Corrigé de l'examen

On observe une fois pour toutes que toutes les fonctions considérées sont continues sur leur domaine de définition, donc mesurables...

Exercice 1 : Soient $f : t \in [0,+\infty[\mapsto \frac{t}{1+t^3} \in \mathbb{R}$ et $h : (x,t) \in [0,+\infty[\times [0,+\infty[\mapsto e^{-tx}\frac{t}{1+t^3} \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que la fonction f est intégrable sur $[0,1]$, ainsi que sur $[1,\infty[$.
2. Soit $x \in [0,+\infty[$. Montrer que la fonction $h_x : t \in [0,+\infty[\mapsto h(x,t) \in \mathbb{R}$ est intégrable.
3. Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $g(x) = \int_{[0,+\infty[} h_x(t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,+\infty[} h(x,t)\, d\lambda(t)$. Démontrer que la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que la suite $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.
5. (a) La fonction $u : t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$?

   (b) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi_a : t \in [0,+\infty[\mapsto e^{-ta}\frac{t^2}{1+t^3} \in \mathbb{R}$. Montrer que φ_a est intégrable si et seulement si $a > 0$.
6. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur l'intervalle $]a,+\infty[$, et exprimer la dérivée $g'(x)$, pour $x > a$, sous forme d'une intégrale.
7. Montrer que la limite $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-t/n}\frac{t^2}{1+t^3}\, d\lambda(t)$ existe, et la calculer.
8. Démontrer que la fonction g est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis que la dérivée $g'(x)$ a une limite, que l'on déterminera, lorsque $x \to 0$.

Corrigé.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est intégrable sur tout segment, en particulier sur $[0,1]$.
   Pour $t \geq 1$ on a $1+t^3 \geq t^3$ et donc $0 \leq f(t) \leq t^{-2}$. La fonction $t \mapsto t^{-2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de référence), il suit que f est intégrable sur cet intervalle.
2. D'après la question 1, la fonction f est intégrable sur la réunion des deux intervalles, donc f est intégrable sur $[0,+\infty[= [0,1] \cup [1,+\infty[$.
   Pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on a $0 \leq e^{-tx} \leq 1$ d'où $0 \leq h_x(t) \leq f(t)$ puisque $\frac{t^2}{1+t^3} \geq 0$ lorsque $t \geq 0$. La fonction h_x est donc, comme f, intégrable sur $[0,+\infty[$.
3. On vérifie que les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont satisfaites par la fonction h. Il suivra que la fonction g est continue.
   Domination : pour tout $x \geq 0$ on a $|h_x| \leq f$ sur $[0,+\infty[$, avec f intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Continuité : pour tout $t \in [0,+\infty[$, l'application $x \in [0,+\infty[\mapsto h_x(t) \in \mathbb{R}$ est continue.
4. On a $h_{x_n}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tandis que $h_{x_n}(t) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ lorsque $t > 0$ puisqu'alors $nt \to +\infty$. Par ailleurs, on a déjà démontré que la suite $(h_{x_n})_n$ est dominée par f qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et permet d'affirmer que la suite des intégrales $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, avec

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} h_{x_n}(t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,+\infty[} (\lim_{n\to\infty} h_{x_n}(t))\, d\lambda(t) = 0\,.$$

5. (a) Pour $t \geq 1$ on a $1+t^3 \leq 2t^3$ et en particulier $u(t) \geq 1/(2t)$. La fonction $t \mapsto 1/t$ n'étant pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (fonction de référence), la fonction u n'est pas intégrable au voisinage de l'infini, donc u n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
Remarque : On peut également argumenter comme suit. Puisque $u \geq 0$, son intégrale est définie à valeurs dans $[0,+\infty]$. Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite croissante de fonctions positives $(u\mathbb{1}_{[1,n]})_{n\in\mathbb{N}}$ puis la proposition 3.18 du cours (primitive) assurent alors que

$$\int_{[1,\infty[} u(t)\,d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} u(t)\,d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\big(\log(1+n^3) - \log 2\big) = +\infty\,.$$

