

BANC INTERFÉROMÉTRIQUE POUR LA MÉTROLOGIE D'OPTIQUES HAUTES PERFORMANCES

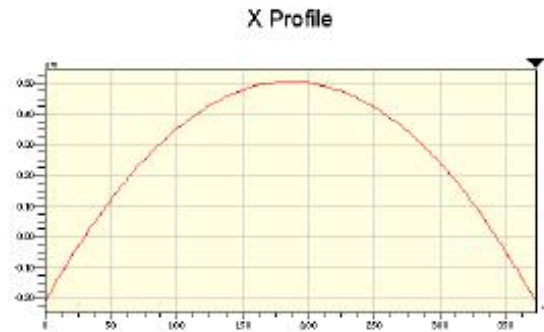
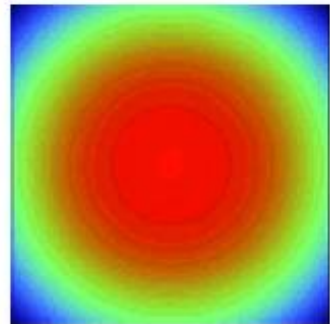
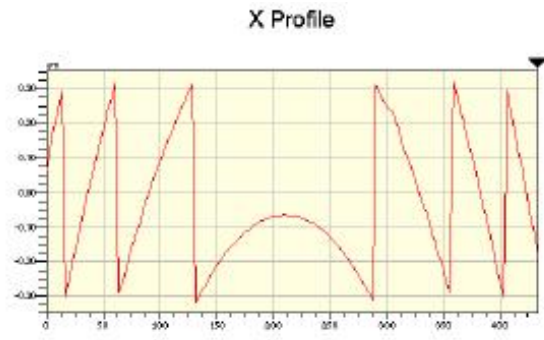
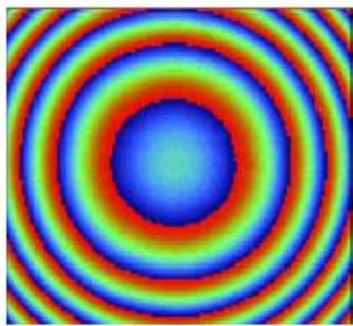
Renaud Mercier Ythier

Octobre 2023



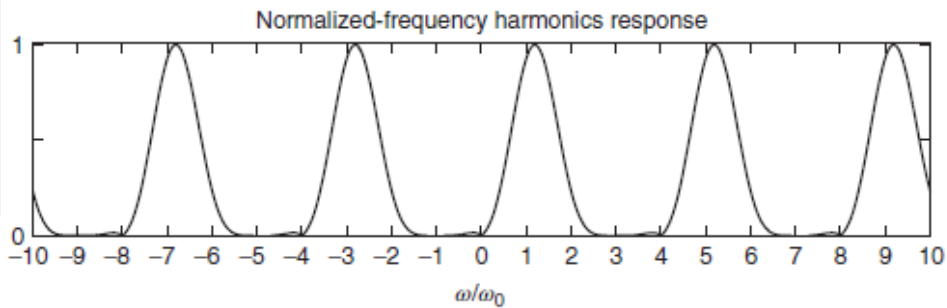
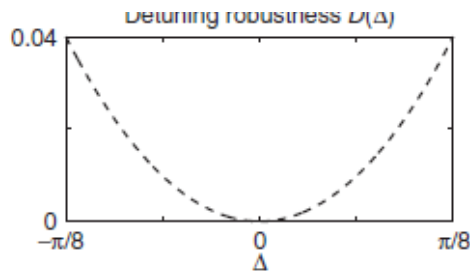
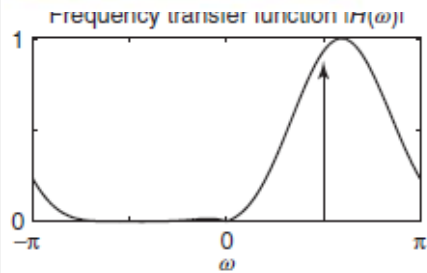
Sommaire

- **Contexte**
 - Présentation Safran Reosc
 - Quelques projets emblématiques : JWST, LISA, ELT...
- **Design d'un banc interférométrique : cas pratique le banc ELT M1**
 - Problématiques/spécification du banc WFE
 - Principe de l'interférométrie
 - Architecture du banc
 - Techniques d'acquisition de la phase
 - Longueur d'onde et cohérence



-2.3-

RÉCUPÉRATION DE LA PHASE



Récupération de la phase

$$I = \underbrace{a(x, y) + b(x, y)}_{\text{Contraste et intensité moyenne}} \cdot \cos 2\pi \frac{\delta(x, y)}{\lambda}$$

Contraste et intensité moyenne
pouvant varier spatialement =>
comment remonter à la phase ?

Interférogramme dans le cas monochromatique

- Expression des interférences :

$$I = I_0 \left(1 + m \cdot \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right)$$

- δ porte l'information sur le retard entre les 2 ondes, soit l'information sur les défauts de forme de la pièce à tester.
- Pour remonter à δ , il faut inverser l'expression de l'intensité :
 - Implique de connaître I_0 et m en tout point de la carte
 - Inverser le cosinus => très imprécis pour une phase proche de 0 mod 2 Pi car sensibilité nulle (dérivée nulle en 0)
- Pour remonter à la phase, une solution est d'introduire un déphasage connu et d'enregistrer plusieurs interférogrammes décalés en phase avec un delta de phase constant (phase shift).

┌ Méthodes de reconstruction de phase

Deux méthodes principales existent pour ajouter un déphasage connu :

- **Franges porteuses : on introduit un tilt spatial qui génère un déphasage linéaire en tout point de la carte**
- **Décalage de phase : on introduit un retard constant sur l'une des deux voies de l'interféromètre**

Franges porteuses ou « fringe carrier » (FLIP)

Pour cet algorithme, on fait l'hypothèse que la phase varie linéairement localement :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) = \varphi_0 + \varphi_x(x_0) x$$

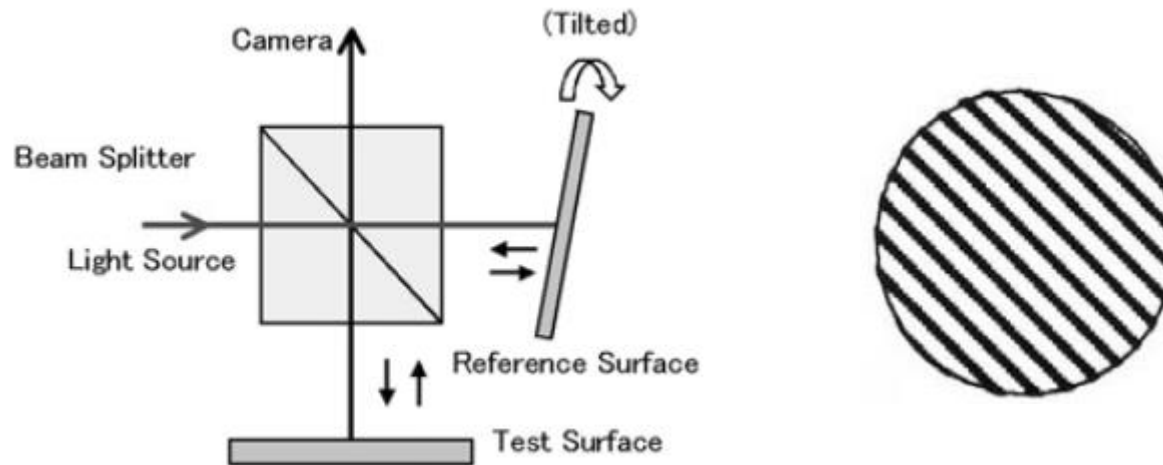
L'interférogramme peut alors s'écrire localement sous la forme :

$$I(x) = a + b \cos [\varphi_0 + \varphi_x(x_0) x]$$

Dans l'espace de Fourier :

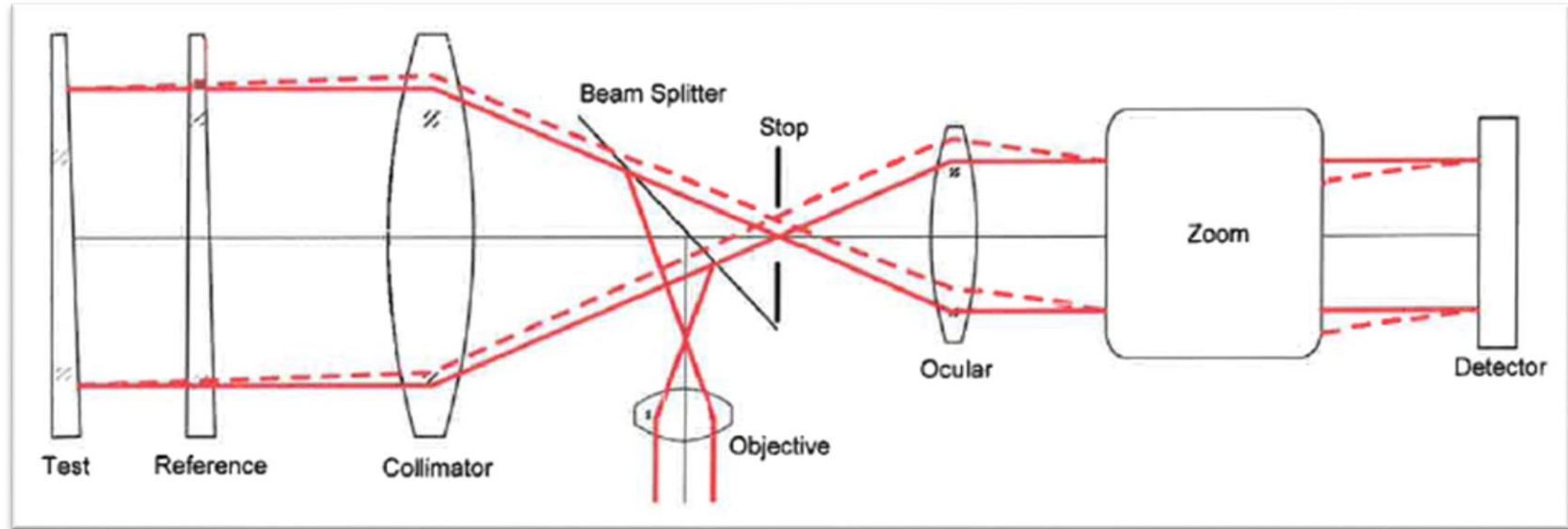
$$I(u) = a\delta(u) + \frac{1}{2}b \left[e^{i\varphi_0} \delta(u - \varphi_x) + e^{-i\varphi_0} \delta(u + \varphi_x) \right]$$

Franges porteuses ou « fringe carrier » (FLIP)



- Acquisition avec le plan de référence incliné dans une direction puis dans la direction opposé (même angle d'inclinaison)
- Les deux directions d'acquisition sont moyennées pour s'affranchir des biais (ex. coma due à un résidu d'alignement latéral)
- La pente du front d'onde en fonction de la position dans la pupille est calculée à partir de l'interférogramme
- On remonte au défaut de forme du front d'onde par intégration

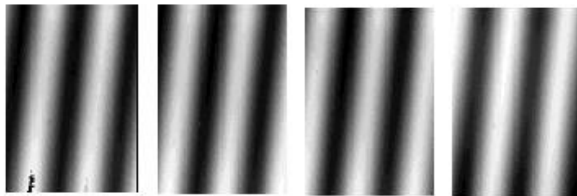
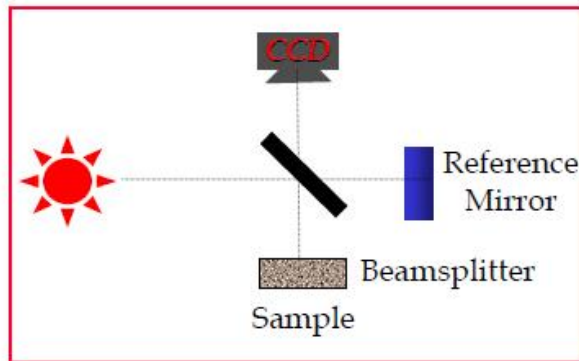
Franges porteuses : limitations



