Programme

-
- **Cinématique du point matériel**
- Dynamique du point matériel et principe fondamental de la dynamique
- Energie

APPRENDRE
À DEVENIR
INGÉNIEUR

Cinématique

2.1 Introduction

2.2 Définitions

2.3 Vecteurs position, vitesse et accélération

- Rappels sur les dérivées

2.4 Mouvements particuliers et changement de repère

Introduction

Qu'est-ce que la **cinématique**?

Positions et dates $(x, y, z) = f(t)$

Description des mouvements des corps, sans se préoccuper de leurs causes

Autres données: vitesse, accélération

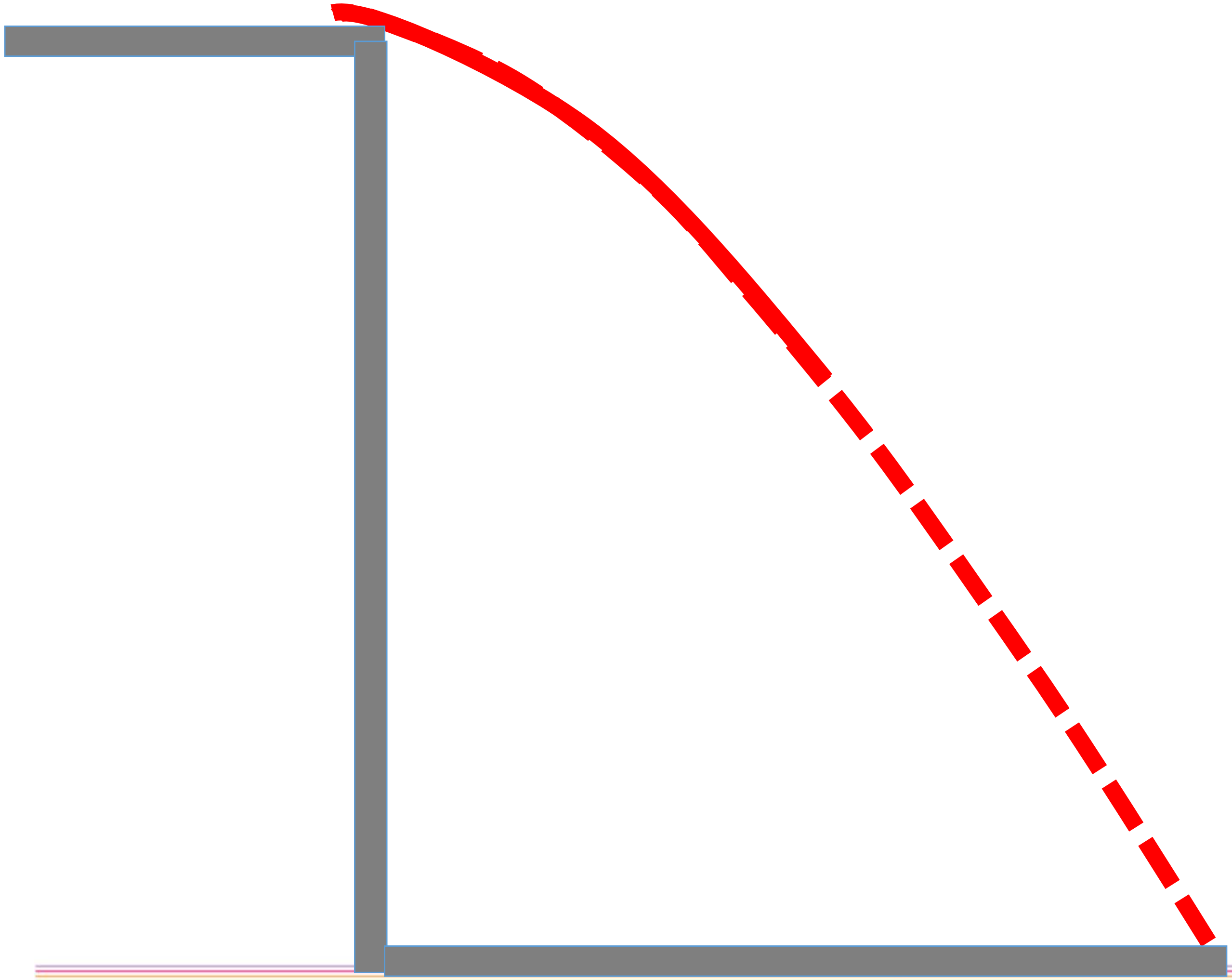
→ ***Prévision*** *de*

$$(x, y, z) = f(t)$$

Introduction

Connaissance de (x,y,z)(t) → v(t), a(t) → calcul direct par dérivations successives

