

TDs PHYS137: Vie et mort des étoiles

Barbara Perri

2023/2024

1 La source d'énergie du Soleil

Au XIXème siècle, on pensait que la source de rayonnement des étoiles était leur énergie potentielle gravitationnelle. Ainsi, la durée de vie d'une étoile devrait correspondre au temps qu'elle met pour rayonner son énergie gravitationnelle : c'est ce qu'on appelle le temps de Kelvin-Helmholtz. On rappelle que l'énergie potentielle gravitationnelle s'exprime comme : $E_{PG} = -\frac{GM^2}{R}$. On rappelle également que la luminosité L d'une étoile est l'énergie rayonnée par unité de temps.

1. Exprimez la formule littérale du temps de Kelvin-Helmholtz par analyse dimensionnelle.
2. Faites l'application numérique. Sachant que l'âge de la Terre est estimé à 4,6 milliards d'années, que peut-on en conclure ?
3. En utilisant maintenant la formule d'Einstein $E = mc^2$ au lieu de l'énergie potentielle gravitationnelle, calculez le temps de vie du Soleil s'il brûlait toute sa masse. Que pensez-vous de ce nouveau chiffre ?

Données :

Constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$,

Rayon du Soleil : $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}$,

Masse du Soleil : $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$,

Luminosité du Soleil : $L_{\odot} = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$,

Vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2 Propriétés d'une naine blanche

Les naines blanches sont des cadavres d'étoiles de faible masse obtenus lors de l'effondrement gravitationnel du cœur suite à la fin de la fusion nucléaire. Nous allons quantifier plusieurs de ses propriétés intéressantes. Imaginons donc une naine blanche avec un rayon R_* de 7000 km et une masse M_* égale à la masse du Soleil M_{\odot} .

1. Calculer la masse volumique d'une telle naine blanche. Combien pèse alors une cuillère à café de naine blanche ?
2. On définit la compacité d'un objet physique de la manière suivante : $\Xi = \frac{GM}{Rc^2}$. Calculer la compacité de la naine blanche considérée. Comparer à la compacité du Soleil.
3. Calculer le champ gravitationnel g_* de la naine blanche considérée. Comparer à celui de la Terre.
4. La vitesse de libération correspond à la vitesse nécessaire pour décoller depuis un corps et échapper à son attraction gravitationnelle. Elle s'obtient quand l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle de gravité.
 - (a) Donner la formule de la vitesse de libération.
 - (b) Déterminer alors la vitesse de libération associée à la naine blanche.
 - (c) Comparer avec la vitesse de libération sur Terre.

Données :

Rayon du Soleil : $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}$,

Masse du Soleil : $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$,

Volume d'une cuillère à café : 5 mL,

Constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$,

Vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,

Champ gravitationnel de la Terre : $g_T = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,

Rayon de la Terre : $R_T = 6371 \text{ km}$,

Masse de la Terre : $M_T = 5,9 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

1 Correction La source d'énergie du Soleil

1. On réalise une analyse dimensionnelle : $[L] = [E]/[T]$. On en déduit alors : $\tau_{KH} = \frac{|E_{PG}|}{L} = \frac{GM_{\odot}^2}{L_{\odot}R_{\odot}}$.
2. On réalise l'application numérique (attention aux unités!) : $\tau_{KH} = 10^{15}$ s. Cela correspond environ à 31,5 millions d'années. C'est inférieur à l'âge estimé de la Terre, cette valeur ne peut donc pas être réaliste. Cela signifie que la source d'énergie du Soleil n'est pas son énergie gravitationnelle!
3. Pour obtenir un temps, on doit diviser cette énergie par la luminosité : $\tau = E/L = \frac{mc^2}{L} = \frac{M_{\odot}c^2}{L_{\odot}} = 4,67 \cdot 10^{20}$ s. Cela fait environ $1,5 \cdot 10^{13}$ années. Ceci est déjà beaucoup plus réaliste! Quoiqu'encore trop long : en fait le Soleil ne consomme pas toute sa masse!

2 Correction Propriétés naine blanche

1. La densité de la naine blanche est : $\rho_* = M_*/V_* = M_*/(4/3\pi R_*^3) = 1,4 \cdot 10^9 \text{ kg.m}^{-3}$.
Une cuillère à café de naine blanche pèse alors : $m = \rho_* \times V = \rho_* \times (5 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3}) = 6960 \text{ kg}$.
Soit presque 7 tonnes!
2. La compacité de la naine blanche est : $\Xi_* = GM_*/(R_*c^2) = 2 \cdot 10^{-4}$.
Pour comparaison, la compacité du Soleil est : $\Xi_{\odot} = GM_{\odot}/(R_{\odot}c^2) = 2 \cdot 10^{-6}$.
Soit deux ordres de grandeur de moins!
3. Le champ gravitationnel de la naine blanche est : $g_* = GM_*/R_*^2 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-2}$.
Il est presque un million de fois plus élevé que sur Terre!
4. (a) On égalise les deux énergies : $E_c = E_{pot} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{R} \Rightarrow v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.
(b) Pour la naine blanche : $v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_*}{R_*}} = 6,2 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$.
(c) Sur Terre : $v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$.
Il est donc beaucoup plus facile de décoller depuis la Terre que depuis une naine blanche!