

Partie I :

On considère le banc interférométrique suivant utilisé pour le contrôle de grands miroirs plans :

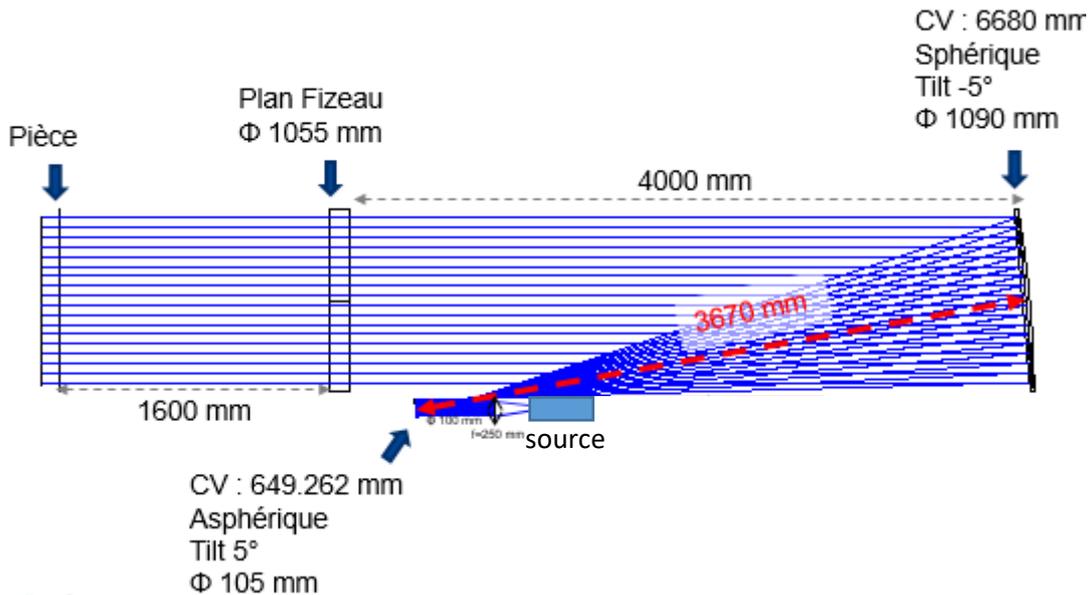


Figure 1

Le plan de Fizeau est un plan de très bonne qualité, en Zerodur, dont une face a été polie avec un défaut résiduel inférieur à 15 nm rms. Les interférences obtenues au niveau de la source se produisent entre le front d'onde réfléchi par l'une des faces du plan de Fizeau et celui réfléchi par la pièce à mesurer.

Questions :

1. Quelle doit-être la longueur de cohérence minimale de la source pour pouvoir observer des franges d'interférences ?
2. On prévoit d'utiliser un laser He-Ne non stabilisé de longueur de cohérence 20 cm. Calculer le contraste des franges obtenu dans ce cas. Même question pour un laser stabilisé de longueur de cohérence 300 m.
3. La température de la cavité interférométrique est stabilisée de manière à minimiser les gradients thermiques à 0.1°C. Calculer l'amplitude de l'erreur générée dans le cas d'un gradient linéaire selon l'axe optique du banc ? Quel est la forme du défaut obtenu dans ce cas ? Même question dans le cas d'un gradient latéral linéaire.

Donnée : dn/dT de l'air = $10^{-6} K^{-1}$

Partie II :

On remplace la source ci-dessus par un interféromètre avec ligne à retard tel que défini ci-dessous :