(b) Puisque $\varphi_0 = u$ avec u non intégrable sur $[0,+\infty[$, et $\varphi_a \geq \varphi_0 \geq 0$ pour $a \leq 0$, la fonction φ_a n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ lorsque $a \leq 0$. Si maintenant $a > 0$, on sait que la fonction $t \to e^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (fonction de référence). La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$ est continue et tend vers 0 en $+\infty$, elle est donc bornée sur $[0,+\infty[$ (résultat du cours ; ou bien, on vérifie facilement qu'elle est bornée par 1 : distinguer selon que $0 \leq t \leq 1$ ou $t \geq 1$). Le produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable est intégrable, donc la fonction φ_a est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour $a > 0$.
Remarque : la réponse à la question 5a (u non intégrable sur $[1,\infty[$) pouvait se lire dans l'énoncé de 5b puisque $u = \varphi_0$.
Une erreur récurrente : u est intégrable ssi il existe v intégrable avec $|u| \leq v$ (c'est vrai, mais seule l'implication $\Leftarrow$ est vraiment intéressante !) En particulier si vous majorez $|u| \leq w$ par une fonction non intégrable, cela ne signifie pas que u est non intégrable.

6. Nous avons vu à la question 3 que la fonction h_x est intégrable sur $[0,+\infty[$ lorsque $x \geq 0$, de sorte que g est bien définie sur $[0,+\infty[$. Soit $a > 0$. Pour montrer que la fonction g est de classe C^1 sur l'intervalle $]a,+\infty[$, nous appliquons le théorème de dérivation sous le signe somme. Vérifions que les hypothèses sont bien satisfaites :
Dérivabilité : pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (et donc a fortiori sur l'intervalle $]a,+\infty[$).
Domination : pour tout $x \geq a$, la fonction dérivée $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-tx}\frac{t^2}{1+t^3}$ est dominée par la fonction φ_a, qui est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Le théorème s'applique donc et montre que la fonction g est de classe C^1 sur l'intervalle $]a,+\infty[$, et que l'on peut dériver sous le signe intégrale pour obtenir, pour tout $x > a$, l'égalité $g'(x) = -\int_{[0,+\infty[} e^{-tx}\frac{t^2}{1+t^3}\,d\lambda(t)$ $(*)$.

7. Soit $t \geq 0$. On a $\frac{t^2}{1+t^3} \geq 0$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle, la suite $(e^{-t/n}\frac{t^2}{1+t^3})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante avec $\lim_{n\to\infty} e^{-t/n}\frac{t^2}{1+t^3} = \frac{t^2}{1+t^3} = \varphi_0(t)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions positives définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $t \in [0,+\infty[\mapsto e^{-t/n}\frac{t^2}{1+t^3} \in [0,+\infty[$. On obtient, par la question 5a, l'égalité $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-t/n}\frac{t^2}{1+t^3}\,d\lambda(t) = \int_{[0,+\infty[} \varphi_0(t)\,d\lambda(t) = +\infty$.

8. Le fait d'être de classe C^1 est une propriété locale. On a vu que la fonction g est de classe C^1 sur chaque intervalle ouvert $]a,+\infty[$ où $a > 0$. La fonction g est donc de classe C^1 sur la réunion $\cup_{a>0}]a,+\infty[=]0,+\infty[$ de ces ouverts, et sa dérivée sur cet intervalle est donnée par la formule $(*)$.
Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \in [0,+\infty[\mapsto e^{-tx}\frac{t^2}{1+t^3} \in [0,+\infty[$ est décroissante. Par croissance de l'intégrale, la fonction $J : x \in [0,+\infty[\mapsto \int_{[0,+\infty[} e^{-tx}\frac{t^2}{1+t^3}\,d\lambda(t)$ est donc également décroissante. Puisque $\lim_{n\to\infty} J(1/n) = +\infty$ (question 7), il suit que $J(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 0$. Puisque $g' = -J$ sur $]0,+\infty[$, il vient $\lim_{x\to 0} g'(x) = -\infty$.
Remarque : la fonction g' est définie et continue sur l'intervalle ouvert $]0,\infty[$. On a montré en 7. que $g'(1/n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Le critère séquentiel de continuité, sans la monotonie de J, ne permet absolument pas d'en déduire que $g'(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Imaginez par exemple que $g'(x) = \sin(\pi/x)$...

