miroirs dispersifs, une paire de réseaux de diffraction, etc... La figure 4.6 montre par exemple comment quatre prismes peuvent créer une dispersion du délai de groupe ajustable. En effet, dans ce système, la dispersion angulaire des prismes permet d’imposer un chemin plus long à la partie rouge du spectre qu’à la partie bleue du spectre. Cette dispersion négative du délai de groupe peut être plus ou moins compensée en translatant le dernier prisme le long de la flèche, ce qui permet de faire traverser plus ou moins de verre à la lumière.

Complément 4A

Caractérisation d'impulsions optiques

Comme les détecteurs optiques sont quadratiques, il est bien sûr impossible de mesurer directement le champ électrique d'une impulsion lumineuse. En ce qui concerne les impulsions courtes (< 1 ps), il est même impossible de mesurer l'évolution de l'intensité en fonction du temps, puisque les détecteurs les plus rapides ont une bande passante de quelques centaines de GHz. Différentes stratégies basées sur des techniques de corrélations optiques ont alors été développées pour caractériser les impulsions courtes. Dans ce complément, nous essayons seulement de donner un aperçu du principe de quelques unes d'entre elles.

4A.1 Autocorrélation d'intensité

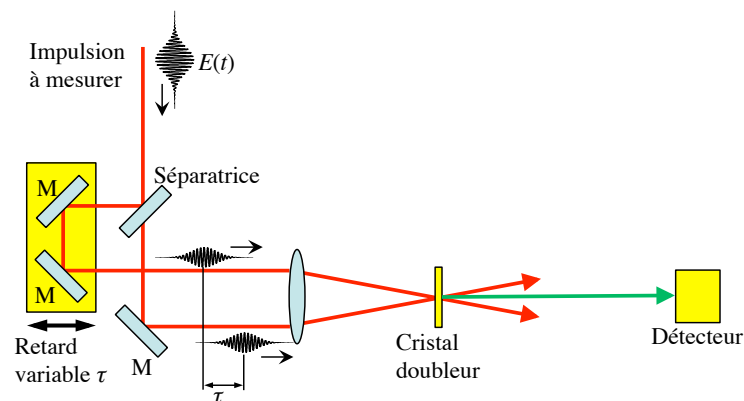


FIGURE 4A.1 – Autocorrélateur en intensité non collinéaire. M : miroir.

Le principe de l'autocorrélateur en intensité est schématisé en figure 4A.1. L'impulsion à analyser est séparée en deux par une lame semi-réfléchissante. Un retard ajustable τ est appliqué à une des impulsions par rapport à l'autre, avant que les deux impulsions ne se recombinent dans un milieu non-linéaire qui donne lieu à de la génération de seconde harmonique. Le rôle de ce milieu est de sommer les fréquences de deux ondes pour créer une

onde à la fréquence double. En d'autres termes, ce cristal prend un "photon" de fréquence ω dans chacun des faisceaux pour créer un photon à la fréquence 2ω . Comme le montre la figure 4A.1, les deux faisceaux forment un angle dans le cristal non linéaire. Ceci garantit qu'en plaçant un détecteur selon la bissectrice de ces deux faisceaux, on ne peut détecter que les photons à 2ω provenant de l'addition d'un photon d'un faisceau avec un photon de l'autre faisceau. En d'autres termes, le détecteur ne peut détecter quelque chose que quand les deux impulsions sont superposées dans le cristal non linéaire. Par conséquent, l'intensité à 2ω incidente sur le détecteur s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{\text{SHG}}(t, \tau) &\propto I(t)I(t + \tau) \\ &\propto |\mathcal{E}(t)|^2 |\mathcal{E}(t + \tau)|^2 . \end{aligned} \quad (4A.1)$$

Cependant, rappelons que le détecteur est trop lent pour suivre les variations de $I(t)$ dans l'équation (4A.1). Il fait donc une moyenne temporelle de ce signal, ce qui donne la fonction d'autocorrélation sur fond noir de l'intensité de l'impulsion :

$$S_{\text{intens,ac}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(t)|^2 |\mathcal{E}(t + \tau)|^2 dt . \quad (4A.2)$$

Rappelons la définition du champ électrique de l'impulsion :

$$\begin{aligned} E(t) &= E^{(+)}(t) + \text{c.c.} \\ &= \mathcal{E}(t)e^{-i\omega_p t} + \text{c.c.} \\ &= |\mathcal{E}(t)| e^{i\varphi(t)} e^{-i\omega_p t} + \text{c.c.} . \end{aligned} \quad (4A.3)$$

Il convient de remarquer que l'autocorrélation d'intensité est une fonction symétrique :

$$S_{\text{intens,ac}}(-\tau) = S_{\text{intens,ac}}(\tau) . \quad (4A.4)$$

La figure 4A.2 reproduit des exemples d'autocorrélations d'intensité pour plusieurs formes d'impulsions. Remarquons que beaucoup de détails de l'impulsion sont perdus dans l'autocorrélation, ce qui rend cette méthode relativement ambiguë : il est impossible de déduire la forme de l'impulsion à partir de son autocorrélation. Il est même impossible de déduire la durée de l'impulsion à partir de l'autocorrélation sans faire une hypothèse sur la forme de l'impulsion.

4A.2 Autocorrélation interférométrique

Selon l'équation (4A.2), l'autocorrélation d'intensité ne donne accès à aucune information concernant l'évolution de la phase $\varphi(t)$ du champ pendant l'impulsion. Par exemple, il est impossible de détecter qu'une impulsion est "chirpée" en mesurant son autocorrélation d'intensité. Pour tenter de remédier à ce problème, on utilise parfois un autocorrélateur interférométrique basé sur le principe de la figure 4A.3. Dans cet appareil, les deux copies de l'impulsion décalées dans le temps sont envoyées de façon colinéaire dans le cristal doubleur. Alors la puissance optique à la fréquence double est proportionnelle au carré du

