Université Paris-Saclay — **Intégration MDD 302**
L3 DD — **2020–2021**

Examen d'intégration

Correction

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1.

2. Non. Par exemple $f : x \mapsto x\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(x)$ est mesurable, positive, non bornée et d'intégrale nulle (donc intégrable) car cette fonction est nulle presque partout.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $-xt^2 \leq 0$ donc $e^{-xt^2} \leq 1$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$|e^{-xt^2} f(t)| = e^{-xt^2}|f(t)| \leq |f(t)|$$
et $|f|$ est intégrable par hypothèse. Donc $t \mapsto e^{-xt^2} f(t)$ est intégrable par comparaison.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $-xt^2 \geq 0$ donc $e^{-xt^2} \geq 1$. Or la fonction constante 1 est positive et non intégrable sur $\mathbb{R}$. Par comparaison la fonction $t \mapsto e^{-xt^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

5. On veut appliquer le théorème de continuité des applications à paramètres.
   - Soit $x \geq 0$, l'application $t \mapsto e^{-xt^2} f(t)$ est intégrable par la question 3.
   - Soit $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto e^{-xt^2} f(t)$ est continue car l'exponentielle est continue.
   - Pour tous $x \geq 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a
   $$|e^{-xt^2} f(t)| \leq |f(t)|$$
   et $|f|$ est intégrable.

   Le théorème de continuité des applications à paramètres permet de conclure que F est continue sur $[0, \infty[$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = e^{-x_n t^2} f(t)$. On a alors $F(x_n) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \mathrm{d}\lambda(t)$. On veut appliquer le théorème de convergence dominée.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est mesurable.
   - Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t = 0$, on a $f_n(0) = f(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = f(0)$. On suppose maintenant $t \neq 0$. Comme $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, on a $\lim_{n\to\infty} -x_n t^2 = -\infty$ et donc $\lim_{n\to\infty} e^{-x_n t^2} = 0$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$. Par conséquent (f_n) converge simplement vers $f(0)\mathbb{1}_{\{0\}}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par les calculs précédents, on a
   $$|f_n(t)| \leq |f(t)|$$
   et $|f|$ est intégrable.

   Par le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers
   $$\int_{\mathbb{R}} f(0)\mathbb{1}_{\{0\}}(x) \mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$
   Donc $(F(x_n))$ a pour limite 0. Par caractérisation séquentielle de la limite F a pour limite 0 en $+\infty$.

7. Soit $a > 0$. On veut appliquer le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre.

- Soit $x > a$, l'application $t \mapsto e^{-xt^2} f(t)$ est intégrable par la question 3.
- Soit $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto e^{-xt^2} f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, \infty[$ car l'exponentielle est $\mathcal{C}^1$ et la dérivée est $x \mapsto -t^2 e^{-xt^2} f(t)$.
- Pour tous $x > a$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$| - t^2 e^{-xt^2} f(t)| \leq t^2 e^{-xt^2} |f(t)| \leq t^2 e^{-at^2} |f(t)|.$$
Par le rappel, $t \mapsto t^2 e^{-at^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On note M un majorant. Alors pour tous $x > a$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$| - t^2 e^{-xt^2} f(t)| \leq M|f(t)|.$$
et $|f|$ est intégrable.

Par le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre, F est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, \infty[$. Comme $]0, \infty[= \cup_{a>0}]a, \infty[$. On en déduit que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

8. (a) Soit (x_n) une suite décroissante strictement positive convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = t^2 e^{-x_n t^2} f(t)$. On a alors $F'(x_n) = - \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \mathrm{d}\lambda(t)$. On veut appliquer le théorème de convergence monotone.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est mesurable positive.
   - Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to\infty} -x_n t^2 = 0$ par conséquent $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = t^2 f(t)$. Donc (f_n) converge simplement vers $t \mapsto t^2 f(t)$.
   - Soit $t \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par conséquent la suite $(-t^2 x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par croissance de l'exponentielle, la suite $(e^{-t^2 x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme $f \geq 0$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent (f_n) est croissante.

   Par le théorème de convergence monotone, la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t) \mathrm{d}\lambda(t)$. Ainsi $(F'(x_n))$ converge vers $- \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t) \mathrm{d}\lambda(t)$. Par caractérisation séquentielle de la limite F' a pour limite $- \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t) \mathrm{d}\lambda(t)$ en 0^+.

   (b) L'application nulle convient.

   (c) L'application $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ convient. Cette application est bien intégrable (voir TD) et positive. En outre, pour tout $t \geq 1$, on a $\frac{t^2}{1+t^2} \geq \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$ et l'application minorante est positive et n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$. Donc $t \mapsto t^2 f(t)$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$. Donc F' a pour limite $-\infty$ en 0^+.

Exercice 2.

1. On obtient l'aire du disque à savoir π.

2. Pour tout $(x, y) \in D$, on a
$$|y^2 - x^2| \leq y^2 + x^2 \leq 1.$$
Comme la fonction constante 1 est intégrable sur D par la question précédente, la fonction $(x, y) \mapsto y^2 - x^2$ est intégrable sur D.