Exercice 2 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale suivante est bien définie, avec l'égalité
$$\int_{[0,+\infty[} e^{-y}\sin(ay)\,d\lambda(y) = \frac{a}{1+a^2}\,.$$

2. Soient $A = [0,1] \times [0,+\infty[$ et $f : (x,y) \in A \mapsto e^{-y}\,\sin(xy)\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est intégrable.

   (b) En utilisant le résultat de la question (1), montrer l'égalité
$$\int_A f(x,y)\,d\lambda(x,y) = \frac{\ln 2}{2}\,.$$

3. (a) Soit $B = [0,1] \times]0,\infty[$. Comparer les intégrales $\int_A f\,d\lambda$ et $\int_B f\,d\lambda$.

   (b) En déduire la valeur de $\int_{]0,\infty[} \dfrac{e^{-y}\,(1-\cos y)}{y}\,d\lambda(y)$.

Corrigé.

1. On a $|e^{-y}\sin(ay)| \leq e^{-y}$ pour tout $y \in [0,+\infty[$. La fonction de référence $h : y \mapsto e^{-y}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc l'intégrand est intégrable... et l'intégrale est bien définie. Le théorème de convergence dominée, que l'on applique à la suite de fonctions g_n : $y \mapsto \sin(ay)e^{-y}\mathbb{1}_{[0,n]}(y)$ (qui converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers $y \mapsto \sin(ay)e^{-y}$, et y est dominée par h) permet de ramener le calcul de l'intégrale à des intégrales sur des segments, soit :
$$\int_{[0,+\infty[} e^{-y}\sin(ay)\,d\lambda(y) = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]} e^{-y}\sin(ay)\,d\lambda(y)\,.$$
Pour chacune des intégrales $I_n = \int_{[0,n]} e^{-y}\sin(ay)\,d\lambda(y)$ (intégrale sur un segment du produit de deux fonctions de classe C^∞) on peut au choix intégrer deux fois par parties ou alors écrire $\sin(ay) = \operatorname{Im} e^{iay}$. Utilisons cette seconde méthode. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes :
$$\int_{[0,n]} e^{-y}\sin(ay)\,d\lambda(y) = \operatorname{Im}\Big(\int_{[0,n]} e^{-y}e^{iay}\,d\lambda(y)\Big) = \Big[\frac{e^{y(-1+ia)}}{-1+ia}\Big]_0^n.$$
Puisque $|e^{n(-1+ia)}| = e^{-n} \to$ lorsque $n \to \infty$, il vient
$$\int_{[0,+\infty[} e^{-y}\sin(ay)\,d\lambda(y) = \operatorname{Im}\Big(\frac{1}{1-ia}\Big) = \operatorname{Im}\Big(\frac{1+ia}{1+a^2}\Big) = \frac{a}{1+a^2}\,.$$
Remarque : Si l'on utilise une double intégration par parties, il faut mettre à part le cas trivial $a = 0$.

2. (a) Pour montrer que f est intégrable sur A, on utilise la croissance de l'intégrale puis on applique le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction positive $\psi : (x,y) \mapsto e^{-y}$:
$$\begin{aligned}\int_A |f|d\lambda &\leq \int_{[0,1]\times[0,+\infty[} e^{-y}\,d\lambda(x,y) = \int_{[0,+\infty[}\Big(\int_{[0,1]} 1\,d\lambda(x)\Big)e^{-y}\,d\lambda(y)\\ &= \int_{[0,+\infty[} e^{-y}\,d\lambda(y) = 1 < \infty.\end{aligned}$$

(b) La fonction f étant intégrable sur A, on peut maintenant lui appliquer le théorème de Fubini, de sorte qu'on a l'égalité :

$$\int_A f(x,y)\,d\lambda = \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,+\infty[} e^{-y}\,\sin(xy)\,d\lambda(y) \Big)\,d\lambda(x)\,. \tag{1}$$

Partant de l'expression (1), on utilise successivement la question 1 et la primitive $x \mapsto (1/2)\ln(1+x^2)$ pour la fonction $x \mapsto x/(1+x^2)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ pour obtenir

$$\int_A f(x,y)\,d\lambda = \int_{[0,1]} \frac{x}{1+x^2}\,d\lambda(x) = \frac{\ln 2}{2}\,.$$

3. (a) L'ensemble A est réunion de B et du segment $S = [0,1] \times \{0\}$. Le segment S (inclus dans une droite) est négligeable dans $\mathbb{R}^2$. Il suit l'égalité $\int_A f\,d\lambda = \int_B f\,d\lambda$.