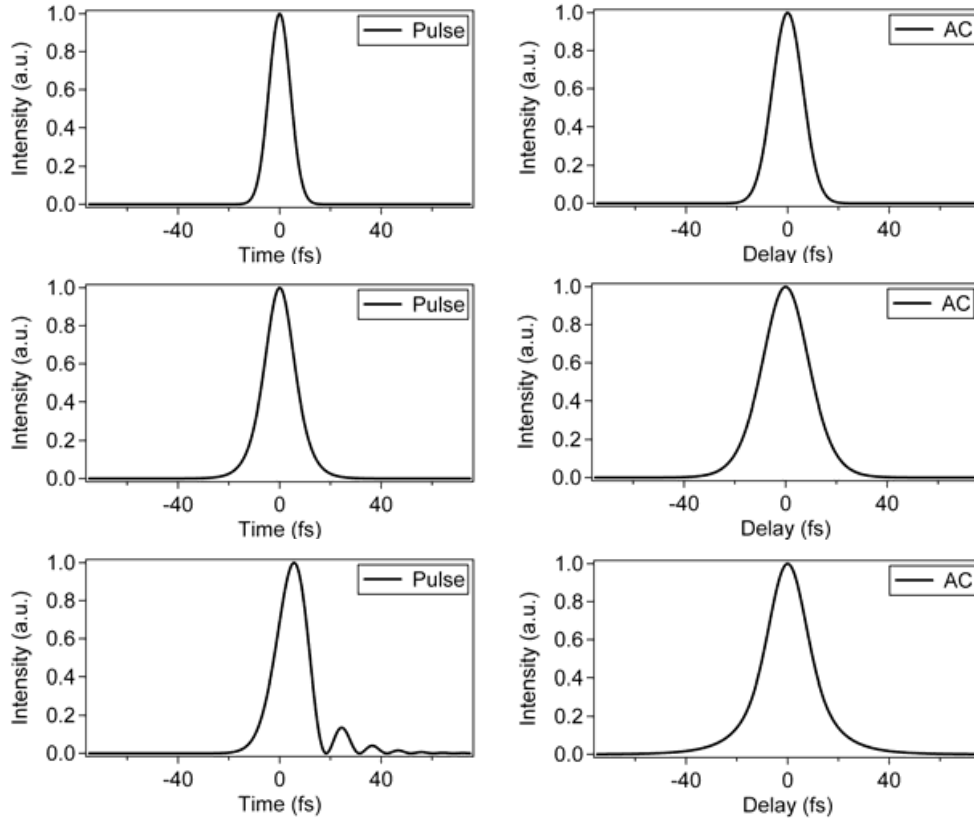


FIGURE 4A.2 – Exemples de formes d'impulsions et signaux d'autocorrélations d'intensité correspondants. Colonne de gauche : Intensité en fonction du temps. Colonne de droite : Autocorrélations d'intensité correspondantes. Haut : Impulsion gaussienne de 10 fs. Milieu : Impulsion sech^2 de 7 fs. Bas : Impulsion contenant un terme de phase spectrale du troisième ordre (Notes de cours de Rick Trebino).

résultat de l'interférence entre les deux impulsions. Donc le signal issu du détecteur est proportionnel à :

$$S_{\text{interf,ac}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| E^{(+)}(t) + E^{(+)}(t + \tau) \right|^2 \right\}^2 dt, \quad (4A.5)$$

En utilisant à nouveau l'équation (4A.3), nous pouvons identifier dans (4A.5) les termes qui ne dépendent pas de τ , ceux qui sont proportionnels à $\exp(\pm i\omega_p \tau)$ et ceux qui sont proportionnels à $\exp(\pm 2i\omega_p \tau)$, pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} S_{\text{interf,ac}}(\tau) &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} \left[|\mathcal{E}(t)|^4 + 2 |\mathcal{E}(t)|^2 |\mathcal{E}(t + \tau)|^2 \right] dt \\ &+ 12 e^{i\omega_p \tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(t)| |\mathcal{E}(t + \tau)| \left[|\mathcal{E}(t)|^2 + |\mathcal{E}(t + \tau)|^2 \right] e^{i[\varphi(t) - \varphi(t + \tau)]} dt + \text{c.c.} \\ &+ 6 e^{2i\omega_p \tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(t)|^2 |\mathcal{E}(t + \tau)|^2 e^{2i[\varphi(t) - \varphi(t + \tau)]} dt + \text{c.c.} . \end{aligned} \quad (4A.6)$$

La figure 4A.4 reproduit deux exemples de signaux d'autocorrélation interférométrique. Un trait caractéristique de l'autocorrélation interférométrique est le rapport de 8 à 1 qui

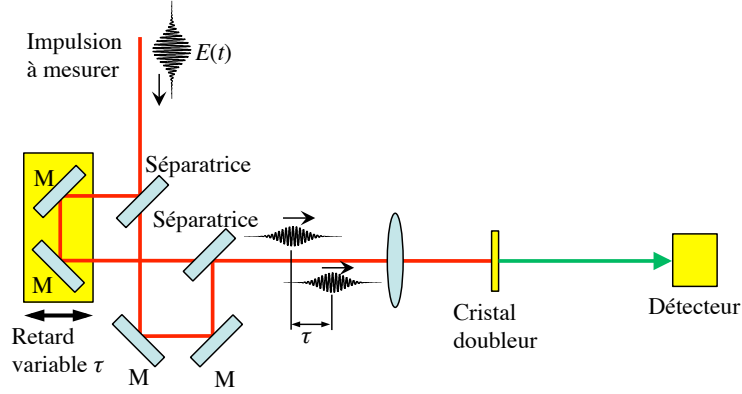
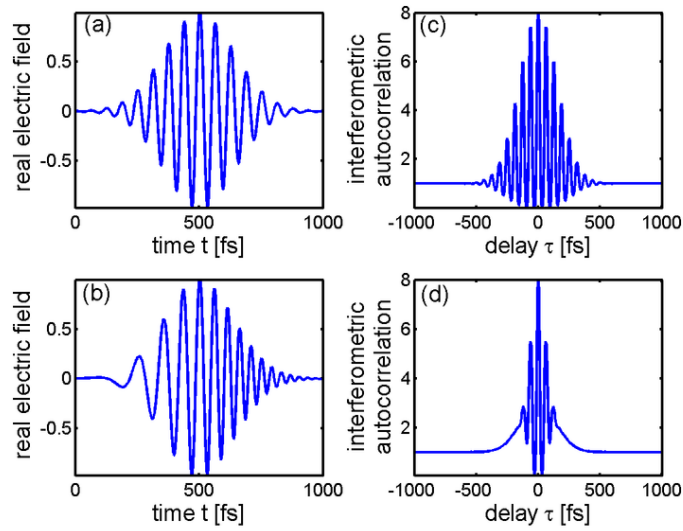
FIGURE 4A.3 – Autocorrélateur interférométrique. *M* : miroir.