3. La fonction $(x, y) \mapsto y^2 - x^2$ est intégrable sur T par la question précédente. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.
$$\begin{aligned}\int_T y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (y^2 - x^2) \mathbb{1}_T(x, y) \mathrm{d}\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (y^2 - x^2) \mathbb{1}_T(x, y) \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]} \int_{[-y,y]} (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x) \mathrm{d}\lambda(y)\end{aligned}$$
Soit $y \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Comme $x \mapsto y^2 - x^2$ est continue sur le segment $[-y, y]$, les intégrales Lebesgue et Riemann coincident d'où
$$\int_{[-y,y]} (y^2 - x^2) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-y}^{y} (y^2 - x^2) \mathrm{d}y = \frac{4}{3} y^3.$$

De même, $y \mapsto \frac{4}{3}y^3$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, les intégrales Lebesgue et Riemann coincident d'où

$$\int_T y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]} \frac{4}{3}y^3 \mathrm{d}\lambda(y) = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{4}{3}y^3 \mathrm{d}y = \frac{1}{12}.$$

4. La fonction $(x,y) \mapsto (y^2 - x^2)\mathbb{1}_{S_{AB}}$ est intégrable par la question 2. On peut donc appliquer la formule de changement de variable en polaire. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{S_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (y^2 - x^2)\mathbb{1}_{S_{AB}}(x,y)\mathrm{d}\lambda(x,y) \\
&= \int_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[} r^3(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))\mathbb{1}_{S_{AB}}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\mathrm{d}\lambda(r,\theta) \\
&= \int_{]0,1[\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]} r^3(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))\mathrm{d}\lambda(r,\theta) = \int_{]0,1[\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]} r^3(1 - 2\cos^2(\theta))\mathrm{d}\lambda(r,\theta) \\
&= -\int_{]0,1[\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]} r^3\cos(2\theta)\mathrm{d}\lambda(r,\theta)
\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{S_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) &= -\int_{]0,1[\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]} r^3\cos(2\theta)\mathrm{d}\lambda(r,\theta) = -\int_{]0,1[} r^3 \mathrm{d}\lambda(r) \int_{\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]} \cos(2\theta)\mathrm{d}\lambda(\theta) \\
&= -\int_{[0,1]} r^3 \mathrm{d}\lambda(r) \int_{\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]} \cos(2\theta)\mathrm{d}\lambda(\theta)
\end{aligned}$$

Comme on intègre des fonctions continues sur des segments, on peut calculer à l'aide de l'intégrale de Riemann. On obtient alors

$$\int_{S_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = -\int_0^1 r^3 \mathrm{d}\lambda(r) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(2\theta)\mathrm{d}\lambda(\theta) = \frac{1}{4}$$

5. Par linéarité de l'intégrale $\int_L y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{S_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) - \int_T y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = \frac{1}{6}$.

6. (a) L'application ψ est linéaire et inversible. C'est donc un difféomorphisme. Sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) On a $D = \{(x,y), x^2 + y^2 < 1\}$. Donc $\psi(D) = \{(y,x), x^2 + y^2 < 1\} = D$.
   (c) On applique le théorème de changement de variable à l'application $(x,y) \mapsto y^2 - x^2$ qui est intégrable sur D et au difféomorphisme $\psi_{|D} : D \to D$. On a alors, pour tout $(x,y) \in D$, $J_\psi(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\det(J_\psi(x,y)) = -1$. Ainsi

   $$\int_D y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_D (x^2 - y^2)|\det(J_\psi(x,y))|\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_D x^2 - y^2 \mathrm{d}\lambda(x,y).$$

   On obtient donc $\int_D y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = 0$.

7. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x,y) = (-x,-y)$. C'est une application linéaire inversible et donc un difféomorphisme. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\det(J_\phi(x,y)) = 1$. Soit $\hat{S}_{AB}$ et $\hat{S}_{CD}$ les secteurs ouverts de D délimités par les rayons OA et OB et par les rayons OC et OD. On a $\phi(\hat{S}_{CD}) = \hat{S}_{AB}$. Par conséquent la restriction de ϕ à $\hat{S}_{CD}$ est un difféomorphisme de $\hat{S}_{CD}$ dans $\hat{S}_{AB}$. On applique le théorème de changement de variable à l'application $(x,y) \mapsto y^2 - x^2$ qui est intégrable sur S_{AB} et au difféomorphisme $\phi : \hat{S}_{CD} \to \hat{S}_{AB}$. On obtient alors $\int_{\hat{S}_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\hat{S}_{CD}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y)$. Enfin comme S_{AB} et $\hat{S}_{AB}$ diffèrent de deux segments qui sont des parties négligeables de $\mathbb{R}^2$, on a $\int_{\hat{S}_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{S_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y)$. Le même raisonnement s'applique pour S_{CD} et on obtient donc $\int_{S_{AB}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{S_{CD}} y^2 - x^2 \mathrm{d}\lambda(x,y)$.