Examen du 10 Janvier 2020 – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints, rangés dans des sacs fermés et déposés au lieu indiqué par les surveillants.

Soigner la rédaction. Enoncer précisément les théorèmes utilisés, et vérifier soigneusement que les hypothèses sont satisfaites.
On peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

Exercice 1 :

On rappelle que la fonction définie par $t \in \mathbb{R} \to e^{-ct^2} \in [0,+\infty[$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $c > 0$. On veut calculer l'intégrale $I = \int_{[0,+\infty[} e^{-t^2}\, d\lambda(t)$.

1. Expliquer pourquoi l'intégrale $\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2}\, d\lambda(t)$ est bien définie, et la calculer.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $t \to \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On introduit alors la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, d\lambda(t)\,.$$

3. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction F admet une limite en $+\infty$, que l'on déterminera.
   On pourra considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels convergeant vers $+\infty$.
5. (a) Soient $a > 0$ et $x \geq a$. Comparer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les quantités $e^{-x^2(1+t^2)}$ et $e^{-a^2(1+t^2)}$. Justifier la réponse.
   (b) Soient $0 < a < b$. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur l'intervalle $]a,b[$, et exprimer la dérivée $F'(x)$ (pour $x \in]a,b[$) à l'aide d'une intégrale.
   (c) En déduire que F est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.
   (d) Soit $x > 0$. Exprimer l'intégrale $J(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x^2t^2} d\lambda(t)$ en fonction de I.
   On pourra utiliser le comportement de l'intégrale de Lebesgue vis à vis des homothéties.
   (e) Soit $x > 0$. Montrer l'égalité $F'(x) = -2\, e^{-x^2} I$.
   (f) Soit $x \geq 0$. Montrer l'égalité

$$F(x) = F(0) - 2\left(\int_{[0,x]} e^{-t^2}\, d\lambda(t)\right) I\,.$$

6. Montrer enfin que $\int_{[0,+\infty[} e^{-t^2}\, d\lambda(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Comme toujours, on justifiera la réponse.

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(0,0)$, $(\pi,0)$ et $(0,\pi)$.

1. Dessiner $\mathcal{T}$.
2. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathcal{T}}$ est intégrable.
3. Montrer que la fonction définie par $(x,y) \to x\,\cos(x+y)\,\mathbb{1}_{\mathcal{T}}(x,y)$ est intégrable.
4. Déterminer enfin l'intégrale $I = \int_{\mathcal{T}} x\,\cos(x+y)\,d\lambda(x,y)$.

Exercice 3 :

Soient $0 < a \leq b$ et l'ellipse $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$.

On rappelle que l'aire d'une partie (mesurable) $P \subset \mathbb{R}^2$ est définie comme $A(P) = \int_P d\lambda$. On rappelle que l'aire du disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ vaut $A(D) = \pi$. On veut calculer l'aire $A(\mathcal{E})$ de l'ellipse $\mathcal{E}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (ax, by) \in \mathbb{R}^2$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
2. Montrer que $\varphi(D) = \mathcal{E}$.
3. Enoncer le théorème du changement de variable dans les intégrales pour une fonction mesurable positive.
4. Déterminer l'aire $A(\mathcal{E})$ en fonction des paramètres a et b.