FIGURE 4A.4 – Deux impulsions courtes (a) et (b) accompagnées de leurs autocorrélations interférométriques respectives (c) et (d). Les deux impulsions ont les mêmes intensités mais l'impulsion (b) a un chirp positif que n'a pas l'impulsion (a). Ceci entraîne une différence entre les autocorrélations correspondantes. En (d), le chirp moyenne à zéro les franges dans les ailes de l'autocorrélation. Remarquez le rapport 8 à 1 entre le pic et les ailes, caractéristique de l'autocorrélation interférométrique. (Wikipedia).

existe entre le maximum et les ailes. On peut le déduire de l'équation (4A.5) :

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{\text{interf,ac}}(0)}{S_{\text{interf,ac}}(\infty)} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |E^{(+)}(t) + E^{(+)}(t)|^4 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |E^{(+)}(t)|^4 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |E^{(+)}(t)|^4 dt} \\
 &= \frac{16 \int_{-\infty}^{\infty} |E^{(+)}(t)|^4 dt}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |E^{(+)}(t)|^4 dt} = 8 .
 \end{aligned} \tag{4A.7}$$

La figure 4A.4 montre que l'autocorrélation interférométrique dépend de la phase $\varphi(t)$ de l'impulsion. On peut encore gagner de information sur l'impulsion en filtrant le signal de façon à séparer les trois composantes de l'équation (4A.6). Cependant, même avec ces

raffinements, cette technique ne donne accès qu'à une connaissance partielle de l'impulsion. Elle ne peut pas permettre de caractériser entièrement des impulsions inconnues.

4A.3 Frequency-Resolved Optical Gating (FROG)

Comme nous venons de le voir, les techniques d'autocorrélation ne permettent pas de retrouver les intensités et phases d'impulsions inconnues. Afin d'y parvenir, il ne suffit pas de réaliser des mesures d'autocorrélation dans le domaine temporel, mais plus généralement dans le *domaine spectro-temporel*. Cela signifie que l'autocorrélation doit être mesurée aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine spectral, si on veut pouvoir déterminer complètement l'allure de l'impulsion.

L'idée derrière cette technique est la même que dans la représentation de la musique sur une partition : nous cherchons une méthode permettant de représenter l'évolution du contenu spectral du signal en fonction du temps. Ce type de représentation s'appelle un *spectrogramme*. Le spectrogramme du signal analytique $E^{(+)}(t)$ est donné par :

$$S_{\text{spectrogr}}(\omega, \tau) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} E^{(+)}(t)g(t - \tau)e^{i\omega t} dt \right|^2, \quad (4A.8)$$

où $g(t - \tau)$ est une fonction porte, qui fournit un fenêtrage temporel. La signification de l'équation (4A.8) est limpide : le spectrogramme au temps τ est la densité spectrale de puissance d'une petite portion du signal autour de l'instant τ , comme le montre la figure 4A.5. Par conséquent, un spectrogramme typique peut être interprété comme l'évolution temporelle d'un spectre "local" en temps du signal, comme une partition de musique.

Toute la question est bien sûr de savoir comment construire la fonction porte $g(t - \tau)$ pour une impulsion lumineuse ultra-courte. L'idée est à nouveau d'utiliser l'optique non-linéaire, et plus précisément un effet non-linéaire créé par une copie de l'impulsion retardée d'un retard τ . Divers effets non-linéaires, dont nous aborderons quelques exemples au chapitre 4, peuvent être utilisés à cet effet. Nous ne mentionnons ici que le "FROG" basé sur une porte de polarisation, qui est un des plus proches de l'équation (4A.8). Son principe est décrit dans la figure 4A.6. Il utilise un autre effet non-linéaire que l'autocorrélation : l'effet Kerr, une non-linéarité du troisième ordre que nous étudierons au chapitre 4. Tout ce que nous devons savoir pour le moment est que dans un tel milieu non-linéaire, comme par exemple de la silice, l'impulsion crée une biréfringence proportionnelle à son intensité. Ainsi, entre polariseurs croisés, la biréfringence créée par l'impulsion est sondée avec une autre copie de l'impulsion. Le champ qui traverse le second polariseur est donc proportionnel au champ sonde $E^{(+)}(t)$ et à la biréfringence induite par le champ retardé et donc proportionnelle à son intensité $|E^{(+)}(t - \tau)|^2$. Cette dernière intensité constitue la porte $g(t - \tau)$ et on a :

$$S_{\text{spectrogr}}(\omega, \tau) \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} E^{(+)}(t) |E^{(+)}(t - \tau)|^2 e^{i\omega t} dt \right|^2, \quad (4A.9)$$

la transformée de Fourier étant réalisée par un spectromètre classique muni d'une caméra.

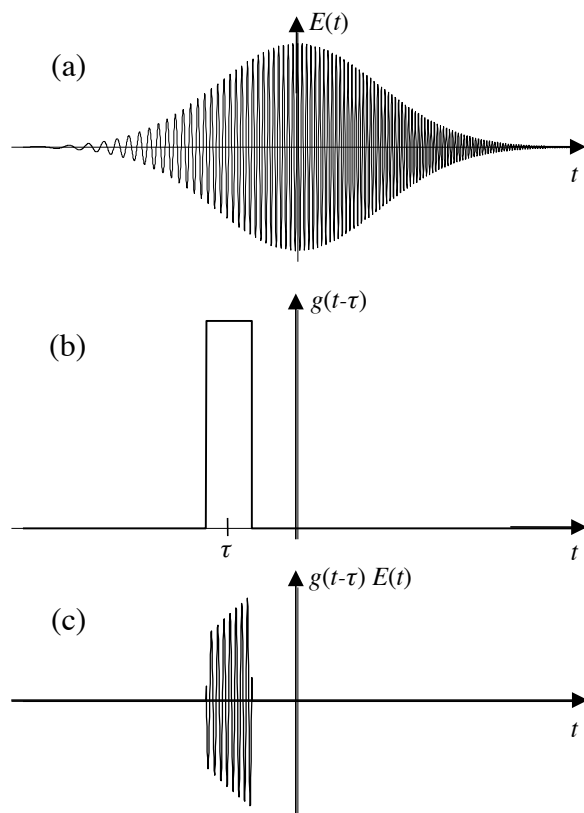


FIGURE 4A.5 – Fenêtrage d'une partie de l'impulsion autour de l'instant τ . (a) Impulsion initiale. (b) Fonction de fenêtrage. (c) Impulsion fenêtrée.

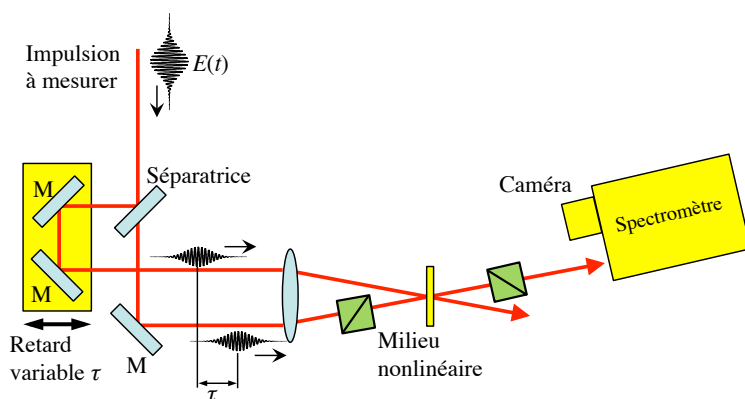


FIGURE 4A.6 – FROG à fenêtrage par polarisation. M : miroir.