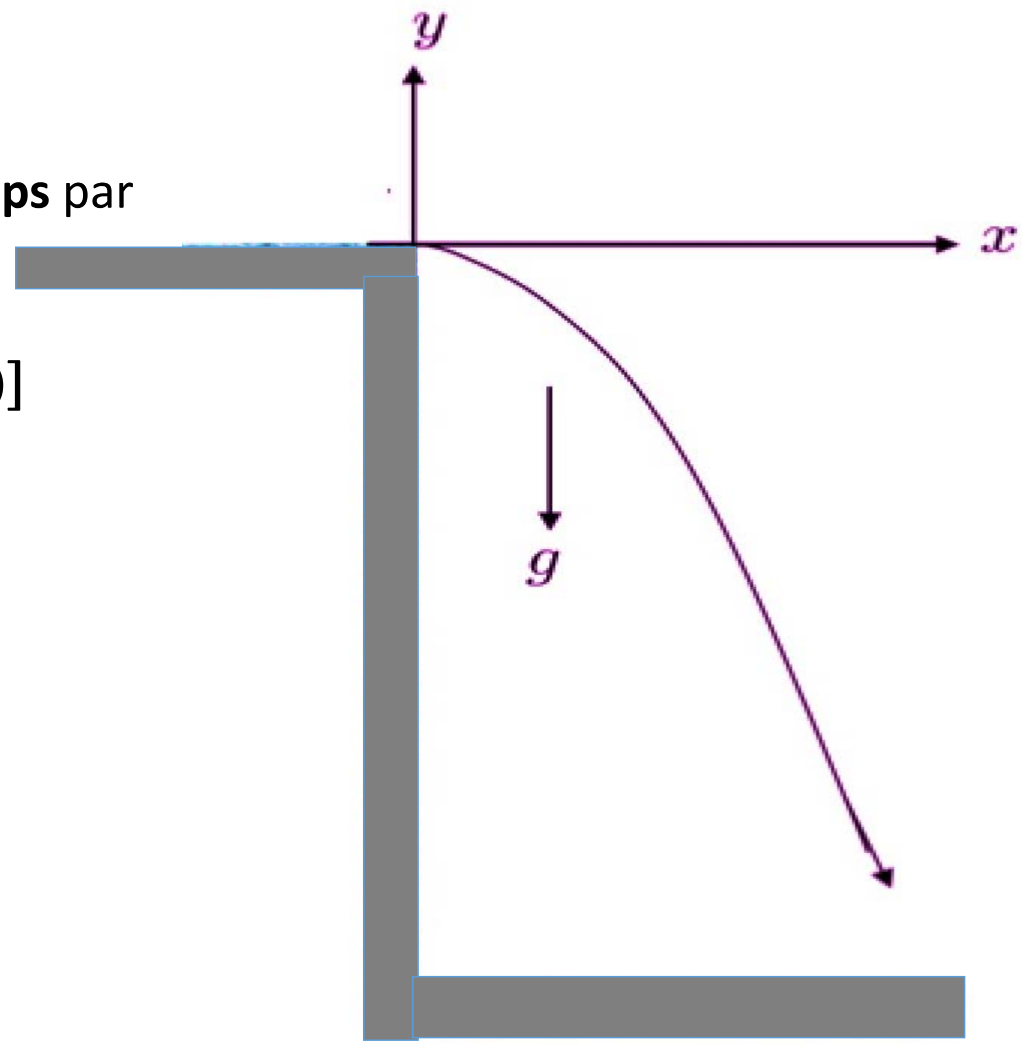
Connaissance de a(t), v(t) → x(t) → prévisions à partir des causes



Trajectoire

Trajectoire :
Ensemble des **positions** d'un point M occupées successivement dans le **temps** par le mobile:

→ Courbe représentant [x(t),y(t),z(t)]



Référentiel

La trajectoire: ensemble des **positions successives** du mobile

→ Positions : coordonnées **x,y,z** dans un **repère <u>fixe dans l'espace 3D</u>**
→ Successives: évolution du **temps**

- **On définit un référentiel R:**

  - repère spatial (Ox,Oy,Oz)