- Le trajet retour du faisceau de référence est décalé par rapport à celui du faisceau de mesure ; en plus de l'impact lié aux autres fréquences, les aberrations de champ de l'interféromètre deviennent significatives et affectent la mesure
- La porteuse est une pente qui vient s'ajouter aux pentes du faisceau que l'on cherche à mesurer ; elle réduit d'un facteur 2 la dynamique de mesure de l'instrument

Phase-shift : principe de base 1/2

Four Step Method



90° phase shift between measurements

$$I(x,y) = I_{dc} + I_{ac} \cos[\underbrace{\phi(x,y)}_{\text{measured object phase}} + \underbrace{\phi(t)}_{\text{phase shift}}]$$

$I_1(x,y) = I_{dc} + I_{ac} \cos [\phi (x,y)]$	$\phi (t) = 0 \quad (0^\circ)$
$I_2(x,y) = I_{dc} - I_{ac} \sin [\phi (x,y)]$	$= \pi/2 \quad (90^\circ)$
$I_3(x,y) = I_{dc} - I_{ac} \cos [\phi (x,y)]$	$= \pi \quad (180^\circ)$
$I_4(x,y) = I_{dc} + I_{ac} \sin [\phi (x,y)]$	$= 3\pi/2 \quad (270^\circ)$

$$\tan[\phi(x,y)] = \frac{I_4(x,y) - I_2(x,y)}{I_1(x,y) - I_3(x,y)}$$

$$\phi(x,y) = \tan^{-1} \left[\frac{I_4(x,y) - I_2(x,y)}{I_1(x,y) - I_3(x,y)} \right]$$

$$\text{Height}(x,y) = \frac{\lambda}{4\pi} \phi(x,y)$$

Phase shift

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right)$$

Avantages de la méthode :

- La tangente est monotone et s'inverse facilement entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (au-delà, il faut déplier la phase => algo d'unwrapping)
- La sensibilité à un delta de phase est > 1 (dérivée de tangente = $1 + \tan^2$)
- L'expression finale est indépendante de I_0 et m => insensibilité à des variations spatiales d'éclairement

Phase-shift : principe de base 2/2

Autres algorithmes de reconstruction

Three Measurements $\phi = \tan^{-1} \left[\frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2} \right]$

Four Measurements $\phi = \tan^{-1} \left[\frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} \right]$

**Schwider-Hariharan
Five Measurements** $\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_5 - I_1} \right]$

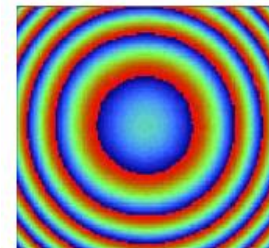
Carré Equation

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{[3(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)][(I_2 - I_3) - (I_1 - I_4)]}}{(I_2 + I_3) - (I_1 + I_4)} \right]$$

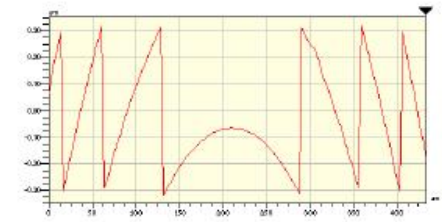
Subtilité de reconstruction :

- Le résultat de la fonction arctangente est donné modulo 2π .
- La phase doit être dépliée proprement en prenant compte de cette ambiguïté de 2π .

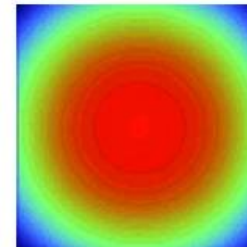
Avant dépliement



X Profile



Après dépliement

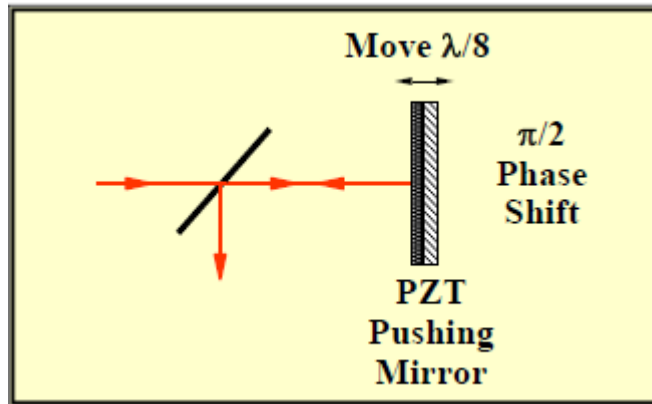


X Profile

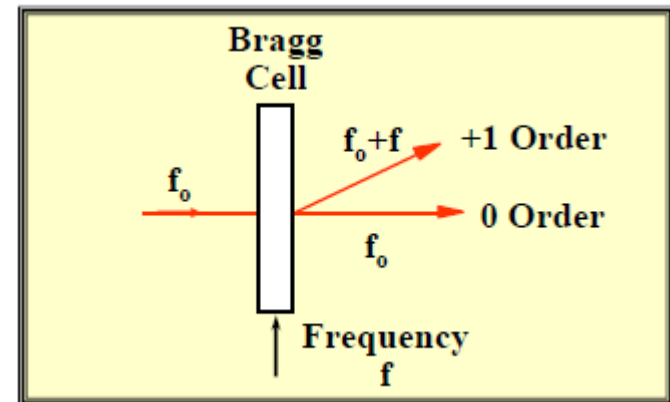


Phase-shift : méthodes de shift temporel 1/2

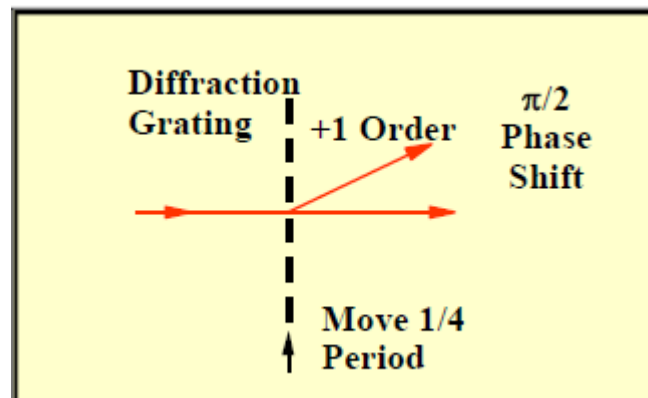
Miroir mobile



Cellule de Bragg

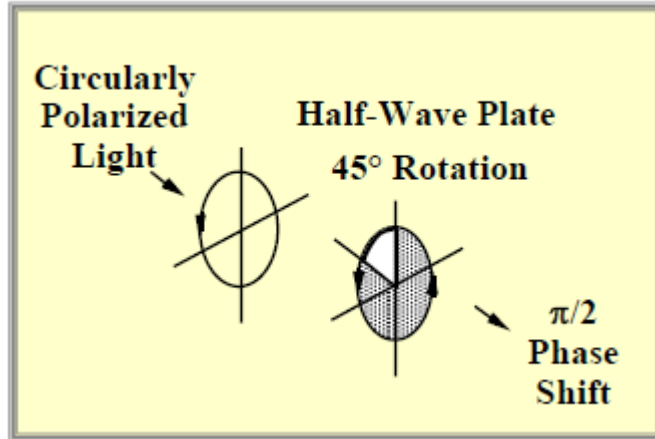


Réseau de diffraction

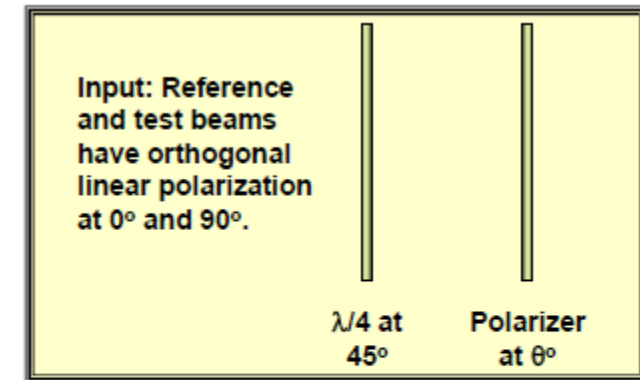


Phase-shift : méthodes de shift temporel 2/2

Lame $\frac{1}{2}$ onde



Polariseur

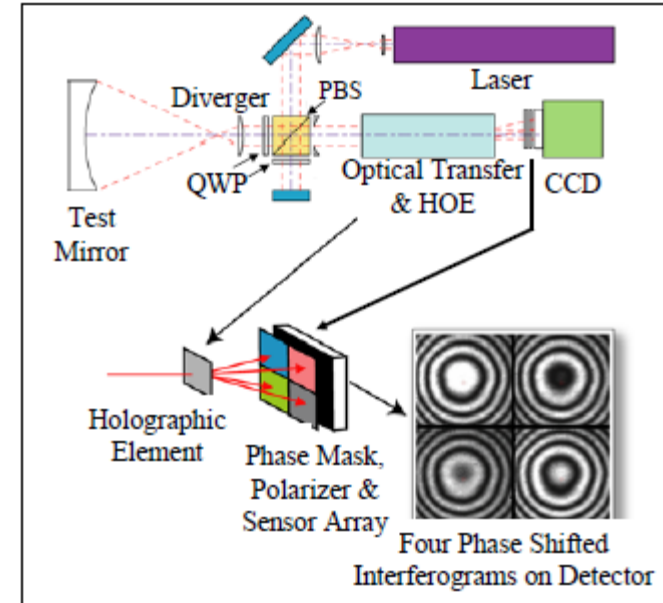
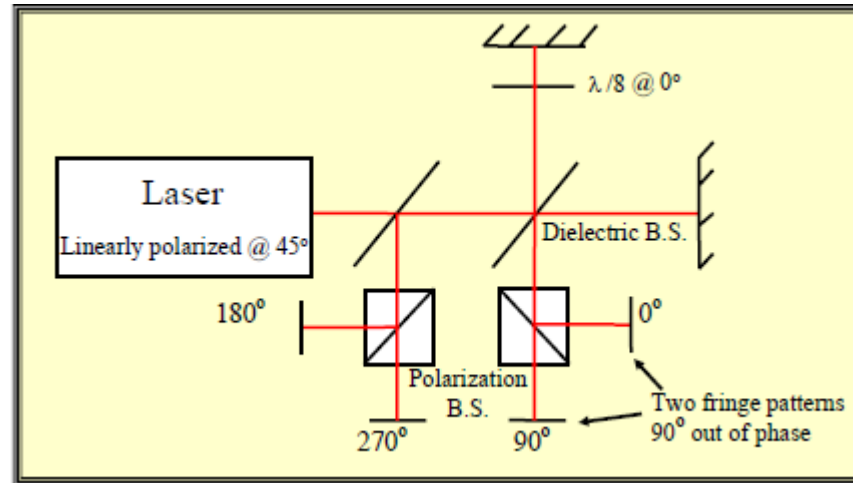


As a polarizer is rotated an angle θ the phase difference between the test and reference beams changes by 2θ .