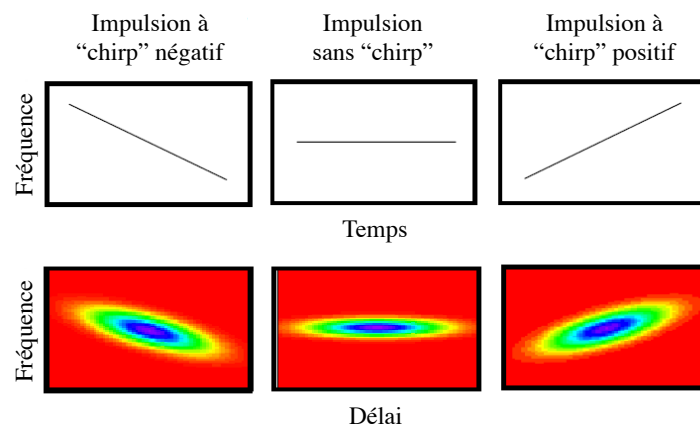


FIGURE 4A.7 – Spectrogrammes (rangée du bas) d’impulsions gaussiennes chirpées. Le spectrogramme reflète l’évolution du spectre de l’impulsion en fonction du temps, à la manière d’une partition musicale. (d’après les notes de cours de Rick Trebino).

Quelques exemples de spectrogrammes obtenus par cette technique sont reproduits dans la figure 4A.7. Ces figures donnent une bonne intuition du contenu spectral et énergétique de l’impulsion. De plus, il existe des algorithmes qui permettent de remonter sans ambiguïté à l’intensité et la phase de l’impulsion à partir du spectrogramme. Ces algorithmes, ainsi que d’autres méthodes concurrentes telles que l’interférométrie spectrale (SPIDER = “spectral phase interferometry for direct electric-field reconstruction”) vont bien au-delà de l’objectif de ce cours.

Chapitre 5

Guides d'ondes

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la diffraction mène à un étalement inexorable des faisceaux. Ceci constitue une des raisons pour lesquelles on peut souhaiter guider la lumière, par exemple pour construire des réseaux de télécommunications. Une autre raison est que pour inscrire une information sur un faisceau optique, il faut utiliser un modulateur, qui est, dans les cas les plus simples, un interrupteur commandable électriquement. Ainsi, le signal à transmettre est utilisé pour commander le modulateur, et l'information est codée sur une des grandeurs caractérisant la lumière, l'intensité dans le cas présent. Si on veut pouvoir transmettre de cette façon des informations avec un haut débit, il faut que le temps de réponse du modulateur soit très court. Or les dispositifs électriques ont en général des temps de réponse qui augmentent avec leur taille. Par exemple, dans le cas d'un modulateur électro-optique, le temps de réponse est limité par des effets capacitifs et vaut RC , où R est la résistance et C la capacité du cristal électro-optique utilisé. Cette capacité est par ailleurs inversement proportionnelle à l'épaisseur du cristal. On a donc tout intérêt à réduire la taille des composants actifs comme les modulateurs, les détecteurs, etc. Une façon d'y parvenir est à nouveau de guider la lumière afin que le faisceau reste confiné sur des dimensions transverses de l'ordre de la longueur d'onde pendant des longueurs arbitrairement grandes.

Dans le domaine optique et radiofréquence, le guide le plus simple à comprendre est le guide métallique. Cependant ses pertes sont limitées par les pertes ohmiques du métal, et, dans le domaine optique par exemple, il est beaucoup plus efficace de réaliser des guides diélectriques. Ceci explique le plan de cette section.

D'autre part, les guides d'onde peuvent prendre bien des formes. Les plus courantes dans le domaine optique sont celles de la figure 5.1. Nous nous limiterons dans ce chapitre au cas des guides d'onde unidimensionnels, dits guides d'onde plans (figure 5.1(a)), qui permettent de dégager l'essentiel de la physique sans se perdre dans le formalisme.

5.1 Guides d'onde plans métalliques

Nous considérons un guide composé de deux miroirs métalliques plans infinis supposés parfaits, séparés dans le vide par une distance d le long de l'axe y (voir la figure 5.2).

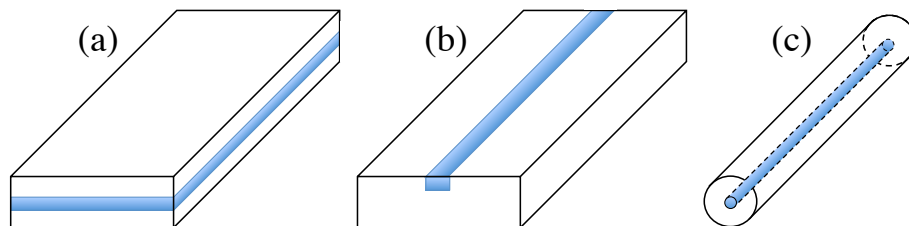


FIGURE 5.1 – (a) Guide d'onde plan ; (b) Guide d'onde ruban ; (c) Fibre optique.

Nous allons chercher à comprendre comment la lumière peut se propager le long de l'axe z en restant confinée entre les deux plans. Dans un premier temps, nous supposons que nous décrivons les modes de propagation comme des rayons ou, ce qui est équivalent, des ondes planes, qui rebondissent entre les deux miroirs, comme le rayon ABC de la figure 5.2. Il est clair, compte tenu de la symétrie du problème, qu'il va falloir distinguer deux polarisations : la polarisation TE (transverse électrique) pour laquelle le champ électrique de l'onde est parallèle à x , c'est-à-dire perpendiculaire au plan d'incidence sur les miroirs, et la polarisation TM (transverse magnétique) pour laquelle le champ magnétique de l'onde est parallèle à x .

5.1.1 Modes TE

Commençons par considérer des ondes dont le champ électrique est parallèle au plan des miroirs, donc parallèle à x . Chercher les *modes de propagation* d'une structure guidante consiste à chercher les distributions du champ qui se propagent le long du guide sans déformation. Une bonne partie de la solution peut être obtenue dans le cadre de l'optique géométrique. Pour le moment, nous décrivons donc notre champ comme un rayon. Supposons que ce rayon incident (depuis la gauche de la figure 5.2) forme un angle θ avec le miroir du haut.¹ Ce rayon va se réfléchir sur le miroir du haut en A , puis sur le miroir du bas en C . Après deux réflexions, le guide contiendra donc la superposition entre l'onde plane correspondant au rayon incident et l'onde ayant subi deux réflexions. Si l'angle θ de ce rayon correspond à un mode, alors l'onde initiale et l'onde ayant subi deux réflexions doivent être en phase : c'est la condition dite d'*auto-consistance* du champ, qui dit qu'un mode doit rester invariant après les deux réflexions. Ceci impose que le déphasage entre les deux ondes soit égal à un nombre entier de fois 2π . Ce déphasage contient deux termes : i) la différence de marche entre les deux chemins $2\pi AC/\lambda - 2\pi AB/\lambda$ et ii) le déphasage dû aux deux réflexions. Chaque réflexion impose un déphasage de π , et d'autre part

$$AC - AB = 2d \sin \theta . \quad (5.1)$$

1. Attention : l'angle θ que nous considérons ici est le complémentaire de l'angle θ considéré dans la partie consacrée à la réflexion à l'interface entre deux milieux simples (comparer la figure 2.1 avec la figure 5.2). Nous avons en effet préféré garder les conventions habituelles dans ces deux domaines, même si elles sont malheureusement opposées !