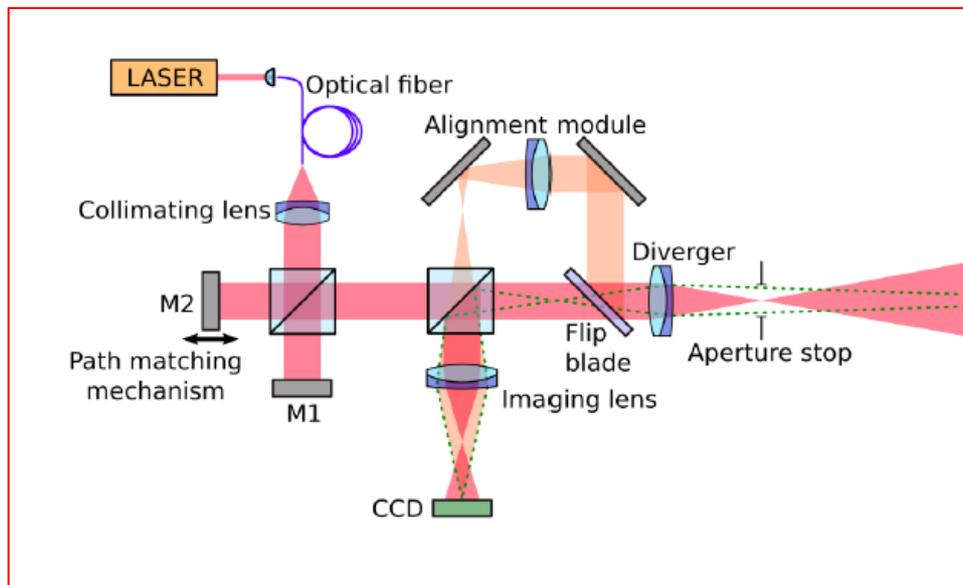


Figure 2

Le miroir M2 est monté sur un mécanisme de translation de manière à créer une ligne à retard permettant d'équilibrer les deux voies. Une source faiblement cohérente temporellement est utilisée. Son spectre est composé de différentes raies, pouvant s'écrire sous la forme :

$$I(\sigma) = e^{-\frac{\pi(\sigma-\sigma_0)^2}{\sigma_1^2}} \cdot \text{Cha}(\sigma)_{\sigma_2}$$

Avec :

- $\lambda_0=0.5 \mu\text{m}$, $\sigma_0=1/\lambda_0$, $\sigma_1=10^{-2} \mu\text{m}^{-1}$, $\sigma_2=10^{-4} \mu\text{m}^{-1}$

la fonction Cha exprimant un peigne de dirac de période σ_2 .

Questions :

1. Quel est l'intérêt d'utiliser une source faiblement cohérente pour ce montage ?
2. Quelle doit être la différence de marche introduite par le miroir M2 de l'interféromètre par rapport au miroir M1 pour maximiser le contraste des franges d'interférences, avec une pièce montée comme sur la figure 1 ?
3. Calculer la fonction de cohérence mutuelle entre l'onde réfléchiée par la pièce et celle réfléchiée par le plan de Fizeau, en supposant que les deux ondes sont de même amplitude. En déduire à quels intervalles la différence de marche doit appartenir pour que le contraste soit supérieur à $1/e^\pi$.

Partie III :

Le miroir M2 est monté sur un dispositif piezo-électrique permettant d'introduire un décalage de phase contrôlé. On prévoit d'utiliser un algorithme de LS-PSA 7 images avec les caractéristiques suivantes :

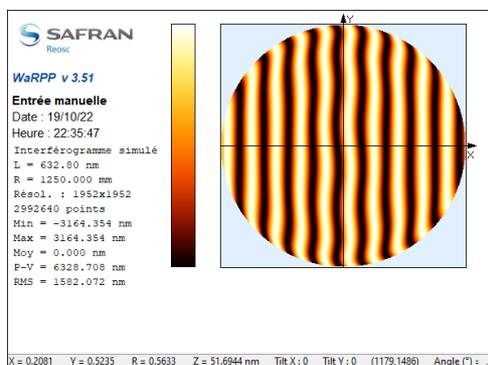
$$\text{Porteuse : } \omega_0 = \frac{2\pi}{7},$$

6 zéros aux 6 harmoniques principales.

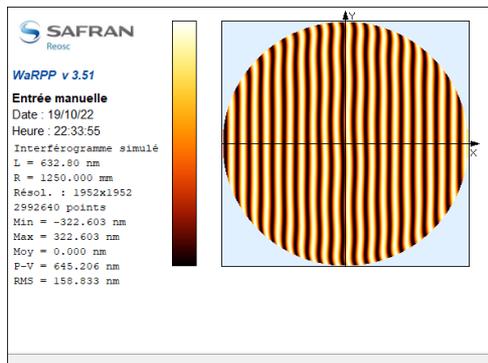
Questions :

1. Définir le polynôme caractéristique, le filtre $H(\omega)$ associés à l'algorithme, ainsi que l'expression de la phase.
2. Calculer l'écart type du bruit sur la phase en supposant un contraste $m=1$ et une intensité de la source $I_0=10000$ photons.