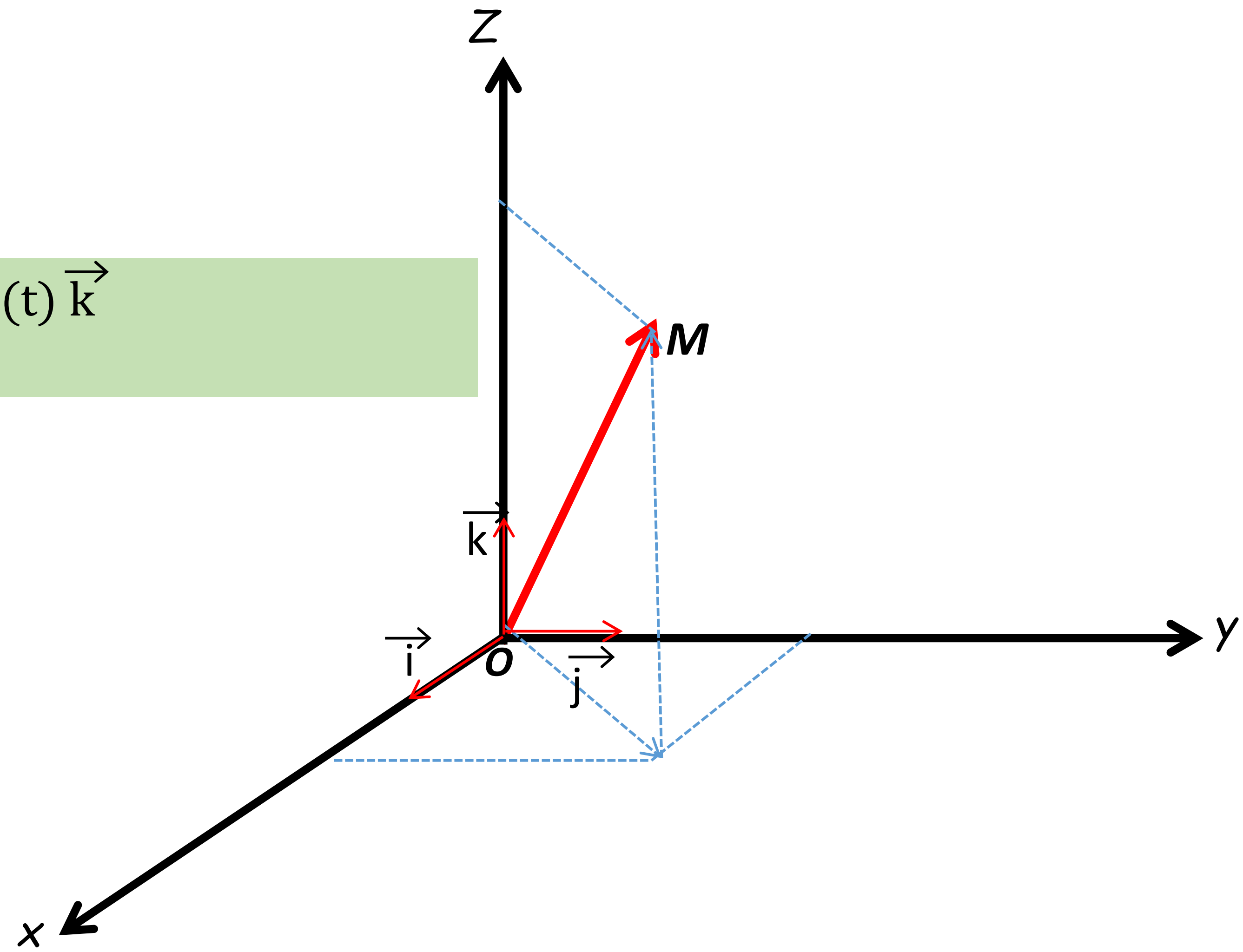
  - repère temporel: t

On prendra toujours un référentiel Galiléen:
t absolu – le même pour tous – en tous les points

Vecteur position

$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$

x, y, z coordonnées de M(t)