Limitation majeure du phase-shift temporel :

- Sensible aux vibrations externes
- Les vibrations peuvent induire une erreur de shift entre les trames d'acquisition
- L'erreur dépend de la fréquence de vibration et de la phase des vibrations par rapport à la phase du shift

Phase-shift : méthode de shift instantané 1/2



- Séparation de polarisation en 4 voies, chacune déphasée de $\pi/2$
- Trames acquises sur 4 détecteurs ou sur un même détecteur à l'aide d'une optique diffractive et d'un masque polarisant

Phase-shift : méthode de shift instantané 2/2

- **Avantages**
 - Peu sensible aux vibrations
 - Rapidité d'acquisition des données
 - Acquisition de l'ensemble des données déphasées en une fois
- **Inconvénients**
 - Sensible aux éléments polarisants/biréfringents situés dans la cavité interférométrique
 - Exemple : matrice en Zerodur dans le banc de test E-ELT M2
 - Perte de résolution spatiale

Analyse des algorithmes de décalage de phase (PSA)

Equation des interférences

$$I_0(r) = a(r) + b(r) \cos[\varphi(r)]$$

3 inconnues à déterminer pour chaque pixel : $a(\mathbf{r})$, $b(\mathbf{r})$, $\varphi(\mathbf{r})$

Rappels TF

Définition de la transformée de Fourier :

$$TF(f)(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2i\pi\mu x} dx$$

$$TF^{-1}(\hat{f})(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mu) \cdot e^{2i\pi\mu x} d\mu$$

Principales propriétés :

$$TF(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\mu)|^2 d\mu$$

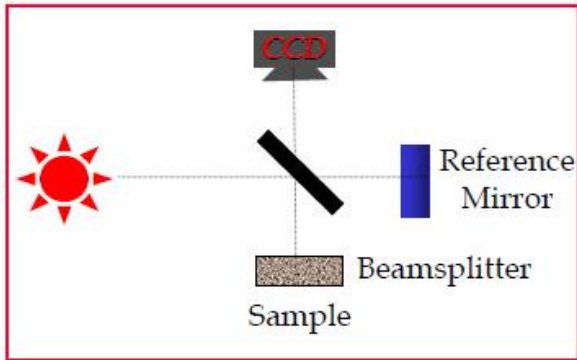
TF usuelles :

Fonction porte de largeur T : $TF(\Pi_T) = T \cdot \text{sinc}(T \cdot \mu)$

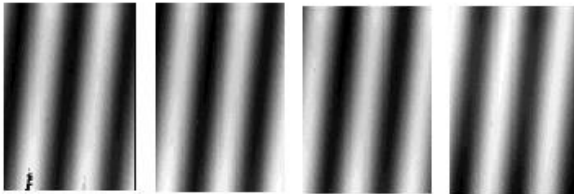
Fonction dirac : $TF(e^{2i\pi\mu_0 x}) = \delta(\mu - \mu_0)$

Analyse des algorithmes de décalage de phase (PSA)

Supposons que l'on acquière n interféérogrammes décalés d'une fréquence $k\omega_0$:



$$I_k(r) = a(r) + b(r) \cos[\varphi(r) + k \cdot \omega_0]$$



90° phase shift between measurements

$I_k(r)$ peut être vu comme l'interférogramme

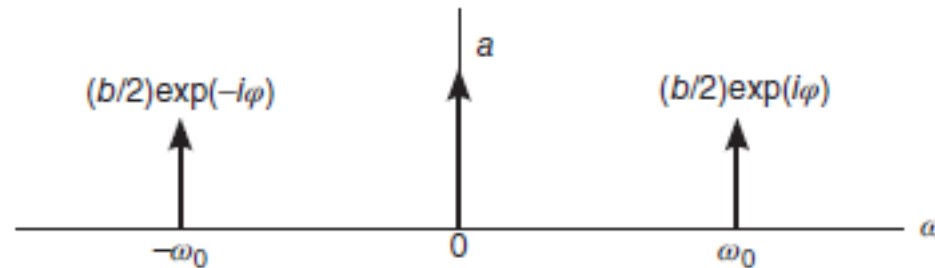
$$I(r, t) = a(r) + \frac{b(r)}{2} \cdot (e^{i(\varphi(r) + \omega_0 t)} + e^{-i(\varphi(r) + \omega_0 t)})$$

obtenu à l'instant $t=k$

Analyse des algorithmes de décalage de phase (PSA)

Dans l'espace de Fourier (intégration sur le temps) :

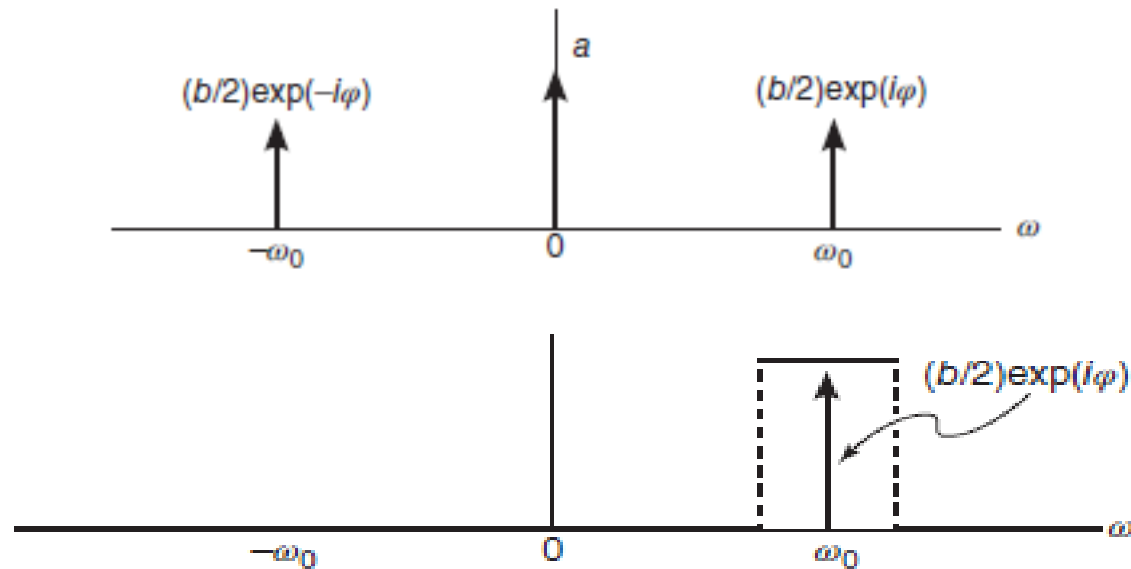
$$\tilde{I}(\omega) = a \cdot \delta(\omega) + \frac{b \cdot e^{i\varphi}}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \frac{b \cdot e^{-i\varphi}}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0)$$



Analyse des algorithmes de décalage de phase (PSA)

Pour retrouver la phase ϕ , on cherche un filtre $H(\omega)$ sélectionnant l'harmonique $\omega_0 \Rightarrow H(-\omega_0)=H(0)=0$ (filtre en quadrature)

$$H(\omega) \cdot \tilde{I}(\omega) = H(\omega_0) \cdot \frac{b \cdot e^{i\phi}}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$



Analyse des algorithmes de décalage de phase (PSA)

Dans l'espace temporel :

$$S(t) = I * h = H(\omega_0) \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{\mathbf{b} \cdot e^{i\varphi}}{2}$$

$$Arg(S(t)) = \varphi(r) + \omega_0 t + Arg(H(\omega_0))$$

$$\varphi = Arg(S(t)) + K = \tan^{-1} \left(\frac{Im(I * h)}{Re(I * h)} \right) + K$$

Avec K, terme de piston, n'ayant pas d'impact sur la forme de la pièce mesurée

┌ Définition du filtre $h(t)$

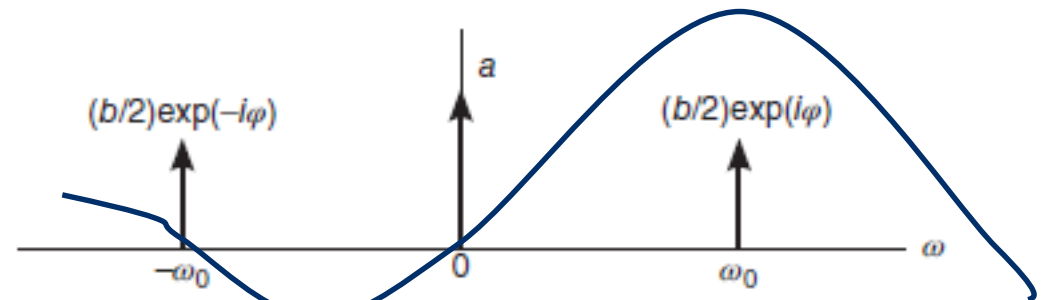
Un filtre en quadrature $h(t)$ permet :

- **De récupérer la phase en s'affranchissant des variations spatiales liées à l'illumination (terme $a(r)$) et des variations de contraste des franges (terme $b(r)$)**
- **Eventuellement de corriger des défauts liés au capteur (non linéarités, bruit) ou au mécanisme de phase-shift (detuning)**

Filtre $h(t)$: cas continu

On considère le filtre continue H :

$$H(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)$$



TF⁻¹

$$S(t) = I * h = H(\omega_0) \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{b \cdot e^{i\phi}}{2} = e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{b \cdot e^{i\phi}}{2}$$

Problème : ce filtre nécessite une intégration continue de $I(t)$ et donc une infinité d'interférogrammes déphasés de $\omega_0 \cdot t$

Calcul du filtre $h(t)$: cas discret

On considère le filtre $h(t)$ défini par :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \delta(t - k) = \sum_{k=0}^{N-1} (a_k + i b_k) \cdot \delta(t - k)$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{-ik\omega}$$

On a :

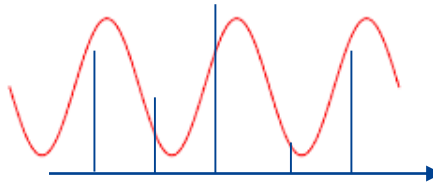
$$S(t') = I(t) * h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k (a + b \cos(\varphi + \omega_0(t' - k)))$$



Calcul du filtre $h(t)$

On a à $t=N-1$:

$$S(N-1) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k (a + b \cos(\varphi + (N-1-k) \cdot \omega_0)) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot I_{N-1-k}$$



Finalement :

$$\varphi = \text{Arg}(S(N-1))$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(\sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot I_{N-1-k})}{\text{Re}(\sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot I_{N-1-k})} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot I_{N-1-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot I_{N-1-k}} \right)$$

Calcul du filtre $h(t)$

Ex de l'algo 4 images :

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_3 - I_1}{I_0 - I_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot I_{N-1-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot I_{N-1-k}} \right)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

On a :

$$(a_k) = (0, -1, 0, 1) \quad (b_k) = (1, 0, -1, 0)$$

$$H(0) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k = 0 \quad H(-\omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot (i)^k = 0$$

$$H(\omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot (-i)^k = 4i$$

Calcul du filtre $h(t)$

Ex de l'algo 7 images (ELT M2) :

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_0 - I_6 - 3(I_2 - I_4)}{2(I_1 + I_5) - 4I_3} \right)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

Exercice : calculer les coefficients c_k et la réponse du filtre H en $k\omega_0$.

$$(a_k) = (0, 2, 0, -4, 0, 2, 0) \quad (b_k) = (-1, 0, 3, 0, -3, 0, 1)$$

$$H(0) = \sum_{k=0}^6 c_k = 0 \quad H(-\omega_0) = \sum_{k=0}^6 c_k \cdot (i)^k = 0 \quad H(\omega_0) = \sum_{k=0}^6 c_k \cdot (-i)^k = -16i$$

$$H(2\omega_0) = \sum_{k=0}^6 c_k \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^6 a_k - i \sum_{k=0}^6 b_k = 0 \quad H(3\omega_0) = H(-\omega_0) = 0$$

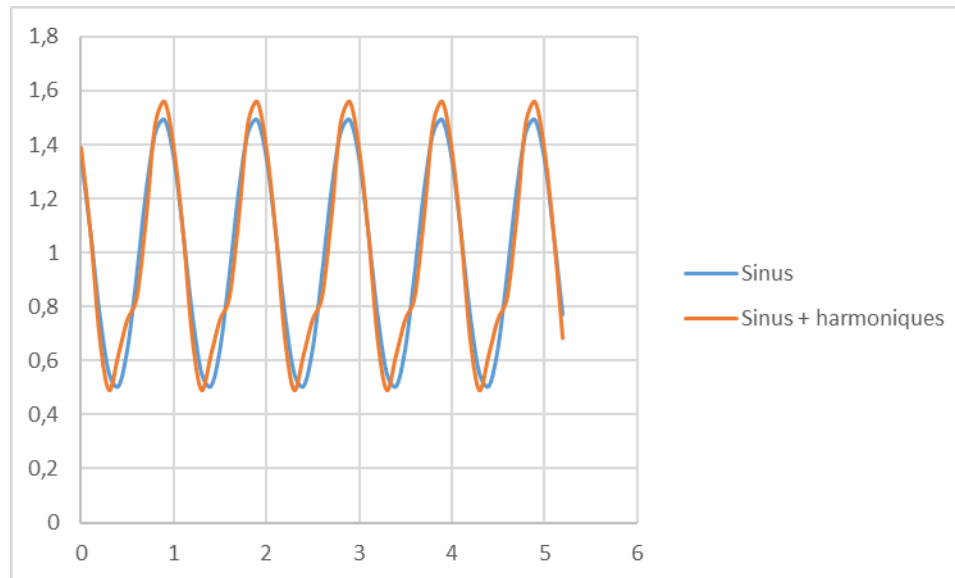
$$H(4\omega_0) = 0 \quad H(5\omega_0) = -16i \quad H(6\omega_0) = H(2\omega_0) = 0$$

Filtrage des harmoniques

On suppose que $I(t)$ est périodique mais, du fait des non linéarités du capteur, n'a pas une forme sinusoïdale pure.

