Examen d'intégration

Durée : 2 heures

Tous les documents sont interdits. Les calculatrices sont interdites. Merci d'éteindre et de ranger dans vos sacs vos téléphones et objets connectés. La qualité de la rédaction sera prise en compte très significativement dans l'évalution des copies.

Vous pouvez bien sur admettre des questions pour traiter les questions suivantes. Les dernières questions des exercices sont plus difficiles.

Rappels. Les points suivants pourront être utilisés sans démonstration.

1. Pour tout $a > 0$, la fonction $u \mapsto u^2 e^{-au^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. (Question de cours). Donner la définition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ intégrable.
2. Une fonction intégrable est-elle toujours bornée (on demande une preuve ou un contre-exemple) ?
3. Soit $x \geq 0$, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-xt^2} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Indication. On pourra comparer e^{-xt^2} *et* 1.
4. Soit $x < 0$, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

   On définit $F : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-xt^2} f(t) \mathrm{d}\lambda(t)$$

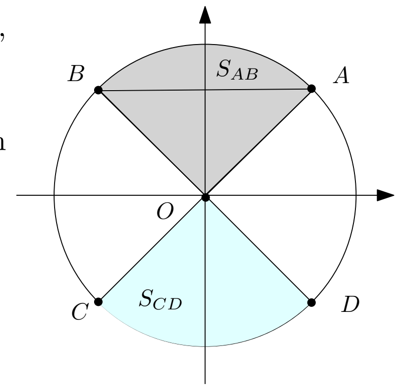
5. Montrer que F est continue sur $[0, \infty[$.
6. Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Montrer que la suite $(F(x_n))$ a une limite et déterminer cette limite. Montrer que F a une limite en $+\infty$.
7. Soit $a > 0$. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, \infty[$. En déduire que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$.
8. On suppose maintenant que f est positive (en plus d'être intégrable).
   (a) Montrer que F' a une limite (finie ou infine) en 0^+. Exprimer cette limite à l'aide de f.
   (b) Donner un exemple explicite de fonction f pour laquelle F' a une limite finie en 0^+.
   (c) Donner un exemple explicite de fonction f pour laquelle F' a une limite infinie en 0^+.

Exercice 2. *Les questions 3., 4. et 6. sont indépendantes.*
Dans $\mathbb{R}^2$, on considère

- $\mathcal{D}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1
- les points O, A, B, C et D de coordonnées $(0,0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
- S_{AB} le secteur de $\mathcal{D}$ délimité par les rayons OA et OB; en identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on a

$$S_{AB} = \left\{ re^{i\theta}, r \in [0,1[\text{ et } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$$

  et S_{CD} le secteur de $\mathcal{D}$ délimité par les rayons OC et OD
- T le triangle OAB
- $L = S_{AB} \setminus T$.



1. Rappeler la valeur de $\int_{\mathcal{D}} 1 \mathrm{d}\lambda(x,y)$ (on ne demande pas de justification).
2. Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto y^2 - x^2$ est intégrable sur $\mathcal{D}$.
3. Calculer $\int_T (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x,y)$.
   Suggestion. Choisir x comme variable d'intégration intérieure.
4. En passant en coordonnées polaires, calculer $\int_{S_{AB}} (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x,y)$.
5. En déduire que $\int_L (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{1}{6}$.
6. On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x,y) = (y,x)$.
   (a) Montrer que ψ est un difféomorphisme.
   (b) Déterminer $\psi(\mathcal{D})$.
   (c) Montrer que
   $$\int_{\mathcal{D}} (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) \mathrm{d}\lambda(x,y)$$
   et en déduire la valeur de $\int_{\mathcal{D}} (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x,y)$.
7. À l'aide d'un changement de variables linéaire, exprimer l'intégrale $\int_{S_{CD}} (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x,y)$ à l'aide $\int_{S_{AB}} (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x,y)$.