Examen – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints, rangés dans des sacs fermés.

Soigner la rédaction. Enoncer précisément les théorèmes utilisés, et vérifier soigneusement que les hypothèses sont satisfaites.
On peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

Vous pouvez utiliser les propriétés d'intégrabilité ou de non-intégrabilité des "fonctions de référence" du cours sans les re-démontrer : il vous suffit de citer clairement le résultat lorsque vous l'utilisez.

Exercice 1 Soient les fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$f(t) = \frac{t}{1+t^3} \qquad \text{et} \qquad h(x,t) = e^{-tx}\frac{t}{1+t^3}\,.$$

1. Démontrer que la fonction f est intégrable sur $[0,1]$, ainsi que sur $[1, \infty[$.
2. Soit $x \in [0, +\infty[$. Montrer que la fonction $h_x : t \in [0, +\infty[\to h(x,t) \in \mathbb{R}$ est intégrable.
3. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$g(x) = \int_{[0,+\infty[} h_x(t)\ d\lambda(t) = \int_{[0,+\infty[} h(x,t)\ d\lambda(t)\,.$$

   Démontrer que la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que la suite $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.
5. (a) La fonction $u : t \to \frac{t^2}{1+t^3}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$?
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction

$$\varphi_a : t \in [0, +\infty[\to e^{-ta}\frac{t^2}{1+t^3} \in \mathbb{R}\,.$$

   Montrer que la fonction φ_a est intégrable si et seulement si $a > 0$.
6. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur l'intervalle $]a, +\infty[$, et exprimer la dérivée $g'(x)$, pour $x > a$, sous forme d'une intégrale.
7. Montrer que la limite $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-t/n}\dfrac{t^2}{1+t^3}\,d\lambda(t)$ existe, et la calculer.
8. Démontrer que la fonction g est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis que la dérivée $g'(x)$ a une limite, que l'on déterminera, lorsque $x \to 0$.

Exercice 2

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale suivante est bien définie, avec l'égalité

$$\int_{[0,+\infty[} e^{-y} \sin(ay)\, d\lambda(y) = \frac{a}{1+a^2}\,.$$

   On justifiera soigneusement toutes les étapes du calcul. On pourra, par exemple, utiliser une double intégration par parties ou bien introduire une exponentielle complexe.

2. Soit $A = [0,1] \times [0,+\infty[$. On considère la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = e^{-y}\, \sin(xy)\,.$$

   (a) Montrer que la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est intégrable.

   (b) En utilisant le résultat de la question (1), montrer l'égalité

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda(x,y) = \frac{\ln 2}{2}\,.$$

3. (a) Soit $B = [0,1] \times]0,\infty[$. Comparer les intégrales $\int_A f\, d\lambda$ et $\int_B f\, d\lambda$.

   (b) En déduire la valeur de $\int_{]0,\infty[} \dfrac{e^{-y}\,(1-\cos y)}{y}\, d\lambda(y)$.

Exercice 3

On fixe un paramètre $-1 < a < 1$.

Soient $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ et $g : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to u^2 + v^2 + 2auv \in \mathbb{R}$.

1. (a) Esquisser le domaine $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

   (b) Démontrer que la fonction f est intégrable sur A et calculer l'intégrale

$$\int_A f(x,y)\, d\lambda(x,y)\,.$$

2. (a) Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \to (u+av, \sqrt{1-a^2}\;v) \in \mathbb{R}^2$ est un C^1-difféomorphisme.

   (b) Déterminer le déterminant jacobien de φ en chaque point $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

3. Soit $B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < u^2 + v^2 + 2auv < 4\}$.
   On admet que $\varphi(B) = A$. En utilisant un résultat du cours, déduire de la question (1b) l'égalité

$$\int_B g(u,v)\, d\lambda(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\, \frac{15\pi}{2}\,.$$