   (b) La fonction f étant intégrable sur A, elle l'est également sur $B \subset A$. Le théorème de Fubini nous donne alors

$$\begin{aligned}
\int_B f(x,y)\,d\lambda &= \int_{]0,+\infty[} \Big(\int_{[0,1]} e^{-y}\,\sin(xy)\,d\lambda(x) \Big)\,d\lambda(y) \\
&= \int_{]0,+\infty[} e^{-y} \Big(\int_{[0,1]} \sin(xy)\,d\lambda(x) \Big)\,d\lambda(y) \\
&= \int_{]0,+\infty[} e^{-y} \left[\frac{-\cos xy}{y} \right]_{x=0}^{x=1} d\lambda(y) \\
&= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\,\frac{1-\cos y}{y}\,d\lambda(y)\,.
\end{aligned}$$

Par la question 2b, cette dernière intégrale est donc égale à $(\ln 2)/2$.

Exercice 3 : On fixe un paramètre $-1 < a < 1$.

Soient $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ et $g : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u^2 + v^2 + 2auv \in \mathbb{R}$.

1. (a) Esquisser le domaine $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

   (b) Démontrer que la fonction f est intégrable sur A et calculer l'intégrale
$$\int_A f(x, y)\, d\lambda(x, y)\,.$$

2. (a) Montrer que l'application $\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u + av, \sqrt{1 - a^2}\ v) \in \mathbb{R}^2$ est un C^1-difféomorphisme.

   (b) Déterminer le déterminant jacobien de φ en chaque point $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

3. Soit $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < u^2 + v^2 + 2auv < 4\}$.
   On admet provisoirement que $\varphi(B) = A$. En utilisant un résultat du cours, déduire de la question (1b) l'égalité
$$\int_B g(u, v)\, d\lambda(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \frac{15\pi}{2}\,.$$

4. Démontrer la propriété admise à la question (3), à savoir que $\varphi(B) = A$.

Corrigé.

1. A est l'ouvert suivant : c'est le disque ouvert centré en $(0, 0)$ et de rayon 2, privé du disque fermé centré en 0 et de rayon 1.
   La fonction f est positive, donc l'intégrale $\int_A f\, d\lambda$ est bien définie et on peut la calculer en utilisant un passage en coordonnées polaires, puis le théorème de Fubini-Tonelli. On obtient
$$\begin{aligned}
\int_A f\, d\lambda &= \int_{]1,2[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\lambda(r)\, d\lambda(\theta) \\
&= \int_{]1,2[\times]0,2\pi[} r^3\, d\lambda(r)\, d\lambda(\theta) \\
&= \left(\int_{]1,2[} r^3\, d\lambda(r)\right) \left(\int_{]0,2\pi[} 1\, d\lambda(\theta)\right) \\
&= (2\pi) \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

2. L'application $\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u + av, \sqrt{1 - a^2}\ v) \in \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \alpha v \end{pmatrix}$ où $\alpha = \sqrt{1 - a^2}$. La matrice M est inversible, de déterminant $\det M = \sqrt{1 - a^2}$. Ainsi φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de déterminant jacobien constant : pour tous $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a $\det J_{(u,v)}\varphi = \sqrt{1 - a^2}$.

3. Puisque $\varphi(B) = A$, l'application φ se restreint donc en un difféomorphisme $\varphi : B \to A$. Puisque la fonction mesurable $f : A \to [0, +\infty[$ est à valeurs positives (ou bien au choix, puisque cette fonction est intégrable), le théorème du changement de variable donne l'égalité
$$\int_A f(x, y)\, d\lambda(x, y) = \int_B (f \circ \varphi)(u, v)\, |\det J_{(u,v)}(\varphi)|\, d\lambda(u, v)\,.$$
   Or, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a $(f \circ \varphi)(u, v) = (u + av)^2 + (1 - a^2)v^2 = g(u, v)$. Il vient donc
$$\int_B g(u, v)\, d\lambda(u, v) = \frac{15\pi}{2\sqrt{1 - a^2}}$$
   comme annoncé.