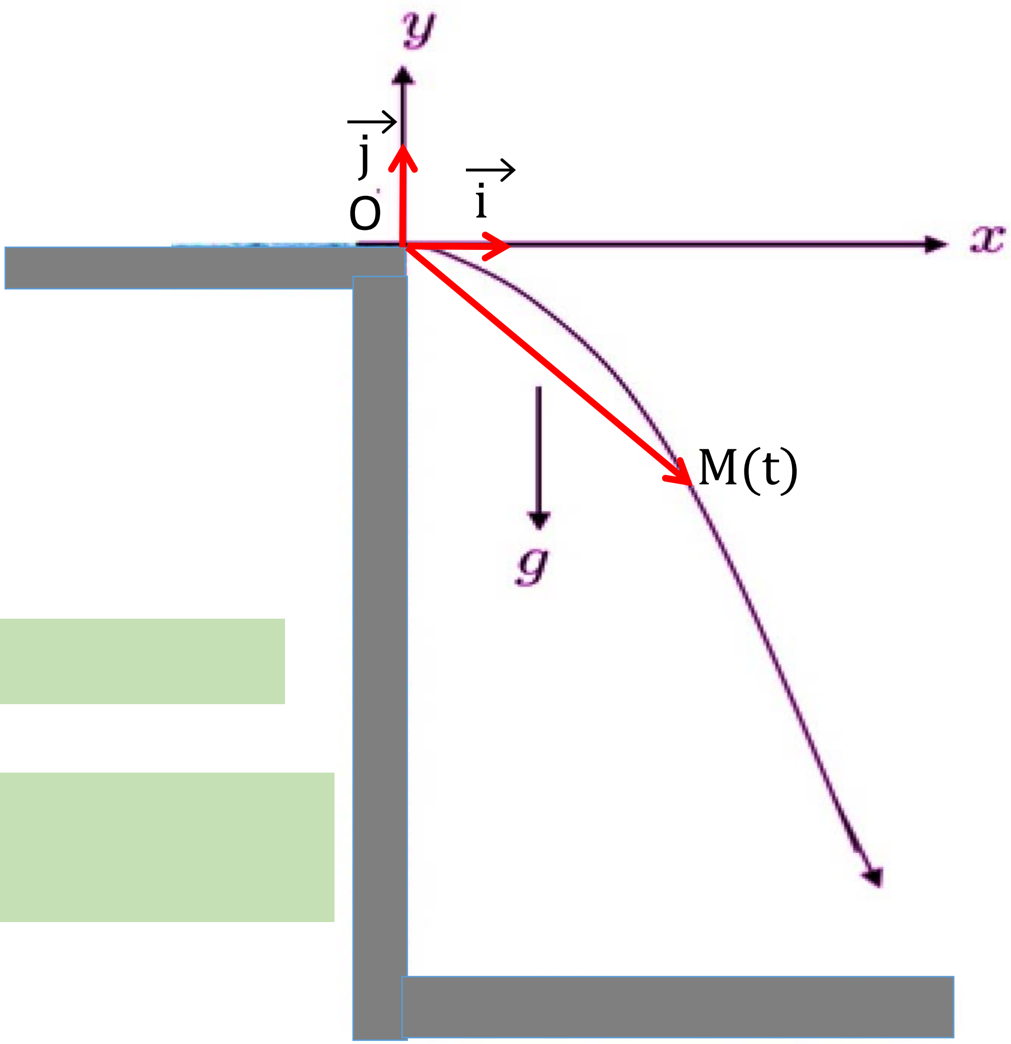


x(t), y(t), z(t) sont les **équations horaires** du mouvement

Mouvement dans un plan

Mouvement dans **un plan**:

x, y, coordonnées de M(t)



$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

M(t)

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

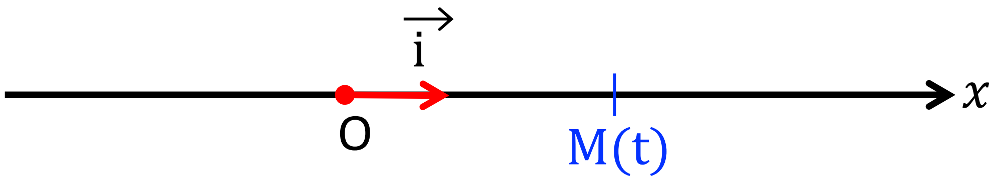
x(t), y(t) **2 équations horaires** du mouvement

Mouvement rectiligne

Mouvement **rectiligne**:

trajectoire = **droite** Ox

x, coordonnée de M(t)



M(t) : positions

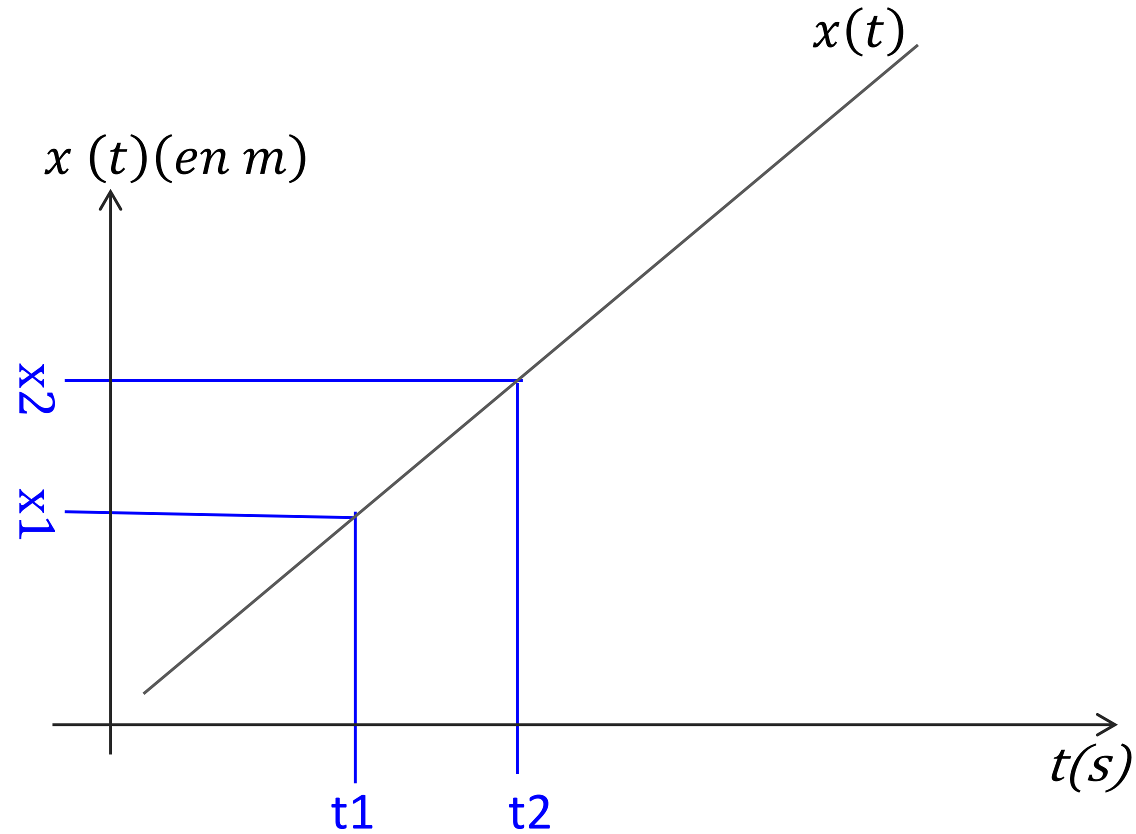
$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i}$ vecteur position