$I(t)$ restant périodique peut se décomposer en série de Fourier sous la forme :

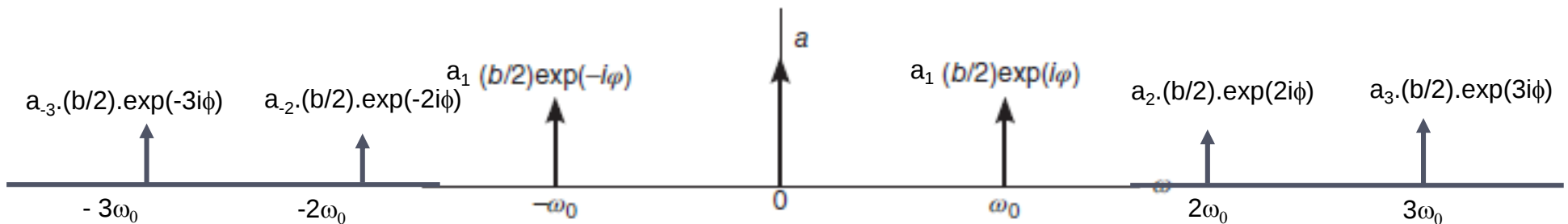
$$I(r, t) = a(r) + \frac{b(r)}{2} \cdot \sum_k \alpha_k e^{ik(\varphi(r) + \omega_0 t)}$$



Filtrage des harmoniques

Dans l'espace de Fourier, le spectre de $I(t)$ vaut alors :

$$I(r, \omega) = a(r) + \frac{b(r)}{2} \cdot \sum_k \alpha_k e^{ik\varphi(r)} (\delta(\omega + k \cdot \omega_0))$$



Apparition d'harmoniques

En filtrant $I(t)$ par $h(t)$, il est possible de filtrer les différentes harmoniques, en imposant $H(k\omega_0)=0$.

Filtrage des harmoniques

Soit le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot X^k$

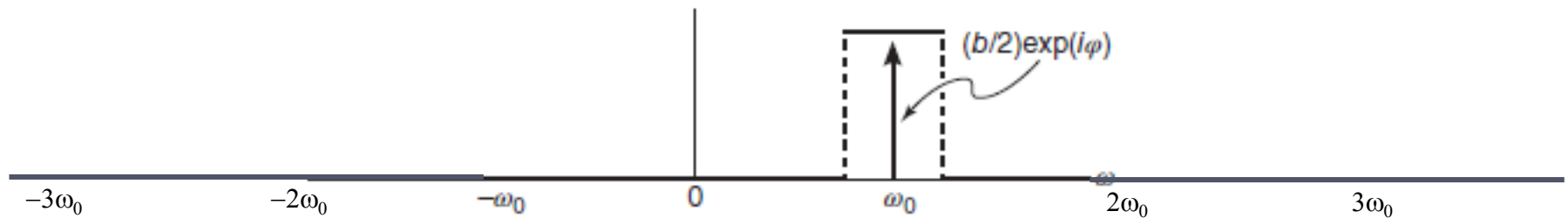
On a : $H(\omega) = P(e^{-i\omega})$

P est un polynôme d'ordre $N-1 \Rightarrow N-1$ 0 max.

On veut :

$$H(\omega_0) = P(e^{-i\omega_0}) \neq 0,$$

$$H(k\omega_0) = P(e^{-ik\omega_0}) = 0, \text{ pour } k \neq 1$$



Filtrage des harmoniques

Meilleure solution :

$$P(X) = A \prod_{\substack{k=-1 \\ k \neq 1}}^{N-2} (X - e^{-ik\omega_0})$$

$$H(\omega) = A \prod_{\substack{k=-1 \\ k \neq 1}}^{N-2} (e^{-i\omega} - e^{-ik\omega_0})$$

Avec N images, on peut bloquer au maximum N-1 harmoniques

Filtrage des harmoniques

Cas particulier : $\omega_0 = 2\pi/N$

On considère le filtre de coefficients $c_k = e^{ik\omega_0} = e^{\frac{2ik\pi}{N}}$. Alors :

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{-ik\omega} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ik(\omega-\omega_0)} = \frac{1 - e^{-iN\omega}}{1 - e^{-i(\omega-\omega_0)}}$$

On a bien :

$H(k\omega_0) = 0$, pour $k \neq 1, k = -1..N-1$

$H(\omega_0) \neq 0 = N$

Dans ce cas, il est facile de calculer les coefficients c_k :

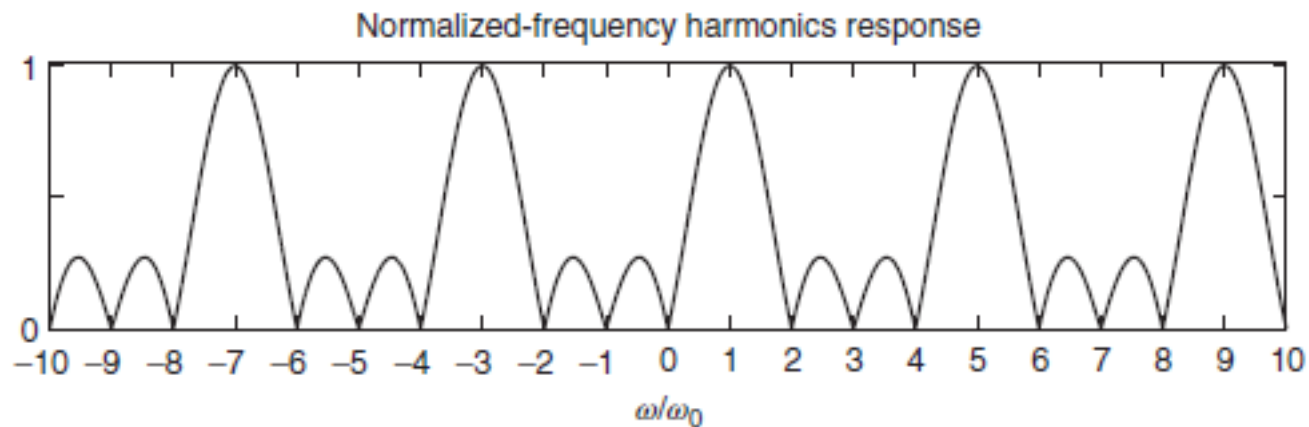
$$c_k = e^{ik\omega_0} = e^{\frac{2ik\pi}{N}}$$

Les c_k sont les racines de l'unité.

Filtrage des harmoniques : exemples 4 images

$$H(\omega) = \left[1 - \exp(i\omega)\right] \left[1 - \exp i(\omega + \omega_0)\right] \left[1 - \exp i(\omega + 2\omega_0)\right],$$

$$A_0(x, y) \exp[i\hat{\varphi}(x, y)] = I_0 - iI_1 - I_2 + iI_3.$$

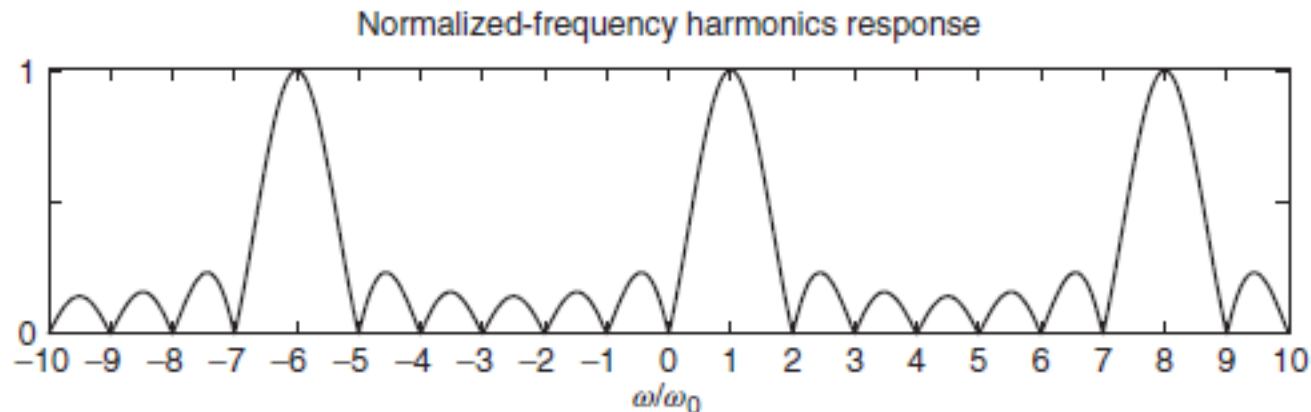


Filtrage des harmoniques : exemple 7 images

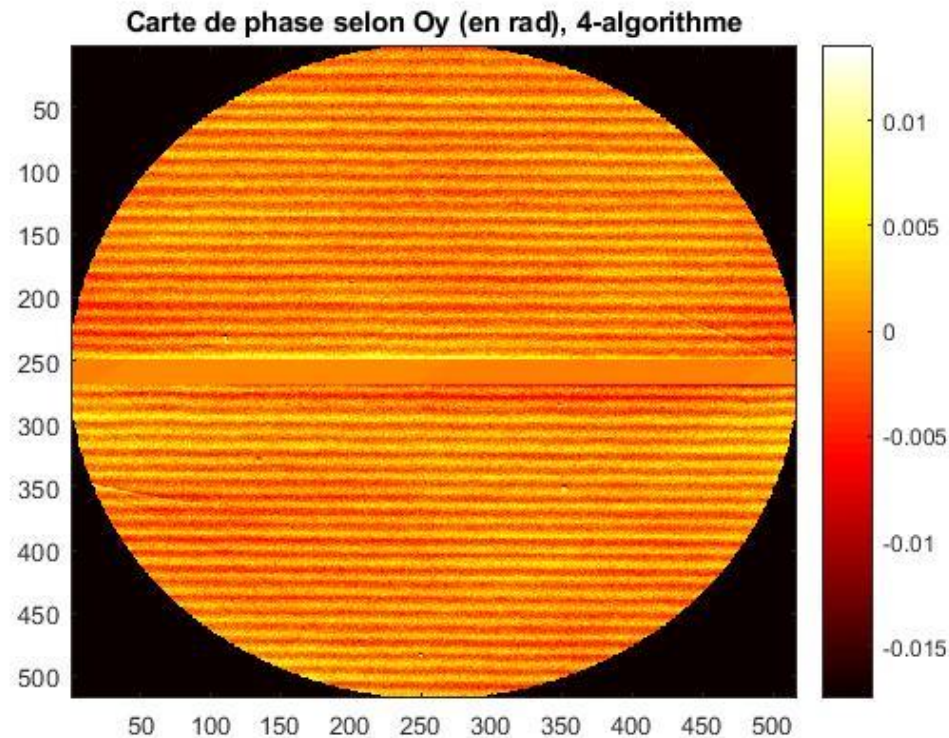
Exercice : calculer le filtre filtrant le plus d'harmoniques avec 7 images