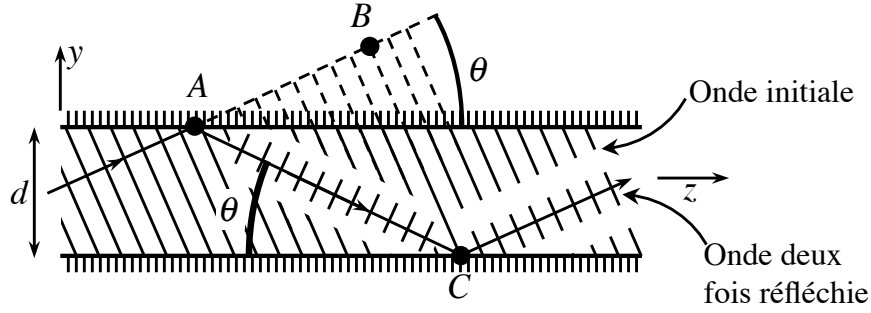


FIGURE 5.2 – Guide d'onde plan métallique.

Donc finalement la condition d'auto-consistance devient :

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2d \sin \theta = 2m\pi, \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Donc, dans l'image de l'optique géométrique, les modes correspondent à des angles θ_m qui vérifient

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{2d}, \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Le mode correspondant à $m = 1$, c'est-à-dire à $\sin \theta_1 = \lambda/2d$, s'appelle le *mode fondamental* du guide. On remarque qu'il n'existe que si cette quantité est inférieure à 1. Dans le cas où

$$\lambda > 2d, \quad (5.4)$$

le guide n'a aucun mode guidé pour la polarisation TE. Dans le cas contraire, le nombre N_{TE} de modes TE qui peuvent se propager dans le guide est égal à la partie entière de $2d/\lambda$:

$$N_{\text{TE}} = \text{E} \left(\frac{2d}{\lambda} \right), \quad (5.5)$$

L'équation (5.4) peut être vue d'une autre manière : un guide d'onde d'épaisseur d donnée ne peut guider que des longueurs d'onde inférieures à la *longueur d'onde de coupure*

$$\lambda_{\text{cutoff}} = 2d. \quad (5.6)$$

De plus, le guide est monomode pour

$$d \leq \lambda < 2d. \quad (5.7)$$

Comme le rayon se propage dans le vide séparant les deux miroirs, le nombre d'onde de l'onde vaut $k = 2\pi/\lambda$. Le vecteur d'onde se décompose en deux composantes : une composante transverse selon y égale à

$$k_y^{(m)} = k \sin \theta_m = m \frac{\pi}{d}, \quad (5.8)$$

et une partie longitudinale donnée par

$$\beta_m = k_z^{(m)} = k \cos \theta_m = \sqrt{k^2 - m^2 \frac{\pi^2}{d^2}}. \quad (5.9)$$

β_m s'appelle la constante de propagation du mode. En effet le champ complexe évolue en $\exp[-i(\omega t - \beta_m z)]$. Par conséquent la vitesse de phase du mode m est donnée par

$$v_\varphi^{(m)} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{c}{\cos \theta_m} . \quad (5.10)$$

De plus, d'après (5.9), on a la relation de dispersion :

$$\beta_m^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - m^2 \frac{\pi^2}{d^2} , \quad (5.11)$$

que l'on peut différencier pour obtenir

$$2\beta_m d\beta_m = \frac{2\omega d\omega}{c^2} , \quad (5.12)$$

qui permet de calculer la vitesse de groupe du mode m :

$$v_g^{(m)} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = 2\beta_m \frac{c^2}{2\omega} = c \cos \theta_m . \quad (5.13)$$

Les différents modes ont donc différentes vitesses de groupe, qui sont simplement la projection de la vitesse de la lumière sur z : on parle de *dispersion intermodale*. Le mode fondamental $m = 1$, qui est le plus rasant, est bien sûr celui qui a la plus grande vitesse de groupe.

Le fait que les différents modes aient différentes vitesses de groupe explique pourquoi les télécommunications à haut débit nécessitent des guides monomodes. En effet, si une impulsion codant un bit d'information est envoyée dans un guide multimode, on aura plusieurs impulsions, correspondant aux temps de parcours de différents modes, à la sortie du guide, ce qui brouille la communication.

L'allure des modes dans le guide peut être déduite soit à partir de l'équation de propagation dans le vide, soit simplement en examinant la relation (5.8). Un mode est constitué de l'interférence deux ondes planes qui se propagent selon des vecteurs d'onde de composantes $(0, k_y^{(m)}, \beta_m)$ et $(0, -k_y^{(m)}, \beta_m)$, de façon à ce que le champ s'annule sur les miroirs. Donc la dépendance transverse est en $\cos m\pi y/d$ pour les modes pairs et $\sin m\pi y/d$ pour les modes impairs. Au bilan, le champ du mode m s'écrit :

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_m \hat{\mathbf{x}} u_m(y) \exp[-i(\omega t - \beta_m z)] + \text{c.c.} , \quad (5.14)$$

avec

$$u_m(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{d}} \cos \frac{m\pi y}{d} & \text{pour } m = 1, 3, 5 \dots \\ \sqrt{\frac{2}{d}} \sin \frac{m\pi y}{d} & \text{pour } m = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \quad (5.15)$$

On remarque en particulier que les différents modes sont orthogonaux. Leurs allures sont représentées en figure 5.3. Ce problème est formellement équivalent à celui du puits infini à une dimension en mécanique quantique.

