Université Paris-Saclay | **Intégration MDD 302**
L3 DD | **2020–2021**

Partiel d'intégration

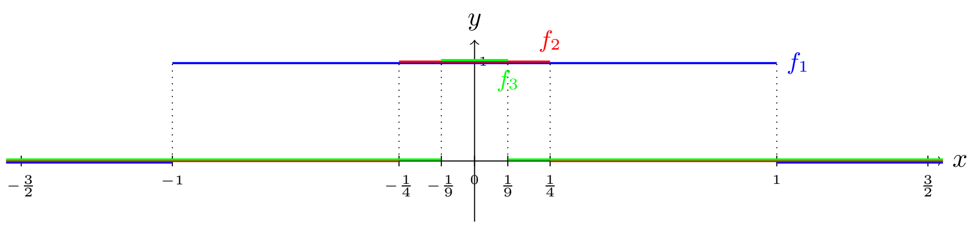
Durée : 2 heures
Correction

Exercice 1. *Les questions 2. et 3. sont indépendantes.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}]}$.

1. Esquisser les graphes de f_1, f_2 et f_3. (0,5 point)
2. Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera. (0,5 point résultat + 1 point justification)
3. On considère maintenant la série $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ avec $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$.
   (a) (Question de cours.) Donner la définition d'une fonction $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ intégrable. (1 point)
   (b) Montrer que f est intégrable. *Comme toujours, on justifiera très soigneusement.* (1 point)

Correction 1.

1. On a



2. Montrons que (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{0\}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = 1$ donc $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Si $x \neq 0$, comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{1}{n^2} < |x|$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $x \notin \left[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right]$ et donc $f_n(x) = 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
3. (a) voir cours
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est mesurable positive. Par le corollaire du théorème de convergence monotone pour les séries, on a que f est mesurable positive et
   $$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda$$
   En en utilisant la normalisation de l'intégrale et le premier rappel, on obtient
   $$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} < +\infty.$$
   Donc f est intégrable.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ et $h_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ par

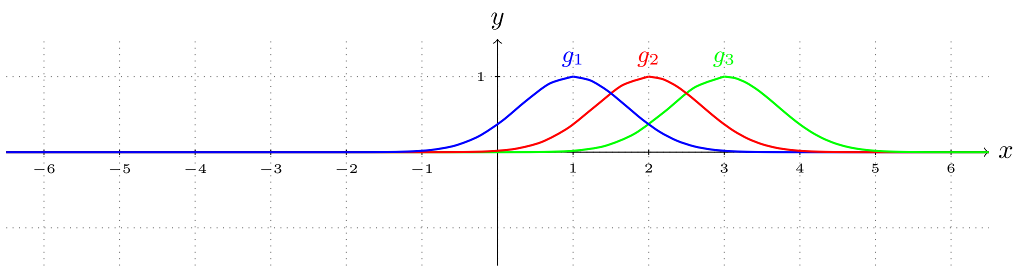
$$g_n(x) = e^{-(x-n)^2} \text{ et } h_n(x) = ne^{-n^2x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

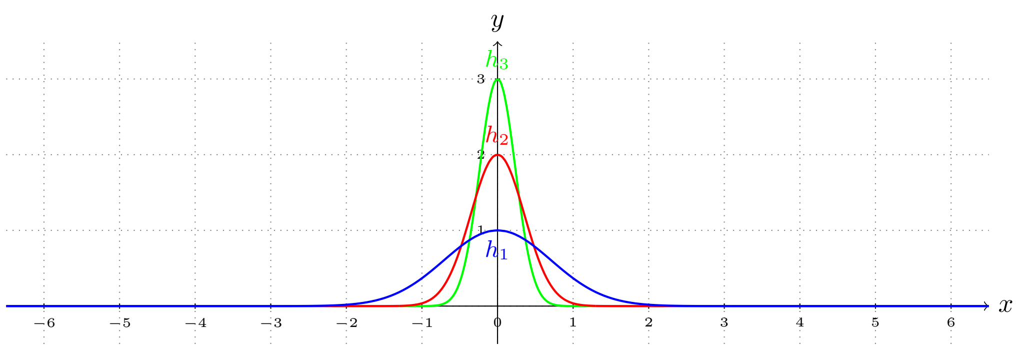
1. Esquisser les graphes de g_1, g_2 et g_3 ainsi que les graphes de h_1, h_2 et h_3. (1,5 point)
2. (Question de cours.) Rappeler le comportement de l'intégrale de Lebesgue sous l'effet d'une translation et d'une homothétie. (1,5 point)
3. En déduire $\int_{\mathbb{R}} g_n \mathrm{d}\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} h_n \mathrm{d}\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (1 point)
4. Montrer que les suites (g_n) et (h_n) convergent simplement vers des fonctions $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ et $h : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ que l'on explicitera. (1 point)
5. Déterminer $\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} h \mathrm{d}\lambda$. (1 point)
6. Quels théorèmes du cours reliant limites et intégrales s'appliquent aux suites (g_n) et (h_n) ? Que permettent-ils de conclure ? Quels phénomènes les suites (g_n) et (h_n) illustrent-elles ? (1 point)

Correction 2.