$\boldsymbol{x(t)}$ **équation horaire** du mouvement

Vecteur vitesse

On représente la *fonction*

$$x(t) = f(t)$$



La **vitesse** : distance $\boldsymbol{d}$ parcourue durant un intervalle de temps $t \quad Dt$:

$$V_m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$$

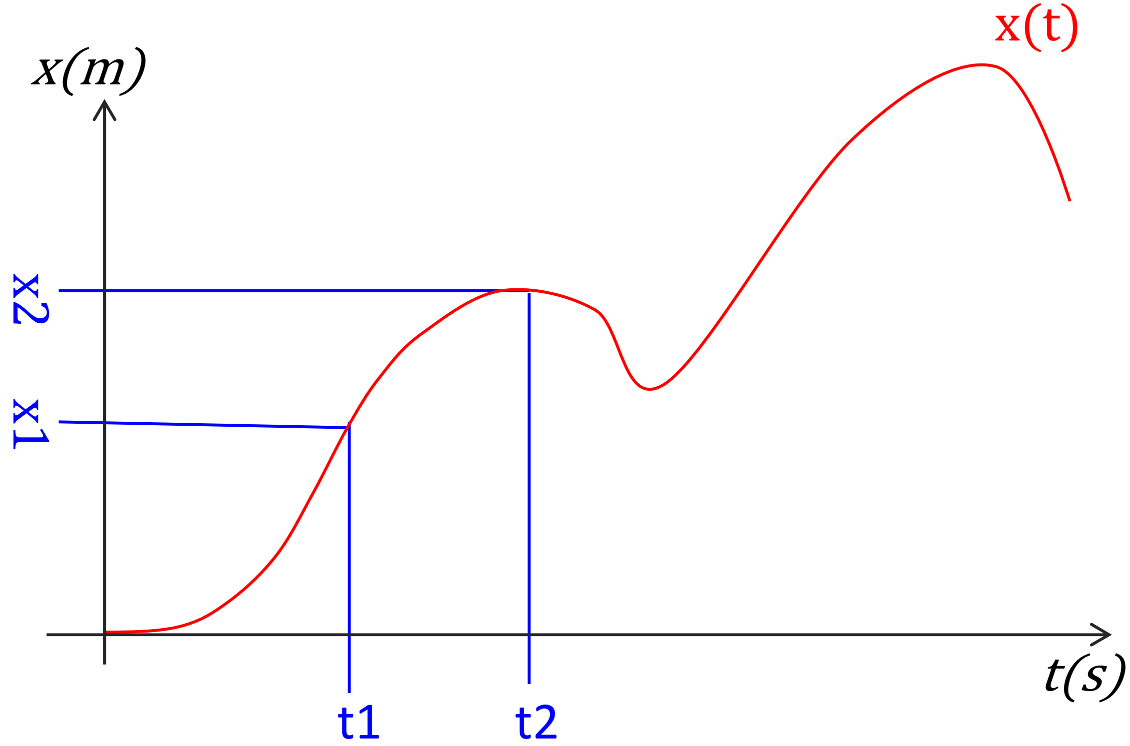
C'est la vitesse **moyenne** $\quad \boldsymbol{V_m} = <\boldsymbol{V}>$

On note: $(t_2 - t_1) = \Delta t$ et $(x_2 - x_1) = x(t + Dt) - x(t) = \Delta x$ ➔ $\boldsymbol{< V > = \Delta x/\Delta t}$

Vecteur vitesse

On représente la fonction

$x(t) = f(t)$



La **vitesse** : distance d parcourue durant un temps Δt :

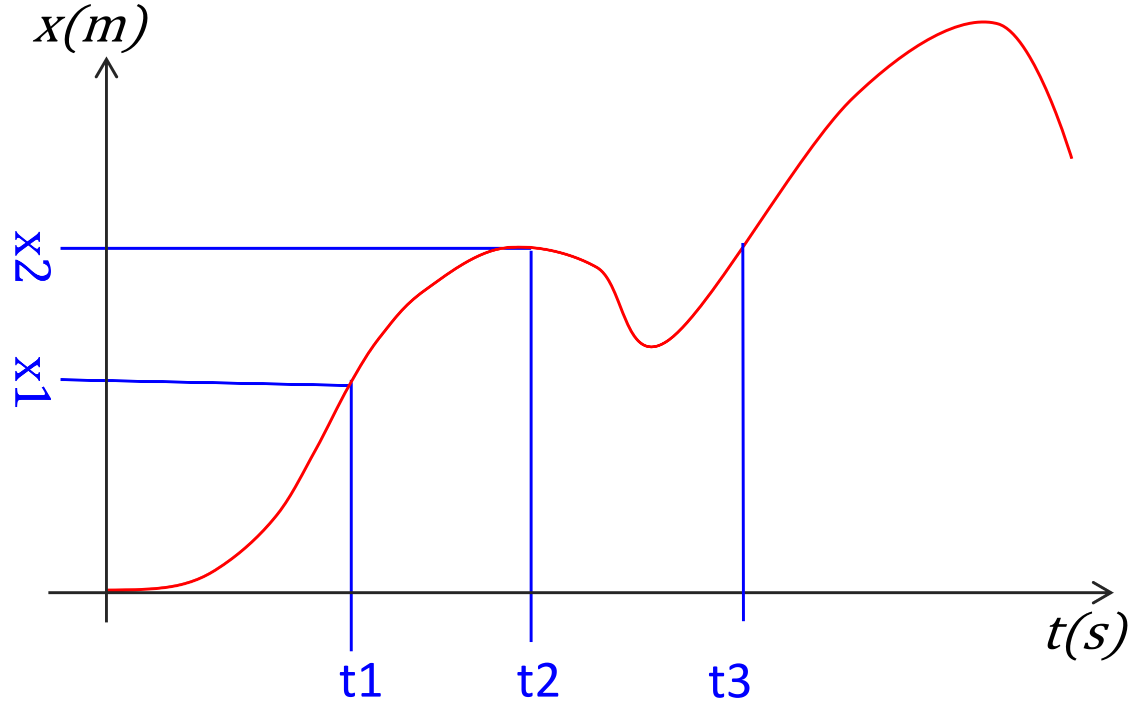
$$V_m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$$