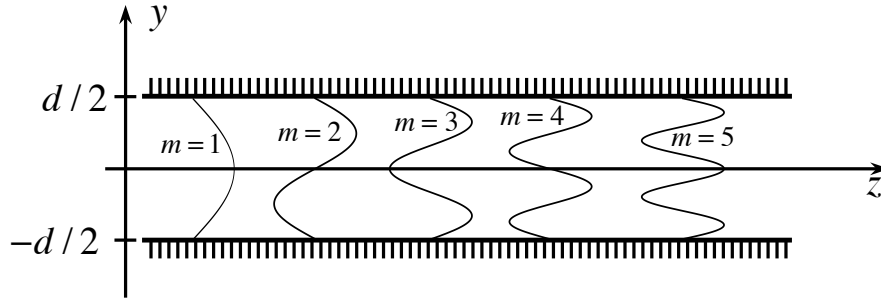


FIGURE 5.3 – Allure des champs des cinq premiers modes TE.

5.1.2 Modes TM

La polarisation TM correspond à un champ magnétique orienté selon l'axe x . Dans ce cas le champ électrique du mode a des composantes non nulles à la fois selon y et z . La composante selon z est parallèle aux miroirs, de la même manière que le champ électrique du mode TE calculé précédemment. Par conséquent, la condition d'auto-consistance pour la composante selon z du champ TM est exactement la même que celle de la composante selon x du champ TE. Nous pouvons en déduire que la constante de propagation des modes TM est aussi donnée par l'équation (5.9) et que les champs des modes TM s'écrivent :

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_m \left[\hat{\mathbf{y}} u_y^{(m)}(y) + \hat{\mathbf{z}} u_z^{(m)}(y) \right] \exp[-i(\omega t - \beta_m z)] + \text{c.c.}, \quad (5.16)$$

avec

$$u_z^{(m)}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{d}} \cos \frac{m\pi y}{d} & \text{pour } m = 1, 3, 5 \dots \\ \sqrt{\frac{2}{d}} \sin \frac{m\pi y}{d} & \text{pour } m = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \quad (5.17)$$

Comme le champ électrique est orthogonal à la direction de propagation du rayon, il fait un angle $\pi/2 \pm \theta$ avec l'axe z , la composante selon z du champ est donc proportionnelle à $\cos \theta_m$ et celle selon y à $\sin \theta_m$. On déduit donc de (5.17) :

$$u_y^{(m)}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{d}} \cot \theta_m \cos \frac{m\pi y}{d} & \text{pour } m = 1, 3, 5 \dots \\ \sqrt{\frac{2}{d}} \cot \theta_m \sin \frac{m\pi y}{d} & \text{pour } m = 2, 4, 6 \dots \end{cases} \quad (5.18)$$

5.2 Guides d'onde plans diélectriques

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction à cette section, les guides d'onde métalliques présentent beaucoup de pertes aux fréquences optiques, alors qu'un matériau diélectrique peut atteindre des transparences remarquables. C'est pourquoi la plupart des guides utilisés dans le domaine optique utilisent des matériaux diélectriques (silice, niobate de lithium, silicium, verres de phosphate, matériaux organiques, etc...). Dans ce paragraphe nous considérons à nouveau un guide plan, mais constitué cette fois d'un matériau d'indice n_1 (le cœur) entouré de deux matériaux d'indice n_2 (la gaine optique), comme le montre la figure 5.4.

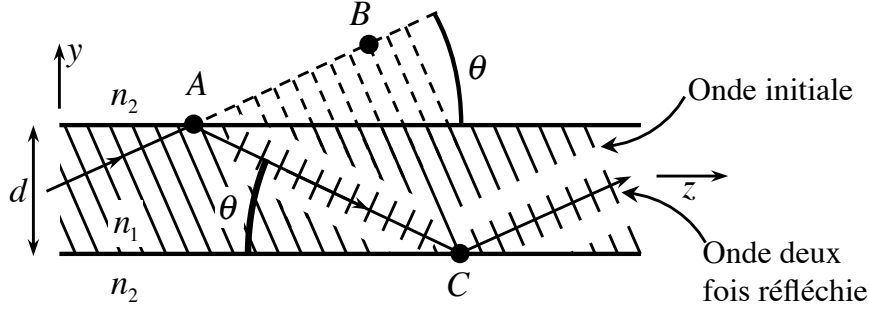


FIGURE 5.4 – Guide d'onde plan diélectrique.

La réflexion sur les interfaces entre le cœur et la gaine optique est assurée cette fois non plus par des miroirs parfaits, mais par le phénomène de réflexion totale interne que nous avons vu ci-dessus (voir la figure 2.4). Pour avoir guidage, il faut donc que

$$n_1 > n_2 , \quad (5.19)$$

et que le rayon soit incident sur l'interface avec un angle d'incidence $\pi/2 - \theta$ plus grand que l'angle critique, soit

$$\theta < \theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) . \quad (5.20)$$

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer le même raisonnement que dans le cas du guide métallique pour trouver les angles θ correspondant à des modes guidés. La condition d'auto-consistance s'écrit alors, de façon analogue à l'équation (5.2) :

$$\frac{2\pi n_1}{\lambda} 2d \sin \theta + 2\varphi_r = 2m\pi, \quad \text{avec } m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.21)$$

où cette fois-ci le déphasage φ_r à la réflexion totale (voir la figure 2.4(b)) doit être pris en compte deux fois par aller-retour le long de la direction y . Ce déphasage à la réflexion totale est différent pour les polarisations TE et TM (notées s et p dans la figure 2.4(b)). Donc les modes guidés auront cette fois des angles θ_m , et donc des constantes de propagation θ_m , différentes pour les polarisations TE et TM. Nous nous limiterons ici au calcul dans le cas de la *polarisation TE*. A partir de l'équation (2.81), et en se plaçant au-delà de l'angle critique, le déphasage à la réflexion totale pour la polarisation TE s'écrit :

$$\tan \frac{\varphi_r^{\text{TE}}}{2} = -\sqrt{\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1} . \quad (5.22)$$

En combinant les équations (5.21) et (5.22), on obtient :

$$\tan \left(\pi n_1 \frac{d}{\lambda} \sin \theta - m \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta} - 1 \right)^{1/2} . \quad (5.23)$$

Cette équation, dont l'inconnue est $\sin \theta$, ne peut pas être résolue analytiquement. On peut néanmoins en déduire beaucoup d'informations en en traçant les membres de gauche (pour plusieurs valeurs de m) et de droite en fonction de $\sin \theta$, comme cela est fait dans la