1. Pour g_1, g_2 et g_3, les graphes sont



Pour h_1, h_2 et h_3, les graphes sont



2. Si $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ est mesurable positive alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a) \mathrm{d}\lambda(x)$$

pour tout $b > 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = b \int_{\mathbb{R}} f(bx) \mathrm{d}\lambda(x).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par invariance de l'intégrale par translation (et en utilisant le deuxième rappel), on a

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}\lambda(x) = \sqrt{\pi}.$$

En utilisant la dilatation de l'intégrale par homothétie (de rapport $b = n$), il vient

$$\int_{\mathbb{R}} h_n \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} n e^{-n^2 x^2} \mathrm{d}\lambda(x) = n \int_{\mathbb{R}} e^{-(nx)^2} \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}\lambda(x) = \sqrt{\pi}.$$

4. Montrons que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{n\to\infty} -(x-n)^2 = -\infty$ et donc $\lim_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ et (g_n) converge simplement vers la fonction nulle.

   Montrons maintenant que (h_n) converge simplement vers la fonction $h : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ définie par $h(0) = +\infty$ et $h(x) = 0$ si $x \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $h_n(0) = n$ donc $\lim_{n\to\infty} h_n(0) = \infty$. Si $x \neq 0$, on a, par croissances comparées, $\lim_{n\to\infty} ne^{-n^2x^2} = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. Ainsi, (h_n) converge simplement vers h.

5. On a $\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\lambda = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} h\mathrm{d}\lambda = 0$. Montrons la deuxième égalité : la suite $(n\mathbb{1}_{\{0\}})$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers h. Par le théorème de convergence monotone, on a $\int_{\mathbb{R}} h\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\mathbb{1}_{\{0\}}\mathrm{d}\lambda = 0$.

6. Le lemme de Fatou s'applique. Il montre que

$$\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\lambda \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\mathrm{d}\lambda \text{ et } \int_{\mathbb{R}} h\mathrm{d}\lambda \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n\mathrm{d}\lambda$$

   (ce qui est bien garanti par nos calculs explicites). Ces exemples montrent qu'il n'y a pas toujours égalité entre intégrale de la limite et limite de l'intégrale. La suite (g_n) illustre le phénomène d'évanescence et la suite (h_n) le phéonomène de concentration.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_{[1,\infty[} \frac{ne^{-\frac{x^2}{n^2}}}{nx^2+1}\mathrm{d}\lambda(x).$$

Montrer que (I_n) admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite. (4 points : 0,5 pour TCM + 0,5 positivité + 1 limite simple + 1 croissance + 1 calcul de l'intégrale)

Correction 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $k_n : [1,+\infty[\to [0,\infty[$ par $k_n(x) = \frac{ne^{-\frac{x^2}{n^2}}}{nx^2+1}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, k_n est mesurable positive.
- Montrons que (k_n) est croissante. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 1$. Alors, par croissance de l'exponentielle,

$$e^{-\frac{x^2}{n^2}} \leq e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}} \text{ et } x^2 + \frac{1}{n} \geq x^2 + \frac{1}{n+1}$$

  d'où

$$k_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{n^2}}}{x^2+\frac{1}{n}} \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}}}{x^2+\frac{1}{n+1}} = k_{n+1}(x).$$

  Donc (k_n) est croissante.
- Montrons que (k_n) converge simplement vers $k : [1,+\infty[$ définie par $k(x) = \frac{1}{x^2}$. Soit $x \geq 1$. Alors $\lim_{n\to\infty} x^2 + \frac{1}{n} = x^2$ et $\lim_{n\to\infty} -\frac{x^2}{n^2} = 0$ d'où $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{x^2}{n^2}} = 1$ par continuité de l'exponentielle. Ainsi $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = \frac{1}{x^2}$ par continuité.

Le théorème de convergence monotone s'appplique et (I_n) converge vers $\int_{[1,\infty[} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\lambda$. Calculons cette intégrale. Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est positive, on a:

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\lambda(x).$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue donc réglée sur le segment $[0,n]$. Les intégrales de Lebesgue et Riemann coïncident donc $\int_{[1,n]} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\lambda(x) = \int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$. En primitivant, il vient $\int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{n}$. Par conséquent, $\int_{[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\lambda(x) = 1$;

Exercice 4. Soit $\alpha : [0,1] \to [0,+\infty[$ une fonction continue. On considère la fonction $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x\alpha(t)}}{t+x} \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est continue. (0,5 point)
2. On suppose, uniquement dans cette question, que α est constante égale à a sur $[0,1]$ avec $a \in [0,\infty[$. Déterminer F. (0,5 point)
3. Montrer que F a pour limite $+\infty$ en 0^+. (1,5 point)

Correction 4.