$$H(\omega) = \prod_{n=0}^5 \left[1 - \exp i(\omega + \omega_0 n) \right]$$

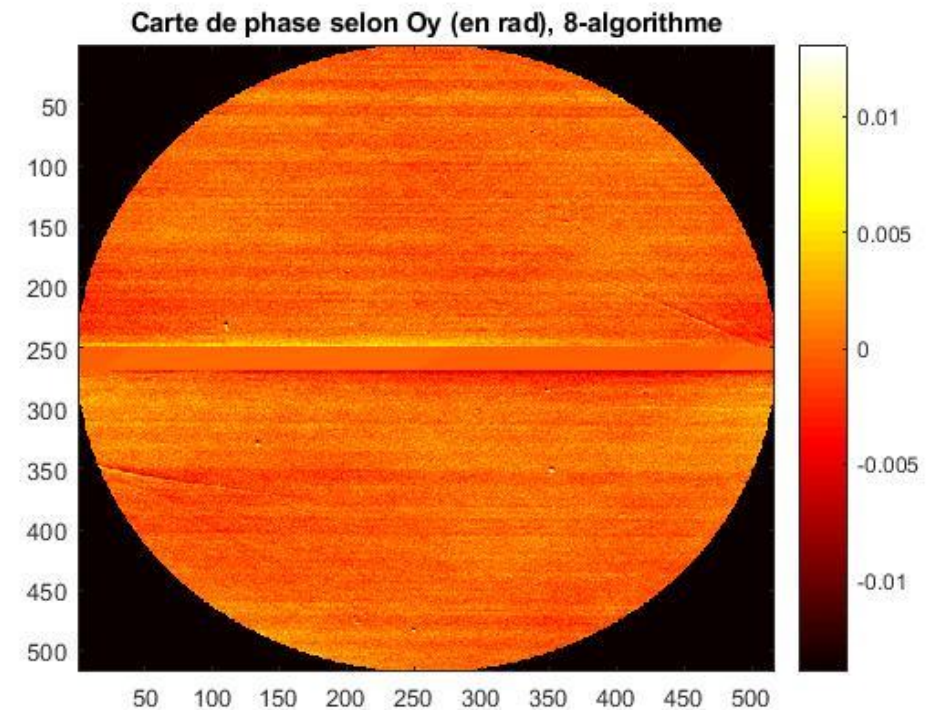
$$A_0(x, y) \exp[i\hat{\varphi}(x, y)] = \sum_{n=0}^6 \exp(i\omega_0 n) I_n.$$



Expérimentalement :



4-Algorithmme



8-Algorithmme

Exemple de Surimpressions d'harmoniques de franges pour un même jeu de données d'intensité.
Le tilt et focus ont été soustraits des cartes de phase pour mieux visualiser les surimpressions.

Mesure calibre plan, $\phi = 200mm$

Désaccordage de la porteuse ω_0 (detuning)

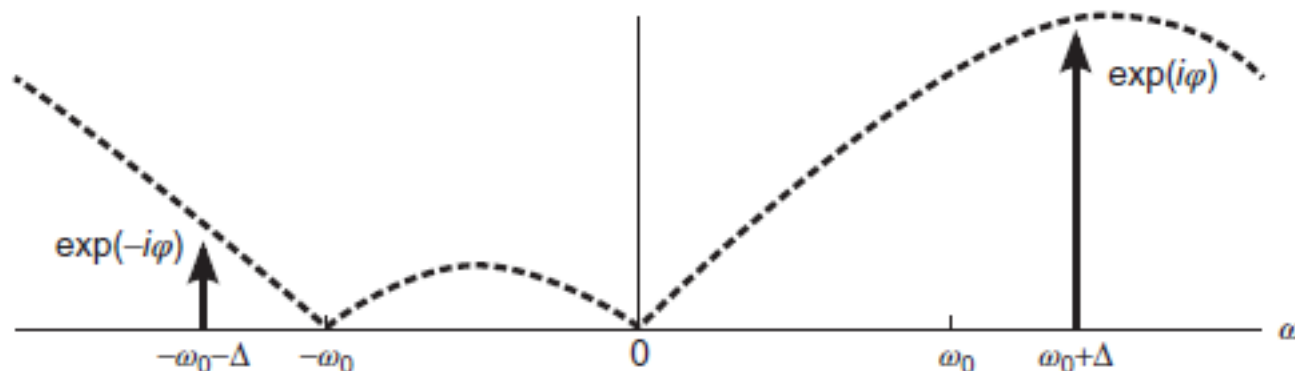
On suppose que l'on fait une erreur Δ sur la porteuse ω_0 .

$$I(x, y, t) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\varphi(x, y) + (\omega_0 + \Delta)t]$$

Dans l'espace de Fourier, le spectre de $I(t)$ vaut alors :

$$I(x, y, \omega) = a\delta(\omega) + (b/2)e^{i\varphi}\delta(\omega - \omega_0 - \Delta) + (b/2)e^{-i\varphi}\delta(\omega + \omega_0 + \Delta).$$

Après filtrage par un filtre linéaire en quadrature H :



Désaccordage de la porteuse ω_0 (detuning)

En retournant dans l'espace réel :

$$S(t) = \frac{b}{2} H(\omega_0 + \Delta) e^{i\varphi} \cdot e^{(i\omega_0 + \Delta)t} + \frac{b}{2} H(-\omega_0 - \Delta) \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{-i(\omega_0 + \Delta)t}$$

On a alors :

$$S(t) = \frac{b}{2} H(\omega_0 + \Delta) e^{i\varphi} \cdot e^{(i\omega_0 + \Delta)t} \cdot \left(1 + \left| \frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)} \right| \cdot e^{i\theta} \cdot e^{-2i\varphi} \cdot e^{-2i(\omega_0 + \Delta)t} \right)$$

Avec θ , argument de $\frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)}$

La phase reconstruite est alors :

$$\tilde{\varphi} = \varphi + K(t) + \text{Arg} \left(1 + \left| \frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)} \right| \cdot e^{i\theta} \cdot e^{-2i\varphi} \cdot e^{-2i(\omega_0 + \Delta)t} \right)$$

Désaccordage de la porteuse ω_0 (detuning)

Pour Δ petit, en supposant $\left| \frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)} \right|$ petit, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} - \varphi &= A \tan \left(- \frac{\left| \frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)} \right| \sin(2\varphi + 2(\omega_0 + \Delta)t - \theta)}{1 + \left| \frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)} \right| \cos(2\varphi + 2(\omega_0 + \Delta)t - \theta)} \right) + K(t) \\ &\approx - \left| \frac{H(-\omega_0 - \Delta)}{H(\omega_0 + \Delta)} \right| \sin(2\varphi + K'(t)) + K(t) \end{aligned}$$

On trouve un défaut à 2 fois la fréquence des franges dont l'amplitude varie selon

$$D(\Delta) = \frac{|H(-\omega_0 - \Delta)|}{|H(\omega_0 + \Delta)|}$$

Désaccordage de la porteuse ω_0 (detuning)

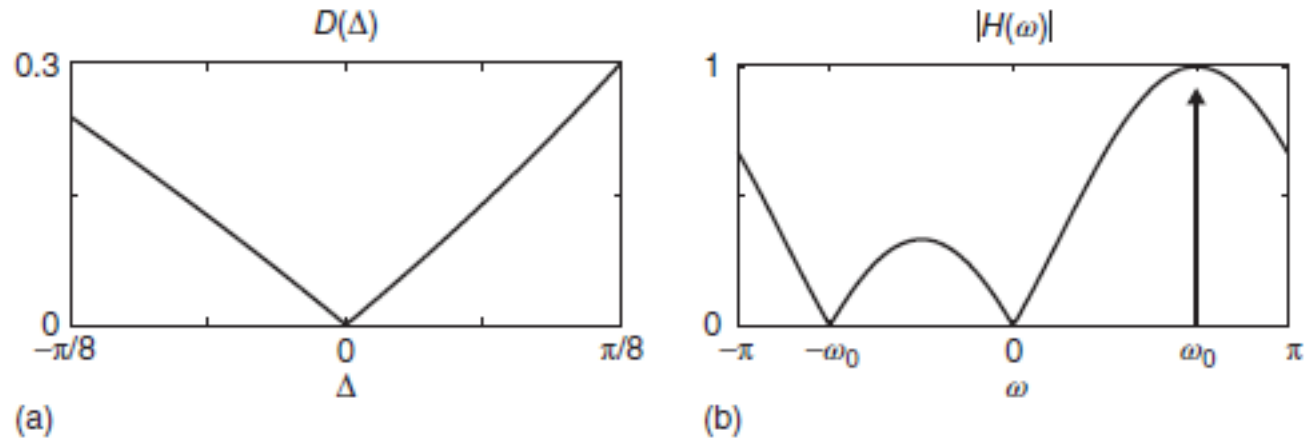


Figure 2.17 Amplitude of the detuning error (a) and frequency transfer function plot (b) of the three-step least-squares phase-shifting algorithm.

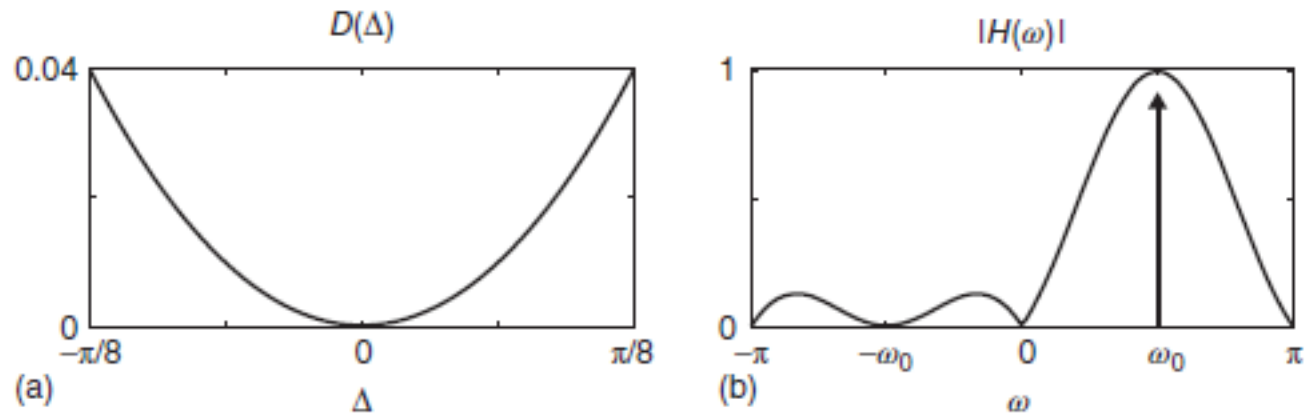


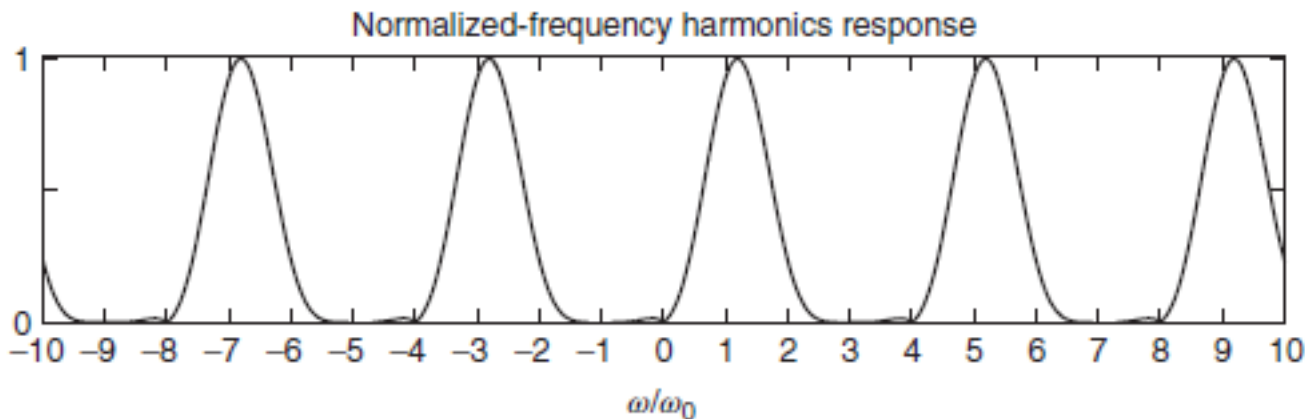
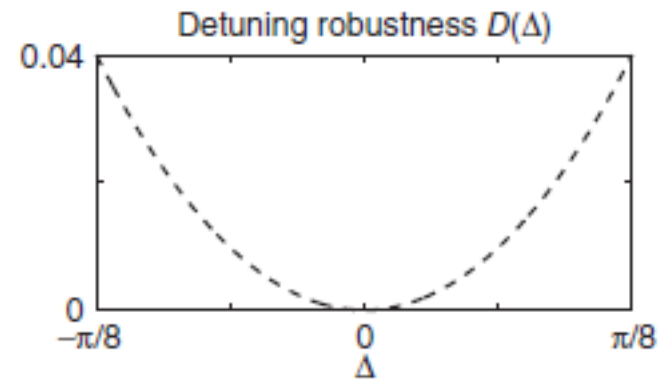
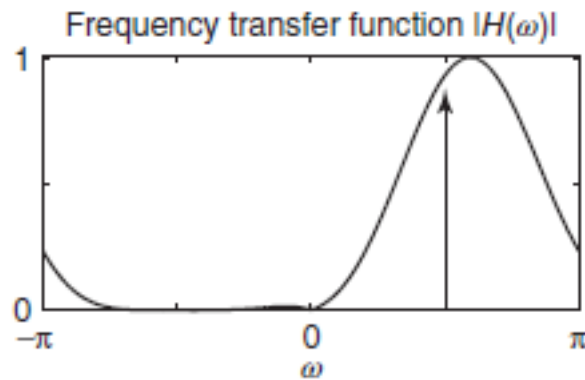
Figure 2.18 Amplitude of the detuning error (a) and frequency transfer function plot (b) of the Schwider-Hariharan five-step PSA.