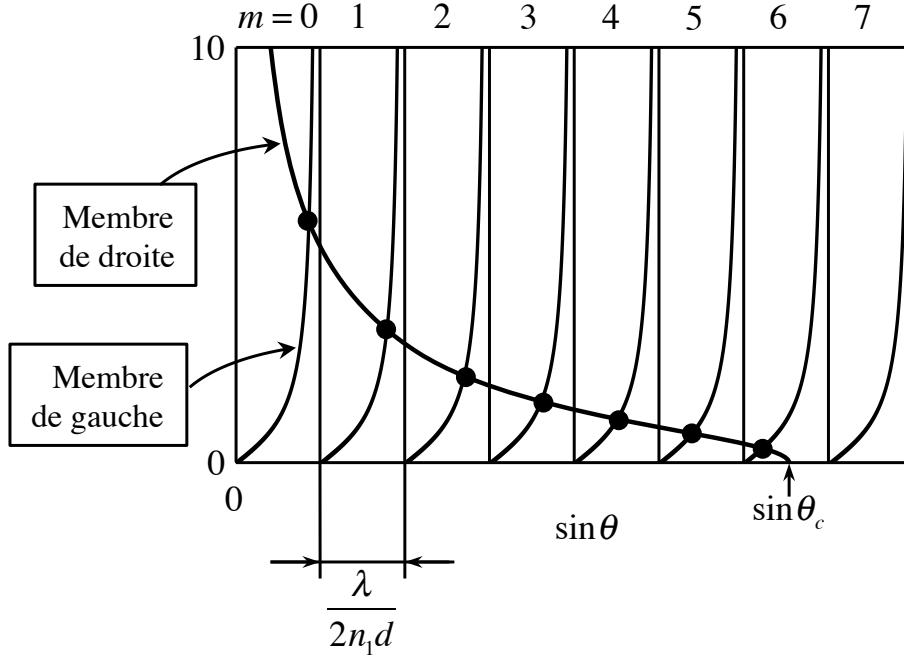


FIGURE 5.5 – Représentation graphique des deux membres de l'équation (5.23), tracés en fonction de $\sin \theta$.

figure 5.5. Les solutions sont les points d'intersection entre ces deux courbes. A chacune de ces solutions correspond un angle θ_m et donc une constante de propagation

$$\beta_m = k_z^{(m)} = \frac{2\pi n_1}{\lambda} \cos \theta_m . \quad (5.24)$$

Comme $\cos \theta_c = n_2/n_1 \leq \cos \theta_m \leq 1$, on a

$$\frac{2\pi n_2}{\lambda} \leq \beta_m \leq \frac{2\pi n_1}{\lambda} . \quad (5.25)$$

Chaque valeur de m dans l'équation (5.23) revient à décaler $\sin \theta$ de $\lambda/2n_1d$ (voir la figure 5.5). Donc les vitesses de phase des modes guidés se situent entre c/n_1 et c/n_2 .

La plus grande valeur de m pour laquelle il existe une solution à l'équation (5.23) est celle dans laquelle se situe le point $\sin \theta_c$ (par exemple $m = 6$ dans le cas de la figure 5.5). Donc le nombre de modes TE guidés est égal à

$$N_{\text{TE}} = E \left(\frac{2dn_1}{\lambda} \sin \theta_c \right) + 1 = E \left(\frac{2d}{\lambda} \text{ON} \right) + 1, \quad (5.26)$$

où ON est l'ouverture numérique du guide, c'est-à-dire le sinus de l'acceptance des rayons depuis le vide dans le guide d'onde :

$$\text{ON} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} . \quad (5.27)$$

Deux enseignements importants peuvent être tirés de l'équation (5.26) :

- i) Un guide d'onde diélectrique, contrairement au guide d'onde métallique, a toujours au moins un mode guidé pour la polarisation TE.

- ii) Pour que le guide soit monomode pour la polarisation TE, c'est-à-dire $N_{TE} = 1$, il faut satisfaire la condition suivante :

$$\text{Guide monomode} \Leftrightarrow \frac{2d}{\lambda} \text{ON} < 1 . \quad (5.28)$$

Ceci explique pourquoi, dans le domaine des longueurs d'onde optique, les guides d'onde monomodes ont des dimensions typiquement micrométriques, ce qui oblige pour les fabriquer à faire appel aux technologies de la microélectronique.

Afin de déterminer les distributions de champ correspondant aux modes guidés TE, nous résolvons l'équation de propagation

$$\Delta \mathbf{E}_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t) - \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (5.29)$$

pour un champ

$$\mathbf{E}_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_m \hat{\mathbf{x}} u_m(y) \exp[-i(\omega t - \beta_m z)] + \text{c.c.} , \quad (5.30)$$

On obtient aisément que $u_m(y)$ obéit à

$$\frac{d^2 u_m(y)}{dy^2} + \left[n^2(y) \frac{\omega^2}{c^2} - \beta_m^2 \right] u_m(y) = 0 . \quad (5.31)$$

Pour β_m obéissant aux inégalités (5.25), on voit aisément que $u_m(y)$ est sinusoidale dans le guide et exponentielle dans la gaine. Elle s'écrit donc :

$$u_m(y) = \begin{cases} A \exp \left[\gamma_m \left(y + \frac{d}{2} \right) \right] , & \text{pour } y \leq -\frac{d}{2} \\ B \cos \left(\frac{2\pi n_1 \sin \theta_m}{\lambda} y \right) + C \sin \left(\frac{2\pi n_1 \sin \theta_m}{\lambda} y \right) , & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ D \exp \left[-\gamma_m \left(y - \frac{d}{2} \right) \right] , & \text{pour } y \geq \frac{d}{2} \end{cases} . \quad (5.32)$$

avec

$$\gamma_m = n_2 \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_m}{\cos^2 \theta_c} - 1} , \quad (5.33)$$

et où B est nul pour les modes impairs et C nul pour les modes pairs.

Le champ électrique, polarisé selon x , est tangentiel et par conséquent continu aux interfaces. De même, le champ H_z est parallèle aux interfaces. Comme, en utilisant $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, on trouve que H_z est proportionnel à $\partial E_x / \partial y$, on aboutit à la conclusion que $u_m(y)$ et sa dérivée sont continus en $y = \pm d/2$. Ceci permet de raccorder les trois morceaux de la solution (5.32). Finalement les modes ont l'allure représentée sur la figure 5.6.