C'est la vitesse **moyenne** **Vm = <V>**

On note: $(t_2 - t_1) = \Delta t$ et $(x_2 - x_1) = x(t+\Delta t) - x(t) = \Delta x$ ➔ $\langle V \rangle = \Delta x / \Delta t$

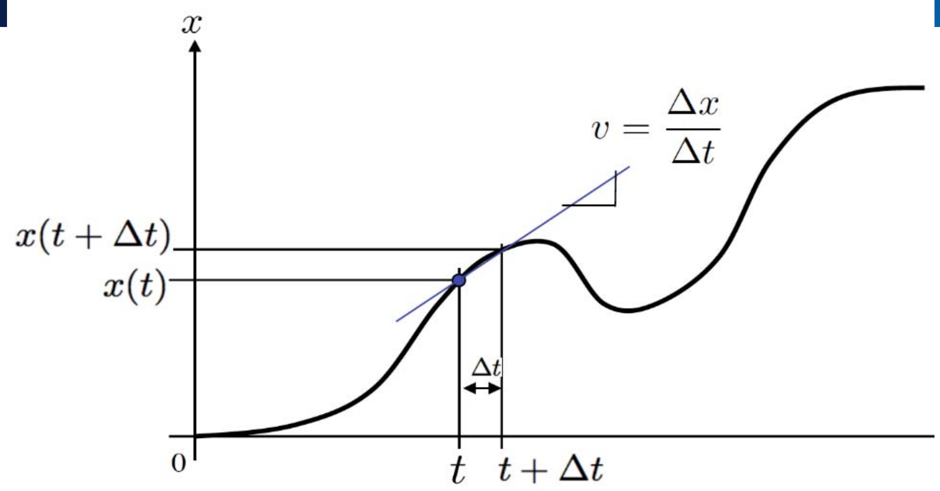
Vecteur vitesse

La vitesse **peut varier entre plusieurs Δt**



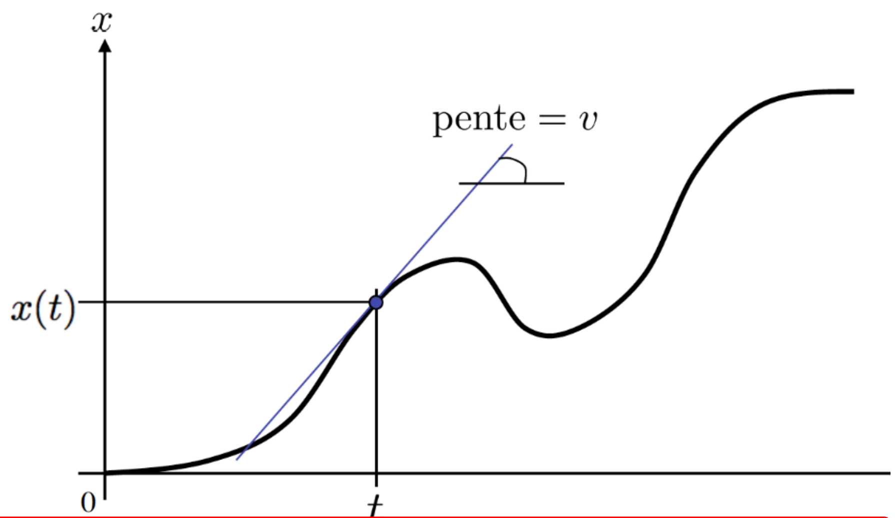
Vecteur vitesse

Pour avoir la vitesse à chaque **instant** t ?