Filtrage des harmoniques : exemple 7 images avec racine quintuple en $-\omega_0$

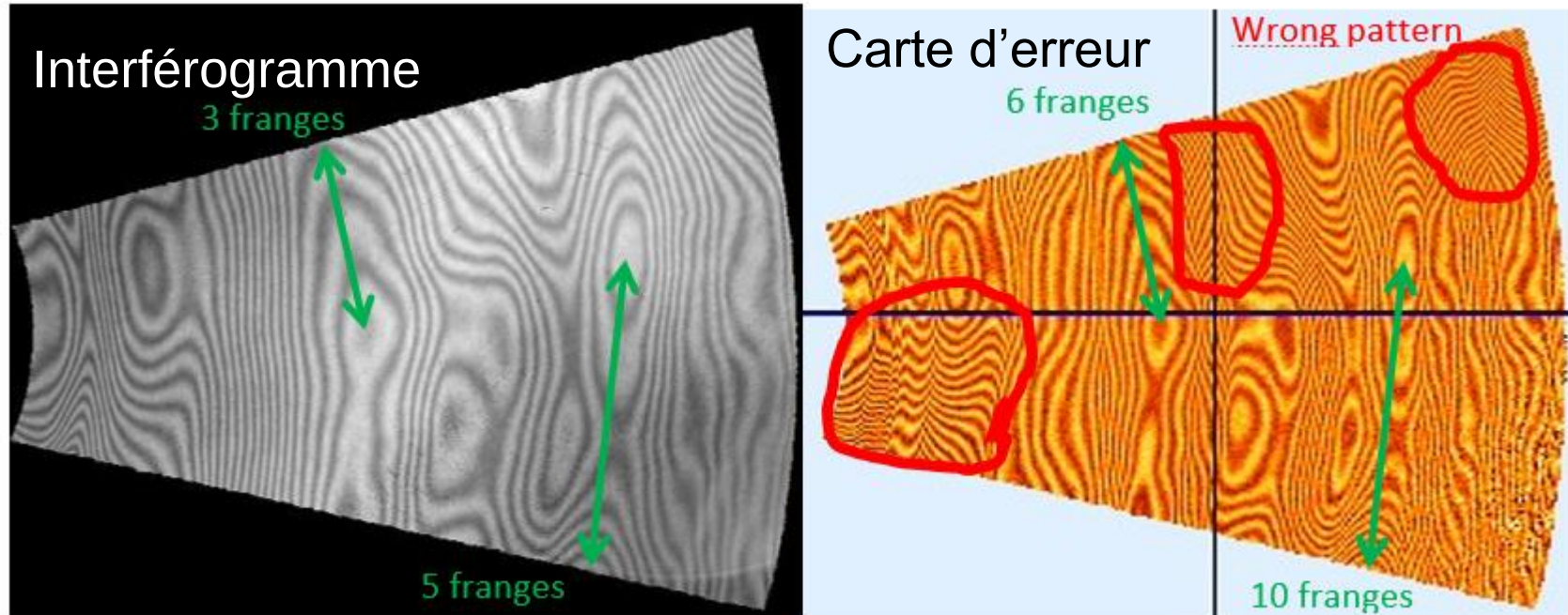
$$H(\omega) = \left[1 - \exp(i\omega)\right] \left[1 - \exp i(\omega + \omega_0)\right]^5,$$

$$A_0(x, y) \exp[i\hat{\varphi}(x, y)] = I_0 - (1 + i5)I_1 - (10 - i5)I_2 + 10(1 + i)I_3$$

$$+ (5 - i10)I_4 - (5 + i)I_5 - iI_6.$$



Detuning : exemple sur ELT M2



On observe sur les cartes d'erreur des mesures ELT M2 un pattern ayant un motif reproduisant le pattern de frange à une fréquence double. En appliquant différents algorithmes, il est possible de minimiser cette erreur.

Detuning : exemple sur ELT M2

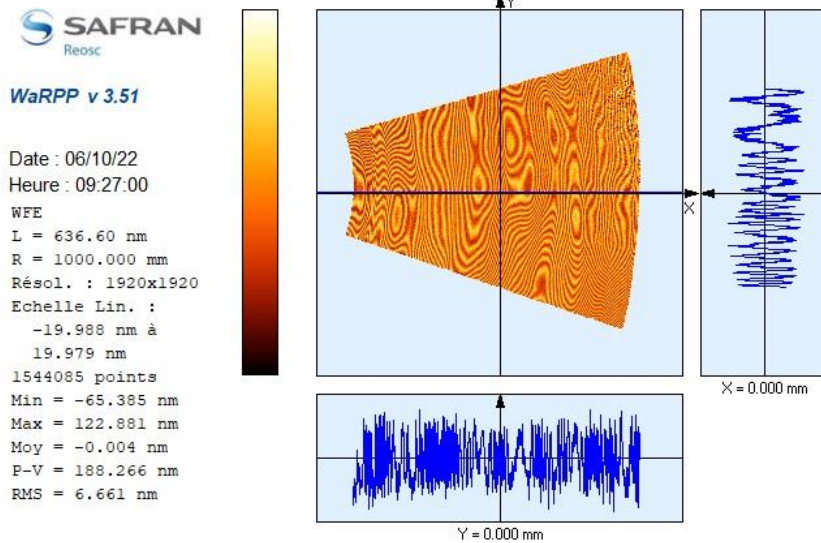
Algo 1 :

- $H(w) = (e^{-iw} - 1)^2 (e^{-iw} - e^{iw_0})^2 (e^{-iw} - e^{2iw_0})^2$
- 1 zéro en $-\omega_0$
- erreur = 6.7 nm rms

Algo 2 :

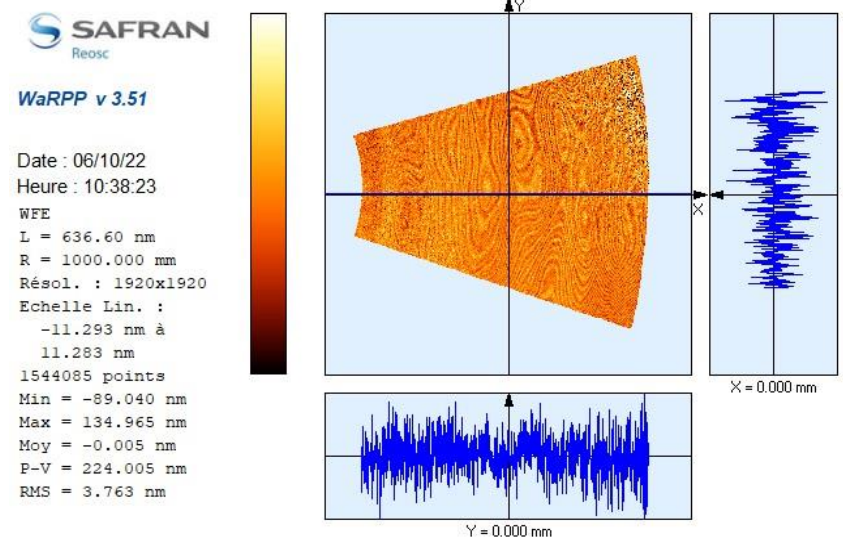
- $H(w) = (e^{-iw} - 1)(e^{-iw} - e^{iw_0})^5$
- 5 zéros en $-\omega_0$
- erreur = 3.7 nm rms

Erreur de phase



Algo 1

X = -0.4480 Y = 0.4839 R = 0.6594 (529,1424) Angle (°) = 132.8



Algo 2

Conclusions sur le detuning

On obtient un défaut à 2x la fréquence des franges, identique à celui que l'on observe en cas de vibration (même analyse)

Ce défaut peut être minimisé en minimisant $H(-\omega_0 - \Delta)$, ce qui est obtenu en choisissant une double racine du polynôme caractéristique en $-\omega_0$

$$H(\omega) = A(e^{-i\omega} - e^{i\omega_0})^2 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{N-2} (e^{-i\omega} - e^{-ik\omega_0})$$

Cela se fait au détriment du filtrage des harmoniques. A choisir en fonction de l'erreur dominante (detuning, harmonique, vibrations...)

Sensibilité au bruit

Pour calculer la sensibilité au bruit, on calcule la sensibilité de ϕ à une variation d'intensité dI_k :

$$\sum c_k I_{N-1-k} = \frac{b(r)}{2} \cdot H(\omega_0) e^{i\phi}$$

$$\frac{\partial \sum c_k I_{N-1-k}}{\partial I_{N-1-k}} = c_k = \frac{\partial \phi}{\partial I_{N-1-k}} \cdot i \cdot \frac{b(r)}{2} \cdot H(\omega_0) e^{i\phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial I_{N-1-k}} = \frac{-i \cdot c_k}{\sum c_k I_{N-1-k}}$$

ϕ étant réel, seule la partie réelle de la variation ci-dessus doit être considérée.

Soit $V\phi$, la variance de ϕ , et VI_k , les variances associées à I_k . On a :

$$V\phi = \sum \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \phi}{\partial I_k} \right)^2 \cdot V_{I_k}$$

Sensibilité au bruit

Sous certaines conditions sur le filtre, on peut montrer que parties réelle et imaginaire sont égales* et l'on a :

$$V_{\varphi} = \frac{1}{2} \sum \left| \frac{\partial \varphi}{\partial I_k} \right|^2 \cdot V_{I_k} = \frac{1}{2} \frac{\sum |c_{N-1-k}|^2 V_{I_k}}{|\sum c_k I_{N-1-k}|^2} = \frac{2 \sum |c_{N-1-k}|^2 V_{I_k}}{b^2 \cdot |H(\omega_0)|^2}$$

On en déduit l'écart type sur ϕ :

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sqrt{\sum |c_{N-1-k}|^2 V_{I_k}}}{\sqrt{2} |\sum c_k I_{N-1-k}|} = \frac{\sqrt{2 \sum |c_{N-1-k}|^2 V_{I_k}}}{b \cdot |H(\omega_0)|}$$

* Vrai notamment pour les filtres réguliers avec $c_k = e^{\frac{ik2\pi}{N}}$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ (Least Square PSA (LS-PSA))

Sensibilité au bruit d'obscurité

Cas bruit d'obscurité : $V_{Ik} = \sigma_I^2$, constant quelque soit k :

$$\sigma_\varphi = \frac{\sqrt{\sum |c_k|^2}}{\sqrt{2} |\sum c_k I_{N-1-k}|} \sigma_I = \frac{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(\omega)|^2 d\omega}}{|H(\omega_0)|} \cdot \frac{\sqrt{2} \sigma_I}{b} = \frac{\sqrt{\sum |c_k|^2}}{|H(\omega_0)|} \cdot \frac{\sqrt{2} \sigma_I}{b}$$

Le terme $G = \frac{\sqrt{\sum |c_k|^2}}{|H(\omega_0)|}$ ne dépend que du filtre H. C'est le terme en gain sur le bruit de l'algorithme de phase shift.