On observe la figure d'interférence suivante :



La carte d'erreur sur la reconstruction de la phase obtenue est la suivante :

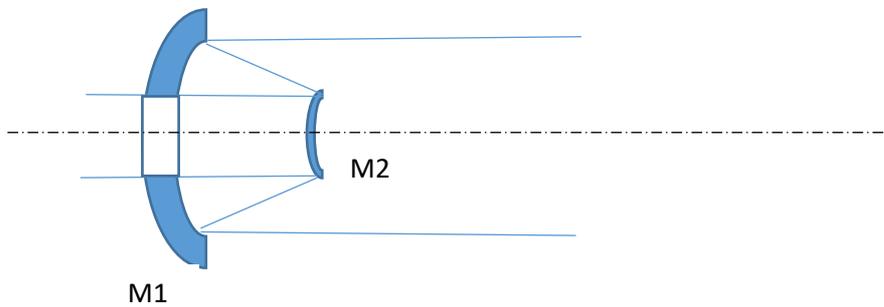


Questions :

1. Quel phénomène est à l'origine de cette carte d'erreur ? Comment peut-on la minimiser en modifiant l'algorithme de PSA ?
2. Donner une expression analytique de l'amplitude du défaut obtenu avec l'algorithme d'origine.

Partie IV :

On considère le télescope afocal suivant :



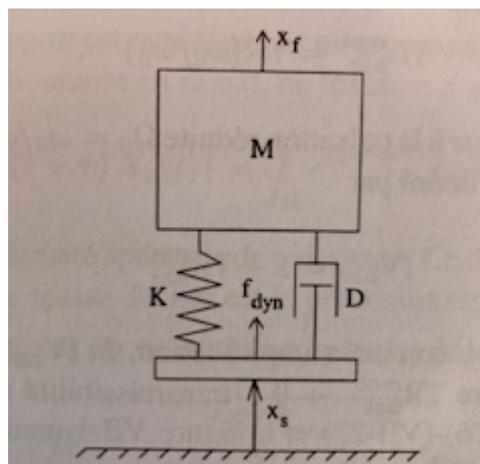
M1 et M2 sont deux miroirs paraboliques de rayons $R_1=400$ mm, $R_2=200$ mm. Distance $M_1M_2=100$ mm. Diamètres $M_1 = 200$ mm, $M_2 = 100$ mm.

1. Calculer l'aberration de défocus pour un déplacement du M2 de $1 \mu\text{m}$ selon z .

Le M1 reçoit un flux solaire d'amplitude $Q=1000 \text{ W/m}^2$. Il est traité avec un traitement réfléchissant de réflectivité $R=98\%$. La face arrière est maintenue à une température constante $T=300^\circ\text{K}$. Le M1 est un ménisque d'épaisseur $e=30\text{mm}$. Il est en zérodur de conductibilité thermique $\lambda=1.64 \text{ W/m.K}$

2. Faire le bilan de flux et en déduire le gradient thermique dans le miroir. On néglige les échanges radiatifs pour ce calcul.
3. Calculer la variation de courbure du M1 et en déduire l'aberration associée. Même question pour un miroir en SiC de conductibilité $\lambda=155 \text{ W/m.K}$.

Le télescope reçoit des vibrations de la structure que l'on modélise par un modèle masse-ressort à 1 ddl selon le schéma suivant :



1. Ecrire la RFD reliant x_f à x_s et calculer la fonction de transfert entre x_s et x_f .
2. Le système résonne à une fréquence $f_0=200$ Hz avec un facteur de qualité $Q=50$. Le télescope à une masse $M=2\text{kg}$. Calculer le déplacement x_f pour une vibration sinusoïdale du support de 1 m/s^2 à la fréquence de résonance.
3. Même question pour une vibration aléatoire du support avec une PSD de $1e^{-3} \text{ g}^2/\text{Hz}$.

Correction partie I :

I.1 : Il faut $L_c > \delta$. La différence de marche entre les rayons se réfléchissant sur le plan de Fizeau et ceux se réfléchissant sur le plan à mesurer vaut le double de la longueur de la cavité, soit 3.2 m. Il faut a minima que la longueur de cohérence vaille 3.2 m. Pour une source dont le spectre est défini par une porte de largeur $d\sigma=1/L_c$, le contraste des franges vaut $\text{sinc}(\delta/L_c)$. Si $L_c=\delta$, le contraste est nul et il faut donc que L_c soit suffisamment plus grand que δ pour récupérer du contraste.