On choisit t1 et t2 très proches

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t}$$



Δt très petit: dt

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)}$$

Vecteur vitesse

Chacun des composantes sera ainsi calculée

$$\overrightarrow{V}(t) = dx(t)/dt\ \overrightarrow{i} + dy(t)/dt\ \overrightarrow{j} \qquad dx/dt,\ \ dy/dt\ \text{composantes de}\ \overrightarrow{V(t)}$$

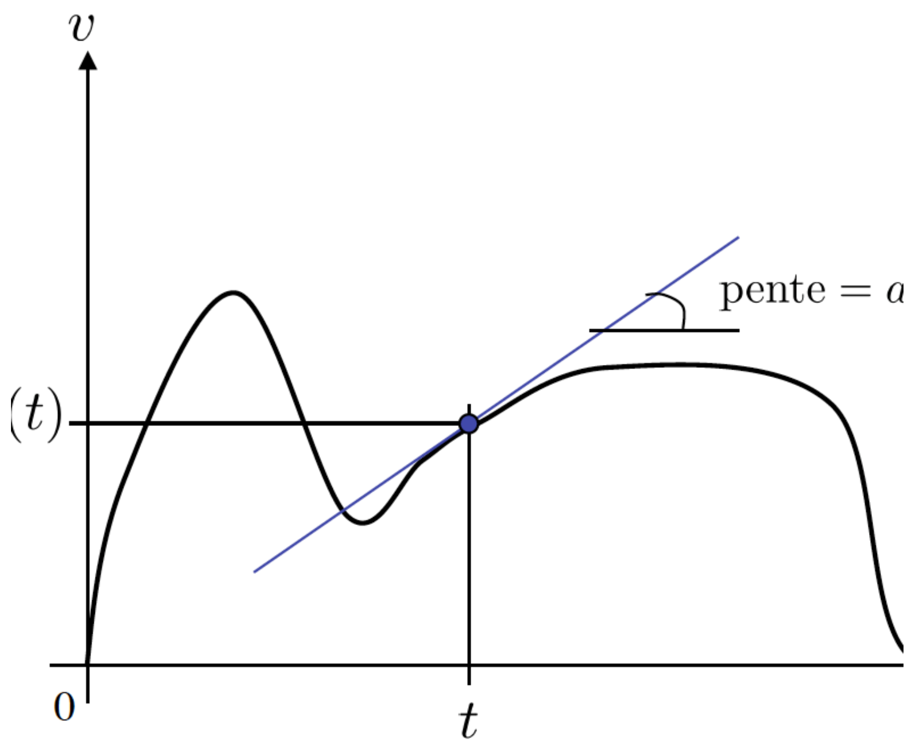
La norme de $\overrightarrow{V(t)}$???

Vecteur accélération

Accélération = changement de vitesse

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$



$\vec{a}(t) = dv_x(t)/dt\ \vec{i} + dv_y(t)/dt\ \vec{j}$ $\quad dv_x/dt,\ \ dv_y/dt$ composantes de $\vec{a}(t)$

La norme de a(t) ???

Rappel sur les dérivées

Functions	Dérivées
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$x = c \qquad \frac{dx}{dt} = 0$$

$$x = t^c \qquad \frac{dx}{dt} = c\,t^{c-1}$$

$$x = c\,u \qquad \frac{dx}{dt} = c \cdot \frac{du}{dt}$$

$$x = u + v \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

Rappel sur les dérivées

$$x = e^u \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot e^u$$

$$x = \ln u \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{u}$$

$$x = \sin u \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \cos u$$

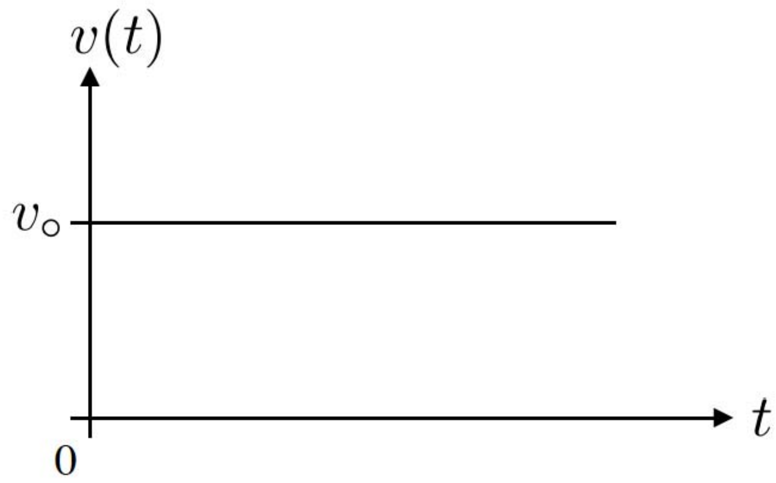
$$x = \cos u \qquad \frac{dx}{dt} = -\frac{du}{dt} \cdot \sin u$$

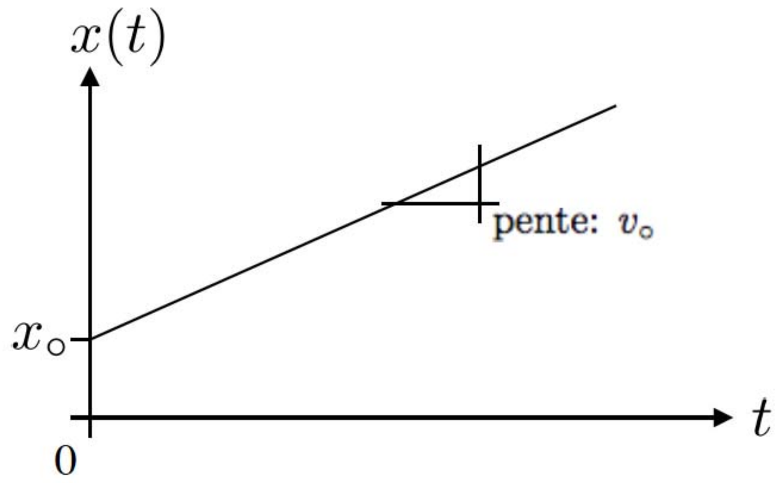
$$x = f(u) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$(c = \text{constante})$$