(l'inverse de G est le gain sur le rapport signal à bruit)

Sensibilité au bruit d'obscurité

Ex : algo N images avec $c_k = e^{\frac{ik2\pi}{N}}$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$:

$$H(\omega_0) = N, \sqrt{\sum |c_k|^2} = \sqrt{N}, G = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Nb}} \sigma_I = \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{1}{mI_0} \sigma_I$$

On retrouve le fait que lorsque l'on somme N images, le bruit décroît en $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Le bruit est par ailleurs inversement proportionnel au flux moyen reçu I_0 et au contraste m.

Algo 4 images :

$$(a_k) = (0, -1, 0, 1) \quad (b_k) = (1, 0, -1, 0)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = 4 \quad H(\omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot (-i)^k = 4i \Rightarrow G = \frac{1}{2}$$

Sensibilité au bruit de photon

Cas bruit de photon : $V I_k = I_k$, I_k = nombre de photons électrons reçus

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\frac{\sum |c_k|^2 I_{N-1-k}}{2 |\sum c_k I_{N-1-k}|^2}} = \frac{\sqrt{2 \sum |c_k|^2 I_{N-1-k}}}{b \cdot |H(\omega_0)|}$$

Cas algo LS-PSA N images :

$$H(\omega_0) = N, G = \frac{1}{N}, \sqrt{\sum |c_k|^2 I_{N-1-k}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum I_k} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \left(a + b \cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{N}\right) \right)} = \sqrt{\frac{a}{N}}$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sqrt{2Na}}{b \cdot N} = \sqrt{\frac{2}{N} \cdot \frac{1}{mI_0}} \sqrt{I_0}$$

On retrouve le même terme d'atténuation que pour le bruit d'obscurité, en considérant un bruit de photon moyen $= \sqrt{I_0}$. Le bruit de photon moyen étant $\gg$ au bruit d'obscurité, ce terme est le terme majoritaire.

Sensibilité au bruit de photon

Exemple algo 4 images :

$$(a_k) = (0, -1, 0, 1) \quad (b_k) = (1, 0, -1, 0)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 I_{N-1-k} = 4.a \quad H(\omega_0) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot (-i)^k = 4.i$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{b} = \frac{1}{m\sqrt{2I_0}}$$

Application : banc ELT M1

Sur le banc ELT M1, on utilise une caméra 4D fonctionnant en Polar Shift. La reconstruction se fait avec un algorithme 4 images :

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1}{m\sqrt{2I_0}}$$

Contraste $m \approx 1, I_0 \approx 10\,000$ *photons – électrons* :

$$\sigma_{\varphi} = 0.007 \text{ rad}$$

$$\sigma_{\delta} = \frac{\lambda}{2\pi} \sigma_{\varphi} = 0,7 \text{ nm}$$

Synthèse

Algorithme n images :

$$S(t) = I(t) * h(t)$$

Si H, filtre en quadrature ($H(0)=H(-\omega_0)=0$) :

$$S(0) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot I_k = H(\omega_0) \cdot A \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(S(N-1))}{\text{Re}(S(N-1))} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cdot I_{N-1-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot I_{N-1-k}} \right)$$

Synthèse

Filtrage des harmoniques :

$$H(\omega) = A \prod_{\substack{k=-1 \\ k \neq 1}}^{N-2} (e^{-i\omega} - e^{-ik\omega_0})$$

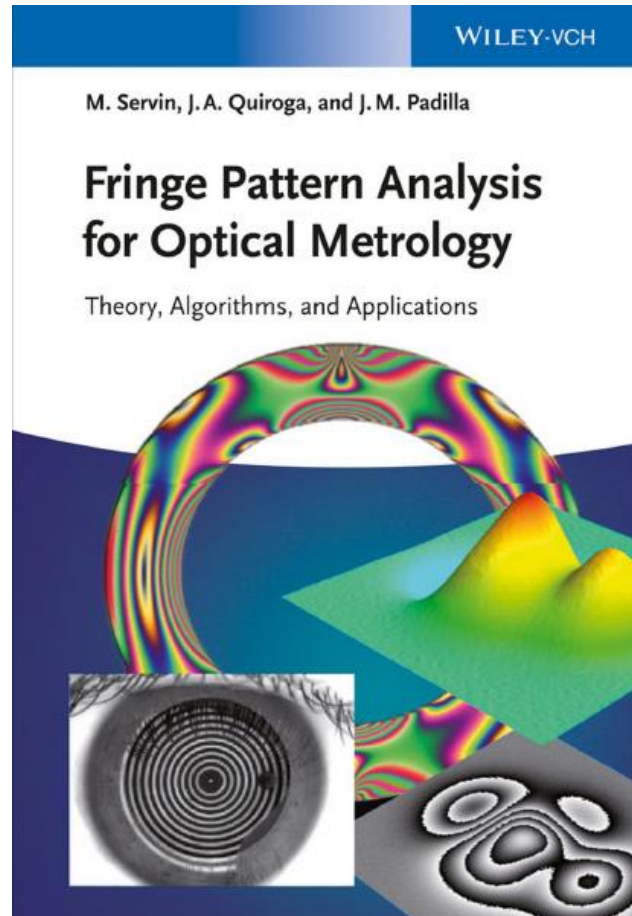
Detuning / résistance aux vibrations :

$$H(\omega) = A(e^{-i\omega} - e^{i\omega_0})^2 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{N-2} (e^{-i\omega} - e^{-ik\omega_0})$$

Résistance au bruit. Il faut minimiser G :

$$G = \frac{\sqrt{\sum |c_k|^2}}{\left| \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-ik\omega_0} \right|}$$

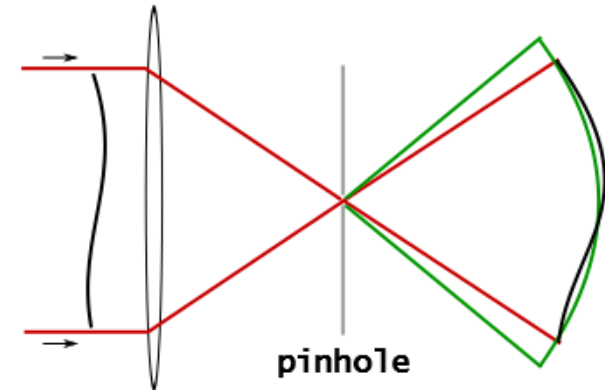
Bibliographie



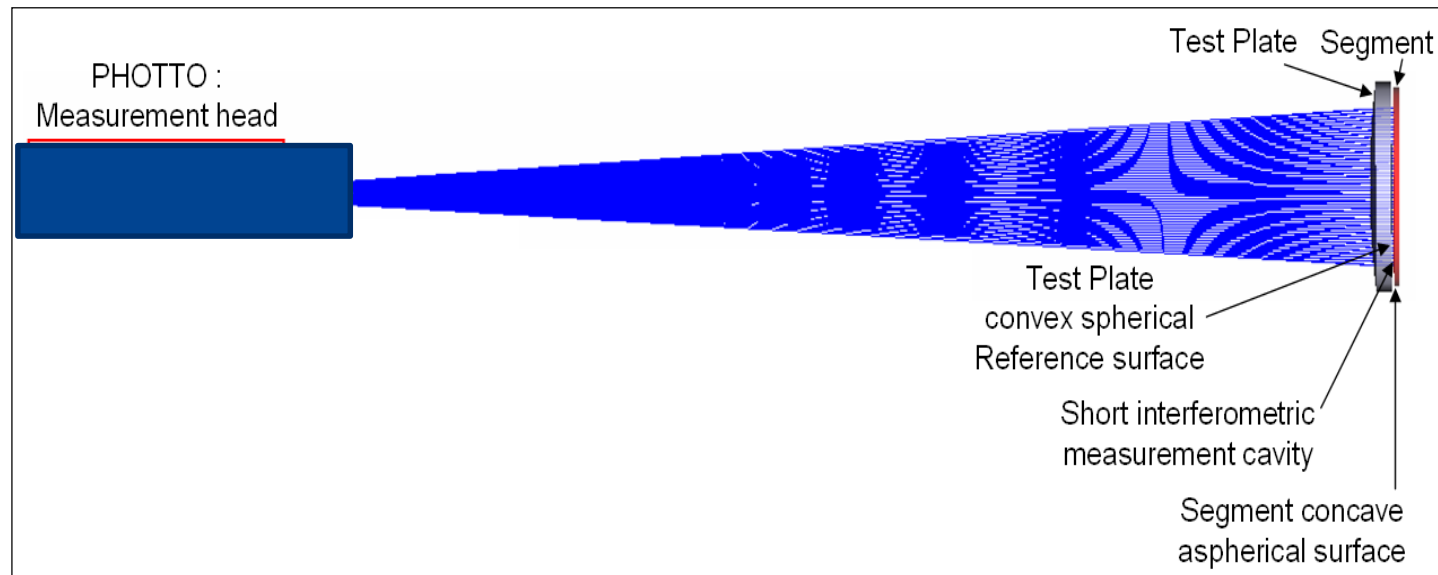
Quel banc interférométrique pour les segments ELT M1 ?

Alternatives :

- Shearing ou PDI



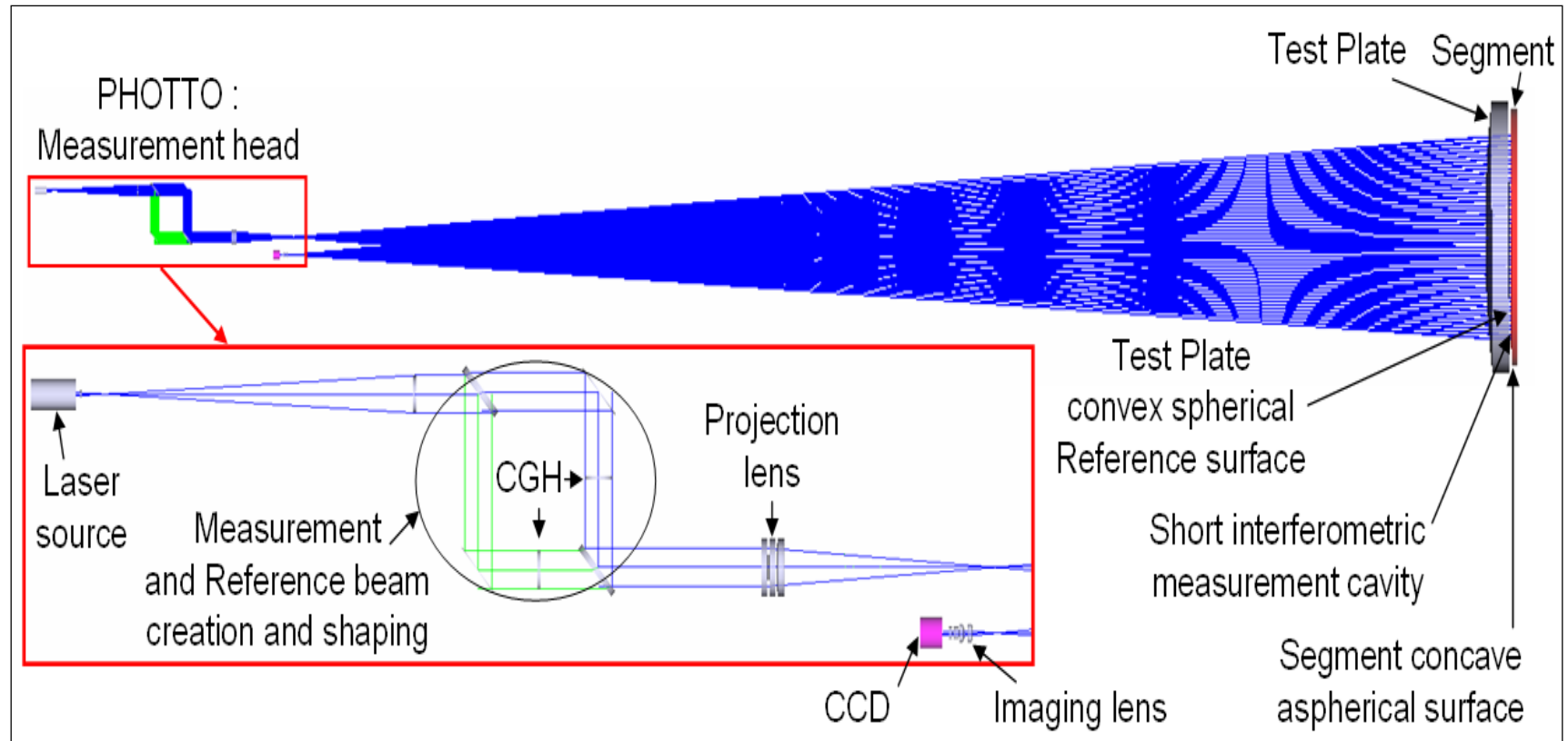
- Introduction d'un élément réduisant la cavité