I.2 : pour $L_c=20$ cm, le contraste vaut $\text{sinc}(16)=0$. Pour $L_c=300$ m, le contraste vaut $\text{sinc}(3.2/300)$.

I.3 : cas gradient axial :

Le gradient suit une loi linéaire $\Rightarrow T(x) = T_0 + \frac{0.1}{L_0} x$ (axe x selon l'axe avec l'origine au plan de Fizeau, $L_0=1.6$ m).

L'indice suit la loi : $n(x) = n_0(T_0) + \frac{dn}{dT} \cdot (T(x) - T_0) = n_0 + 0.1 * 1e^{-6} * \frac{x}{L_0}$

Avec $\frac{dn}{dT} = 1e^{-6}/K$ (désolé pour le cafouillage lors de l'exercice).

Le chemin optique en un point y de la pupille vaut $L(y) = 2 \int_0^{L_0} n(x). dx = 2n_0L_0 + 2 \cdot \frac{1e^{-7}L_0}{2}$. Le chemin optique n'a pas de dépendance en y. Le gradient ne rajoute qu'un terme de piston d'amplitude 0.16 μm .

Cas gradient latéral :

Le gradient suit une loi linéaire $\Rightarrow T(y) = T_0 + \frac{0.1}{H} y$ (axe y latéral avec l'origine en bas du plan de Fizeau, $H=1$ m).

Indice : $n(y) = n_0(T_0) + \frac{dn}{dT} \cdot (T(y) - T_0) = n_0 + 0.1 * 1e^{-6} * \frac{y}{H}$

Chemin optique : $L(y) = 2 \int_0^{L_0} n(y). dx = 2n_0L_0 + \frac{2e^{-7}y}{H} L_0$

Le gradient génère un tilt d'amplitude 0.32 μm en bord de pupille.

Partie II :

II.1 : On a des interférences à 4 ondes (réflexion M1/plan de Fizeau, M1/ plan à mesurer, M2 / plan de Fizeau, M2 / plan à mesurer). Seules 2 nous intéressent et il faut se débarrasser de celles qui ne nous intéressent pas en les déphasant suffisamment pour qu'elles n'interfèrent plus. Par ailleurs, une faible cohérence permet de s'affranchir de toutes les réflexions parasites pouvant avoir lieu sur le parcours des ondes.

II.2 : il faut que la différence de marche entre M1 et M2 soit égale à celle entre le plan de Fizeau et le plan à mesurer, soit 3.2 m. Cela est obtenu au moyen d'une fibre optique au niveau de M1 ou M2 qui introduit le bon déphasage.

II.3 : on peut écrire $I(\sigma) = f\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma_1}\right) \cdot \text{Cha}(\sigma)_{\sigma_2}$ avec f fonction gaussienne.

Fonction de cohérence mutuelle : $\Gamma_{1,2} = TF(E_1, E_2)(\delta_{1,2}) = TF(I)(\delta_{1,2})$ car $E_1=E_2$.

$$TF(I)(\delta) = \left((\sigma_1 \cdot \sigma_2 \hat{f}(\sigma_1 x) e^{-2i\pi\sigma_0 x}) * Cha(x) \frac{1}{\sigma_2} \right) (\delta)$$

$$TF(I)(\delta) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \sum_k \left(\hat{f} \left(\sigma_1 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right) \right) e^{-2i\pi\sigma_0 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right)} \right)$$

Avec $\hat{f}(\mu) = e^{-\pi\mu^2}$

L'intensité des franges vaut :

$$I_{tot} = TF(E_1^2)(0) + TF(E_2^2)(0) + TF(E_1 \cdot E_2)(\delta) + TF(E_1 \cdot E_2)^*(\delta)$$

$$I_{tot} = 2TF(I)(0) + TF(I)(\delta) + TF(I)^*(\delta)$$

Comme f est pair, \hat{f} est réelle et paire :

$$TF(I)(\delta) + TF(I)^*(\delta) = 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sum_k \hat{f} \left(\sigma_1 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right) \right) \cos \left(2\pi\sigma_0 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right) \right)$$

$$2TF(I)(0) = 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sum_k \hat{f} \left(\frac{\sigma_1 k}{\sigma_2} \right) \cos \left(\frac{2\pi\sigma_0 k}{\sigma_2} \right)$$

