Université Paris-Saclay **Intégration MDD 302**
L3 DD **2020–2021**

Partiel d'intégration

Durée : 2 heures

Tous les documents sont interdits. Les calculatrices sont interdites. Merci d'éteindre et de ranger dans vos sacs vos téléphones et objets connectés. La qualité de la rédaction sera prise en compte très significativement dans l'évalution des copies.

Rappels. Les points suivants pourront être utilisés sans démonstration.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}\lambda = \sqrt{\pi}$.

Exercice 1. *Les questions 2. et 3. sont indépendantes.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right]}$.

1. Esquisser les graphes de f_1, f_2 et f_3.
2. Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.
3. On considère maintenant la série $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$.
   (a) (Question de cours.) Donner la définition d'une fonction $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ intégrable.
   (b) Montrer que f est intégrable. *Comme toujours, on justifiera très soigneusement.*

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ et $h_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ par

$$g_n(x) = e^{-(x-n)^2} \text{ et } h_n(x) = ne^{-n^2x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Esquisser les graphes de g_1, g_2 et g_3 ainsi que les graphes de h_1, h_2 et h_3.
2. (Question de cours.) Rappeler le comportement de l'intégrale de Lebesgue sous l'effet d'une translation et d'une homothétie.
3. En déduire $\int_{\mathbb{R}} g_n \mathrm{d}\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} h_n \mathrm{d}\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que les suites (g_n) et (h_n) convergent simplement vers des fonctions $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ et $h : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ que l'on explicitera.
5. Déterminer $\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} h \mathrm{d}\lambda$.
6. Quels théorèmes du cours reliant limites et intégrales s'appliquent aux suites (g_n) et (h_n) ? Que permettent-ils de conclure ? Quels phénomènes les suites (g_n) et (h_n) illustrent-elles ?

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_{[1,\infty[} \frac{ne^{-\frac{x^2}{n^2}}}{nx^2+1} \mathrm{d}\lambda(x).$$

Montrer que (I_n) admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Exercice 4. Soit $\alpha : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction continue. On considère la fonction $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x\alpha(t)}}{t+x} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est continue.
2. On suppose, uniquement dans cette question, que α est constante égale à a sur $[0,1]$ avec $a \in [0,\infty[$. Déterminer F.
3. Montrer que F a pour limite $+\infty$ en 0^+.

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit $A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\}$. Déterminer $\sup(A+B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.

Exercice 6. Soit $v : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ une fonction intégrable.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \{x \in \mathbb{R}, v(x) > n\}$. Montrer que la suite $\left(\int_{E_n} v\mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.
   Indication. On pourra s'intéresser à $\int_{\mathbb{R}\setminus E_n} v\mathrm{d}\lambda$.
2. On suppose v bornée. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\int_A 1\mathrm{d}\lambda < \eta$ pour une partie (mesurable) A alors $\int_A v\mathrm{d}\lambda < \epsilon$.
3. Même question en ne supposant plus v bornée.