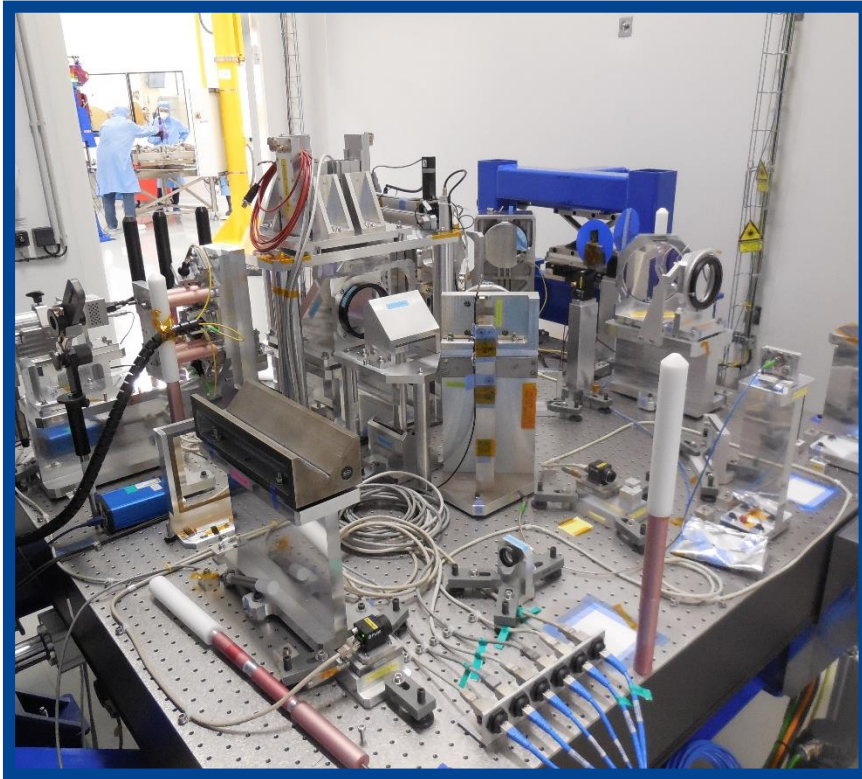
Solution retenue pour ELT M1

Banc à 2 voies séparées spatialement

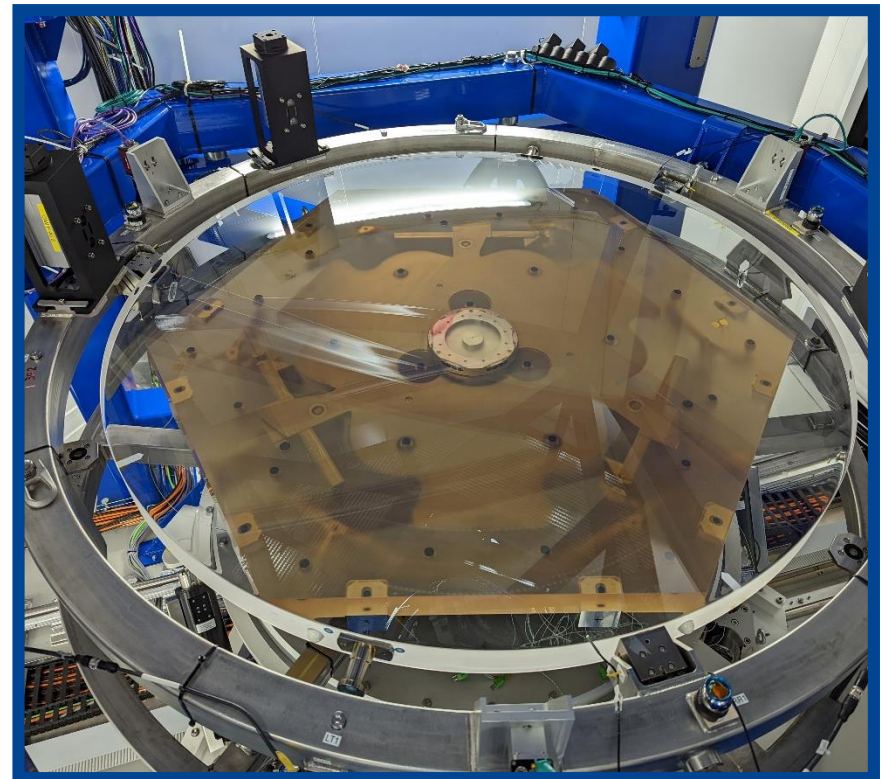
Cavité interférométrique : 20 mm



Banc ELT M1



Interféromètre (Photto)

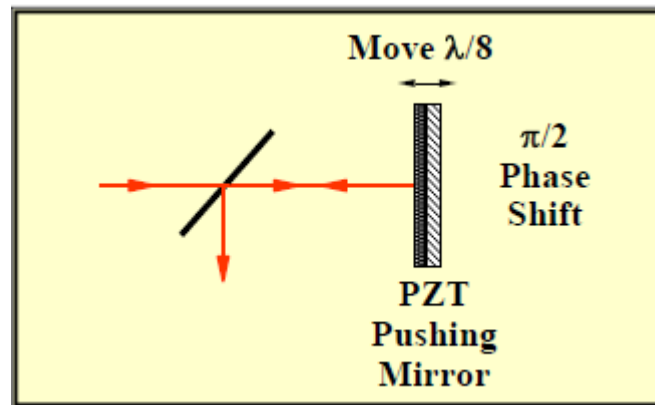


**Cavité interférométrique
(matrice + segment ELT)**

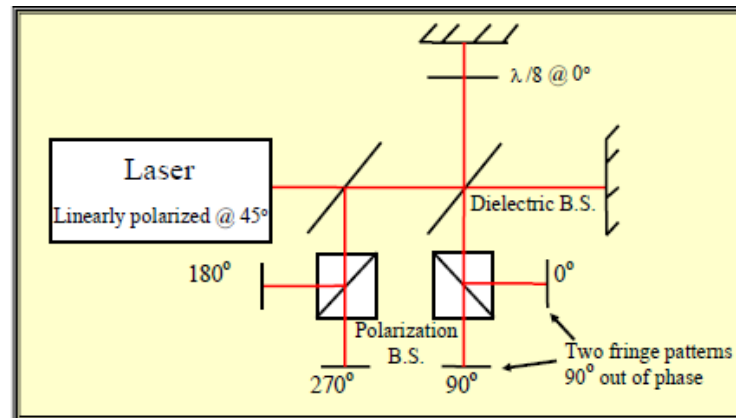
Choix du phase-shift

Trade-off : phase-shift temporel vs phase-shift instantané

Miroir mobile



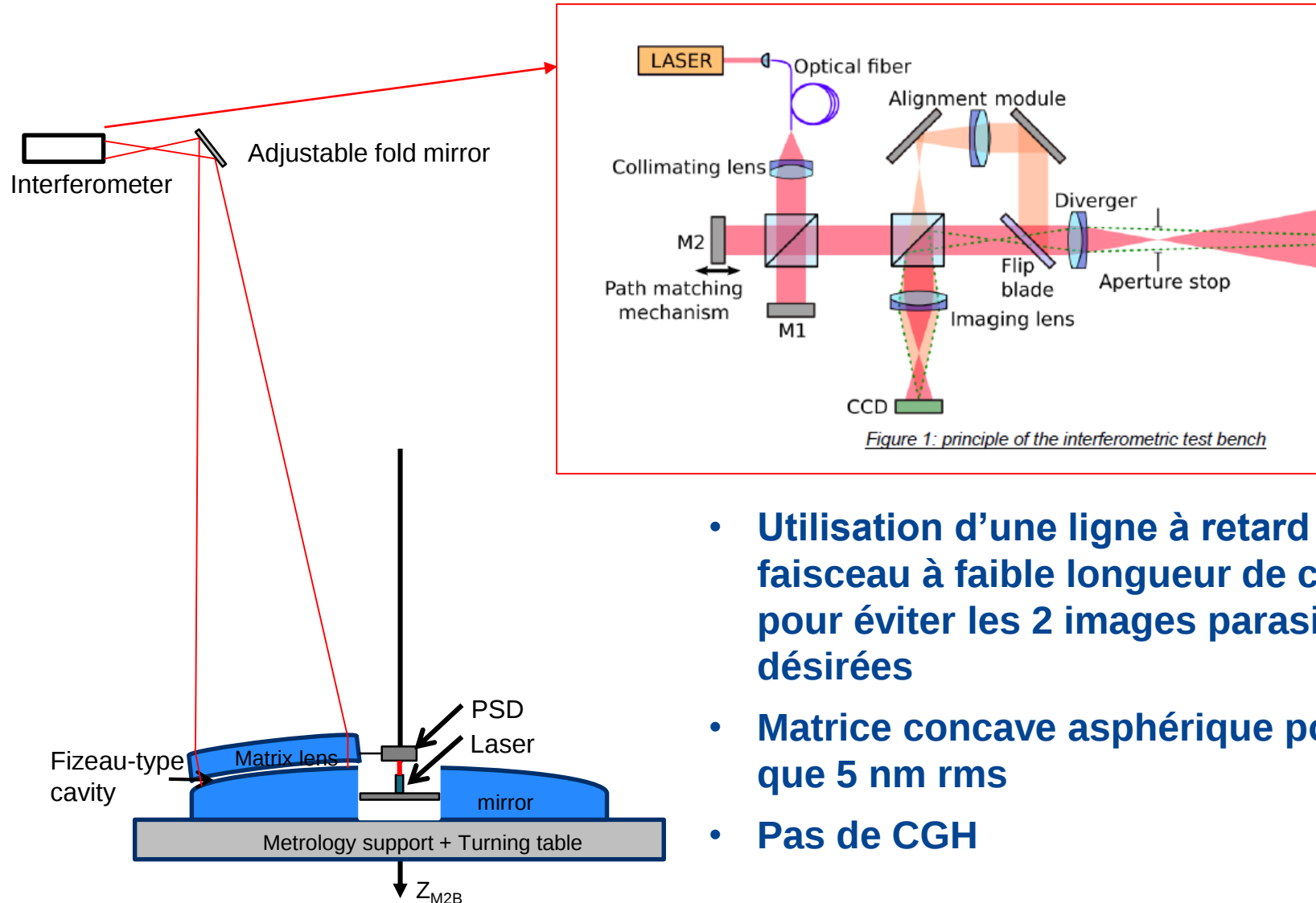
Polarshift



Pb PST : detuning dû notamment aux vibrations => calculs lourds et peu fiables

Pb Polarshift : pas de detuning mais sensible à la biréfringence des composants (matrice)

Solution alternative : banc ELT M2



- Utilisation d'une ligne à retard et d'un faisceau à faible longueur de cohérence pour éviter les 2 images parasites non désirées
- Matrice concave asphérique polie à mieux que 5 nm rms
- Pas de CGH

Différences ELT M1 / ELT M2

Nécessité d'utiliser des CGH sur ELT M1 pour coller aux 133 configurations différentes :

=> nécessite grande longueur de cohérence (voir prochain chapitre)

=> séparation spatiale nécessaire pour couper les ordres non voulus des CGHs => compatible avec séparation spatiale entre l'objet et l'image.

Utilisation de CGH permet de simplifier le design de la matrice : matrice ELT M1 sphérique vs matrice M2 asphérique