Comme $\sigma_1 = 100 \cdot \sigma_2$ et que la gaussienne \hat{f} décroît rapidement pour $\delta \gg 1$, les termes pour $k \geq 1$ sont négligeables et l'on a $2TF(I)(0) \approx 2\sigma_1 \cdot \sigma_2$. Finalement :

$$I_{tot} = 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \left(1 + \sum_k \left(\hat{f} \left(\sigma_1 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right) \right) \cos \left(2\pi\sigma_0 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right) \right) \right) \right)$$

$$I_{tot} = 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \left(1 + \sum_k \left(e^{-\pi\sigma_1^2 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right)^2} \cos \left(2\pi\sigma_0 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right) \right) \right) \right)$$

On a $\sigma_0 = 2 \mu m^{-1} = 2 \cdot 10^4 \sigma_2$ et donc $2\pi\sigma_0 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right) = 2\pi\sigma_0 \delta \text{ mod}(2\pi)$. Finalement :

$$I_{tot} = 2\sigma_1 \cdot \sigma_2 \left(1 + \left(\sum_k e^{-\pi\sigma_1^2 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right)^2} \right) \cdot \cos(2\pi\sigma_0 \delta) \right)$$

On voit apparaître un terme de contraste $\left(\sum_k e^{-\pi\sigma_1^2 \left(\delta - \frac{k}{\sigma_2} \right)^2} \right)$ qui vaut 1 tous les $\delta_k = \frac{k}{\sigma_2}$. On a donc un rebond de cohérence périodique pour les différences de marche δ_k . Autour de ces fréquences, le contraste vaut $e^{-\pi}$ lorsque $\delta = \frac{k}{\sigma_2} \mp \frac{1}{\sigma_1}$.

Partie III :

Q1 : Les filtres $H(\omega)$ sont de la forme $H(\omega) = \sum_0^{N-1} c_k e^{-ik\omega}$. Pour les filtres LS-PSA, on choisit $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ et $c_k = e^{ik\omega_0}$

Du coup, pour $N=7$, $H(\omega) = \sum_0^6 e^{-ik(\omega - \frac{2\pi}{7})} = \frac{1 - e^{-7i\omega}}{1 - e^{-i(\omega - \frac{2\pi}{7})}}$. Ce filtre est nul pour $\omega = k \frac{2\pi}{7}$, avec $k=-1$ et k compris entre 0 et $N-1$ mais différent de 1.

La phase est égale à :

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sum_0^{N-1} \sin \left(k \frac{2\pi}{7} \right) I_{N-1-k}}{\sum_0^{N-1} \cos \left(k \frac{2\pi}{7} \right) I_{N-1-k}} \right)$$

Q2 : pour un algo LS-PSA, le bruit de photon vaut pour la phase :

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{1}{m \sqrt{\text{nombre de photons}}}$$

Pour $m=1$ et 10000 photons, on a

$$\sigma_\varphi = \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot 10^{-2} \text{rad}$$

Le bruit sur l'écart de front d'onde est obtenu en multipliant par $\lambda/2\pi$.

Q3 : on observe une erreur sur la phase qui varie en sinus du double de la phase. C'est typique d'un problème de detuning qui peut être causé notamment par des vibrations en phase-shift temporel. Pour l'éviter, on choisit un filtre $H(\omega)$ qui présente plusieurs 0 en $-\omega_0$.

Q4 : l'amplitude du défaut de phase vaut :

$$\varepsilon_\varphi = \left| \frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)} \right| \sin(2\varphi)$$

Avec l'algo LS-PSA choisi plus haut :

$$\varepsilon_\varphi = \left| \frac{1 - e^{7i(\omega_0 + \Delta)}}{1 - e^{i(2\omega_0 + \Delta)}} \cdot \frac{1 - e^{-7i(\omega_0 + \Delta)}}{1 - e^{-i\Delta}} \right| \sin(2\varphi)$$

$$\varepsilon_\varphi = \left| \frac{\sin^2\left(\frac{7}{2}\Delta\right)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{2\pi}{7}\right)} \right| \sin(2\varphi)$$