1. L'application $(x,t) \mapsto \frac{e^{-x\alpha(t)}}{t+x}$ est continue sur $]0,\infty[\times [0,1]$ comme composée de fonctions continues. Donc F est continue.
2. On a, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xa}}{t+x} \mathrm{d}t = e^{-xa} \int_0^1 \frac{1}{t+x} \mathrm{d}t = e^{-xa}(\ln(1+x) - \ln(x)) = e^{-xa} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right).$$

3. La fonction α est continue sur le segment $[0,1]$ donc il existe $a \geq 0$ tel que $\alpha(t) \leq a$ pour tout $t \in [0,1]$. On a alors, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0,1]$, $e^{-x\alpha(t)} \geq e^{-xa}$ d'où

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x\alpha(t)}}{t+x} \mathrm{d}t \geq \int_0^1 \frac{e^{-xa}}{t+x} \mathrm{d}t = e^{-xa}(\ln(1+x) - \ln(x)).$$

Or $\lim_{x \to 0^+} e^{-xa}(\ln(1+x) - \ln(x)) = +\infty$ et donc F a pour limite $+\infty$ en 0^+.

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Déterminer $\sup(A+B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$. (1,5 point)

Correction 5. Si $\sup(A) = +\infty$, on a $\sup(A+B) = +\infty$. En effet, il existe alors une suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers $+\infty$. Soit $b \in B$, alors, la suite $(a_n + b)$ est une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers $+\infty$ donc $\sup(A+B) = +\infty$.

De même, si $\sup(B) = +\infty$, on a $\sup(A+B) = +\infty$.

On suppose enfin A et B bornés. Montrons que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$. Tout d'abord si $x \in A+B$ alors x s'écrit $x = a+b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Comme $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$ et obtient $x \leq \sup(A)+\sup(B)$ et donc $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A+B$. De plus, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe (a_n) une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(A)$ et (b_n) une suite d'éléments de B convergeant vers $\sup(B)$. Alors $(a_n + b_n)$ est une suite d'éléments de $A+B$ convergeant vers $\sup(A)+\sup(B)$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 6. Soit $v : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ une fonction intégrable.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \{x \in \mathbb{R}, v(x) > n\}$. Montrer que la suite $\left(\int_{E_n} v \mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$. (1,5 point)
   Indication. On pourra s'intéresser à $\int_{\mathbb{R} \setminus E_n} v \mathrm{d}\lambda$.
2. On suppose v bornée. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\int_A 1 \mathrm{d}\lambda < \eta$ pour une partie (mesurable) A alors $\int_A v \mathrm{d}\lambda < \epsilon$. (0,5 point)
3. Même question en ne supposant plus v bornée. (1 point)

Correction 6.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus E_n} v$. La fonction v_n est mesurable positive.
   Montrons que (v_n) est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E_{n+1} \subset E_n$ d'où $(\mathbb{R} \setminus E_n) \subset (\mathbb{R} \setminus E_{n+1})$ et donc $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus E_n} \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus E_{n+1}}$. Donc $v_n \leq v_{n+1}$ car v est positive et (v_n) est croissante.
   Montrons que (v_n) converge simplement vers v. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $v(x) < N$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a $x \notin E_n$ et donc $v_n(x) = v(x)$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x)$ donc (v_n) converge simplement vers v.
   Par le théorème de convergence monotone, la suite $(\int_{\mathbb{R}\setminus E_n} v\mathrm{d}\lambda)$ converge vers $(\int_{\mathbb{R}} v\mathrm{d}\lambda)$ quand $n \to \infty$. Comme
   $$\int_{\mathbb{R}} v\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}\setminus E_n} v\mathrm{d}\lambda + \int_{E_n} v\mathrm{d}\lambda$$
   on obtient que la suite $\left(\int_{E_n} v\mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers 0 quand $n \to \infty$.

2. Soit M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $v(x) \leq M$. Soit $\epsilon > 0$. On pose $\eta = \frac{\epsilon}{M}$. Soit A une partie mesurable telle que $\int_A 1\mathrm{d}\lambda < \eta$. Alors, par monotonie et linéarité de l'intégrale, on a
   $$\int_A v\mathrm{d}\lambda \leq \int_A M\mathrm{d}\lambda = M \int_A \mathrm{d}\lambda < M\eta = \epsilon.$$

3. Soit $\epsilon > 0$. Soit N tel que $\int_{E_N} v\mathrm{d}\lambda < \frac{\epsilon}{2}$ (l'existence est garantie par la première question). On pose alors $\eta = \frac{\epsilon}{2N}$. Soit A une partie mesurable telle que $\int_A 1\mathrm{d}\lambda < \eta$. Alors, par monotonie et linéarité de l'intégrale, on a
   $$\int_A v\mathrm{d}\lambda = \int_{A\cap E_N} v\mathrm{d}\lambda + \int_{A\cap(\mathbb{R}\setminus E_N)} v\mathrm{d}\lambda \leq \int_{E_N} v\mathrm{d}\lambda + \int_{A\cap(\mathbb{R}\setminus E_N)} N\mathrm{d}\lambda < \frac{\epsilon}{2} + N\int_A \mathrm{d}\lambda \leq \frac{\epsilon}{2} + N\eta = \epsilon.$$