Il est amusant de remarquer que l'équation (5.31) ayant permis de déterminer les modes guidés de la structure a formellement la même allure que l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une particule de masse m dans un espace de dimension 1 et

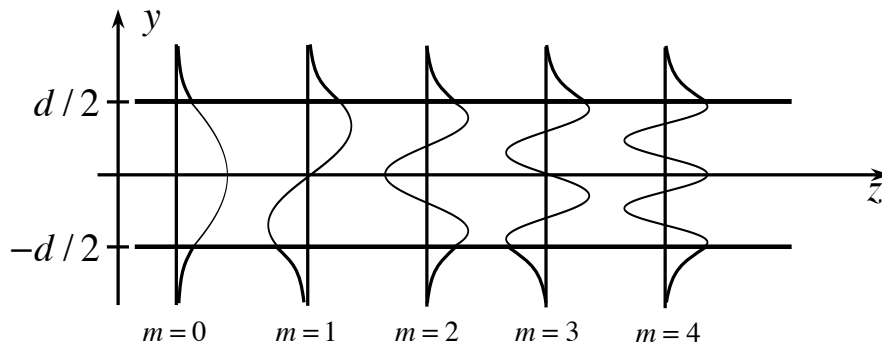


FIGURE 5.6 – Allure des champs des cinq premiers modes TE.

soumise à un puits de potentiel $V(y)$ carré, centré en $x = 0$, de largeur d et de hauteur finie V . En effet, dans ce cas l'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} \psi(y) + V(y)\psi(y) = E\psi(y) , \quad (5.34)$$

à comparer donc avec (5.31) que l'on peut ré-écrire ainsi :

$$-\frac{d^2}{dy^2} u_m(y) - n^2(y) \frac{\omega^2}{c^2} u_m(y) = -\beta_m^2 u_m(y) . \quad (5.35)$$

On voit donc qu'un guide d'onde diélectrique pour la lumière est équivalent à un puits de potentiel, $-n^2$ jouant le rôle du potentiel et la constante de propagation jouant le rôle de l'énergie propre. Ceci confirme aussi qu'un guide d'onde métallique est équivalent à un puits carré infini.

Annexe A

Formulaire d'analyse vectorielle

Dans ce formulaire, les lettres en gras représentent des champs de vecteurs et f est une fonction scalaire.

Développement limité d'une fonction de $f(\mathbf{r})$ (peut être considéré comme la définition du vecteur gradient de f) :

$$f(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla f + O(\delta r^2) . \quad (\text{A.1})$$

Formule de Green-Ostrogradsky (ou plus simplement de Gauss...) :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3\mathbf{r} , \quad (\text{A.2})$$

où V est un volume et Σ la surface fermée qui l'entoure.

Formule de Stokes :

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} , \quad (\text{A.3})$$

avec C le contour fermé et Σ la surface qui s'appuie sur ce contour.

Comme $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, l'application du théorème de la divergence (A.2) indique que le flux du rotationnel est nul à travers toute surface fermée. Par conséquent la formule de Stokes est vraie pour toute surface Σ s'appuyant sur le contour C .

Une variante de la formule de Stokes se dérive en prenant $\mathbf{A} = f\mathbf{e}_i$, avec \mathbf{e}_i un vecteur unitaire constant ($i = x, y, z$) :

$$\oint_C f d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Sigma} d\mathbf{S} \times \nabla f . \quad (\text{A.4})$$

En procédant de même, on montre que

$$\oint_{\Sigma} d\mathbf{S} \times \mathbf{A} = \int_V \nabla \times \mathbf{A} d^3\mathbf{r} . \quad (\text{A.5})$$

Deuxième identité de Green :

$$\int_V d^3r (A\nabla^2 B - B\nabla^2 A) = \int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot (A\nabla B - B\nabla A) \quad (\text{A.6})$$

Formules vectorielles :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f\nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \quad (\text{A.14})$$

Quelques formules utiles :

Laplacien d'une fonction ne dépendant que de $r = |\mathbf{r}|$:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r f(r) \quad (\text{A.15})$$

Fonction vectorielle ne dépendant que de $r = |\mathbf{r}|$:

$$\nabla \times \mathbf{u}(r) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{u}'(r) \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}(r)) = \mathbf{u}(r) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}'(r))\hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.17})$$

Gradients utiles :

$$\nabla r = \mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\text{A.20})$$

Annexe B

Distribution de Dirac

Mathématiquement, la “fonction de Dirac” $\delta(x)$ est une distribution, c’est à dire une forme linéaire agissant sur un espace de fonctions à support compact. Toutefois, pour la plupart des applications en physique, elle peut être vue comme une fonction infiniment piquée en 0 et d’aire unité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 . \quad (\text{B.1})$$

Il s’agit donc de l’objet mathématique idéal pour décrire les distributions ponctuelles de charges que l’on rencontre en électromagnétisme. C’est même pour cette raison que les physiciens l’ont inventée. Un point important à garder en tête pour la physique, est que la fonction de Dirac possède une dimension : si x désigne une variable d’espace, δ a une dimension d’inverse longueur. Si x est le temps, la dimension de δ est l’inverse d’un temps.

La distribution de Dirac peut aussi se concevoir comme la limite d’une suite de fonctions piquées $f_\epsilon(x)$:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) \quad (\text{B.2})$$

Un premier exemple de fonctions f_ϵ est la fonction constante sur l’intervalle $[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$, d’amplitude $1/\epsilon$:

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \text{rect} \left[\frac{x}{\epsilon} \right] \quad (\text{B.3})$$

Si l’on souhaite utiliser une fonction partout dérivable on peut choisir une version adoucie de la précédente :

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \exp \left[-\frac{x^2}{\epsilon^2} \right] \quad (\text{B.4})$$

La propriété essentielle utilisée dans la plupart des calculs est le fait que la “fonction” $\delta(x - x_0)$ projette toute fonction $g(x)$ ayant toutes les “bonnes” propriétés sur sa valeur en x_0 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0) \quad (\text{B.5})$$

Cette propriété se comprend aisément en considérant la suite de fonctions piquées décrite ci-dessus.

On peut aussi généraliser à plusieurs dimensions, et cela se rencontre fréquemment en électromagnétisme. Par exemple, à trois dimensions :

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) . \quad (\text{B.6})$$

La plupart du temps, on omet l'exposant (3) et on écrit simplement $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Dans ce cas la dimension de δ est 1/Longueur³.

Finalement, du point de vue de la transformée de Fourier il est utile de connaître la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) , \quad (\text{B.7})$$

qui indique que 1 et $\delta(\omega)$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre (en faisant bien attention à la position des facteurs 2π).

Quelques formules utiles :

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (\text{B.8})$$

Notons Θ la fonction de Heaviside, primitive de δ . Sa transformée de Fourier est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Theta(t) dt = \pi\delta(\omega) + \text{v.p.} \frac{i}{\omega} \quad (\text{B.9})$$

Lien entre notation complexe et transformée de Fourier :

A chaque fois que nous avons affaire à une onde monochromatique, nous avons utilisé la notation complexe. Voici par exemple un champ scalaire monochromatique de fréquence ω_0 et d'amplitude complexe \mathcal{E} :

$$E(t) = \mathcal{E}e^{-i\omega_0 t} + c.c. = \mathcal{E}e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{E}^*e^{i\omega_0 t} . \quad (\text{B.10})$$

Calculons la transformée de Fourier de $E(t)$:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} E(t) \\ &= \mathcal{E} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-i\omega_0 t} + \mathcal{E}^* \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{i\omega_0 t} \\ &= 2\pi\mathcal{E}\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\mathcal{E}^*\delta(\omega + \omega_0) . \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$