Mouvement rectiligne uniforme

- *Rectiligne: en ligne droite*
- *Uniforme: vitesse constante*

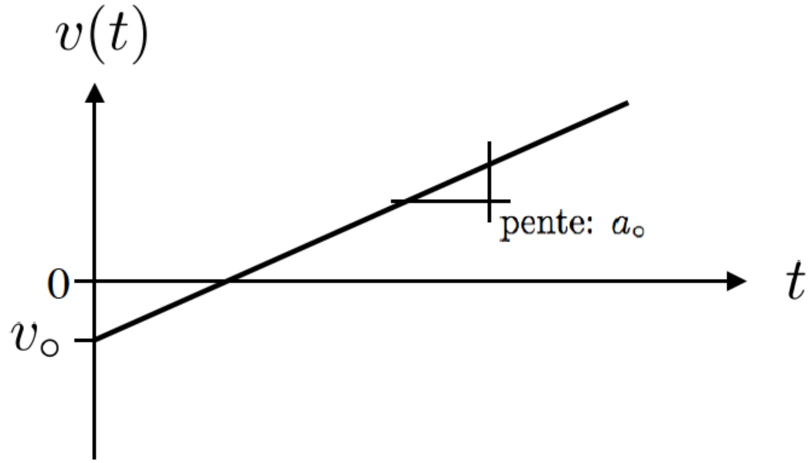


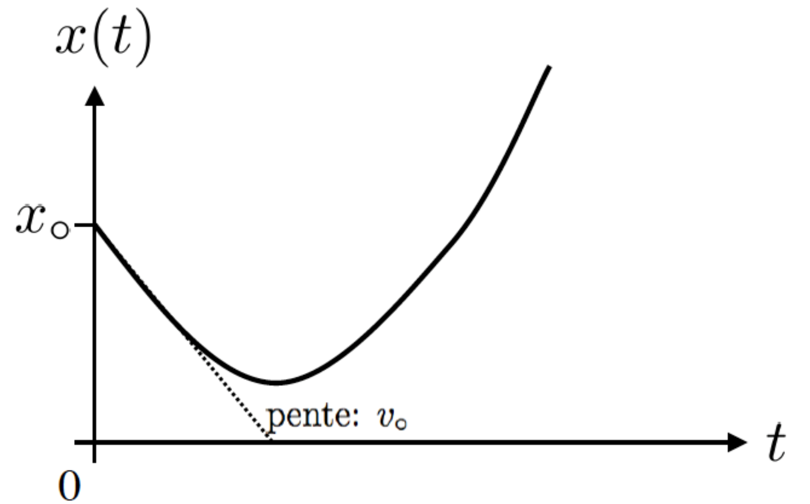


APPRENDRE
À DEVENIR
INGÉNIEUR

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

- *Rectiligne: en ligne droite*
- *Uniformément accéléré: accélération constante*

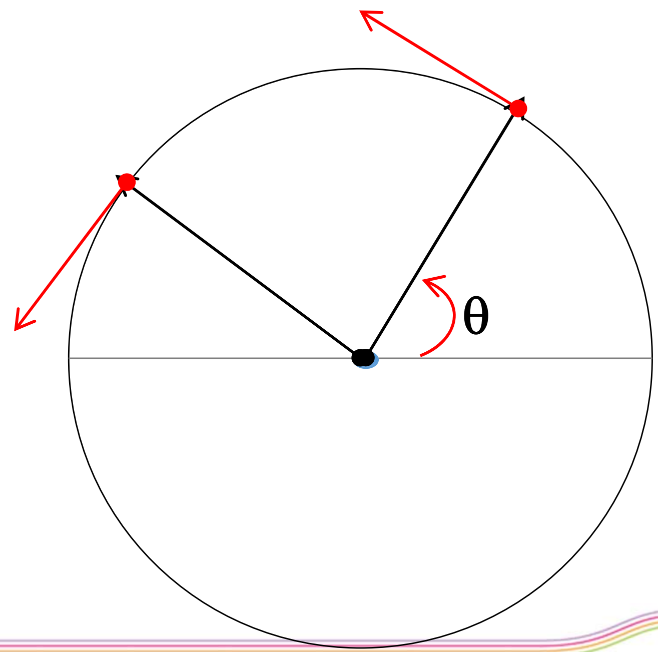




Mouvement circulaire uniforme

Circulaire Uniforme

- *Circulaire: sur un cercle (R)*
- *Vitesse* *angulaire* *constante* ($\omega = d\theta/dt$)



Changement de référentiel

Description d'un mouvement peut être différente selon le choix du référentiel

Ex: Mouvement d'un cycliste et d'un caillou sur une roue de vélo

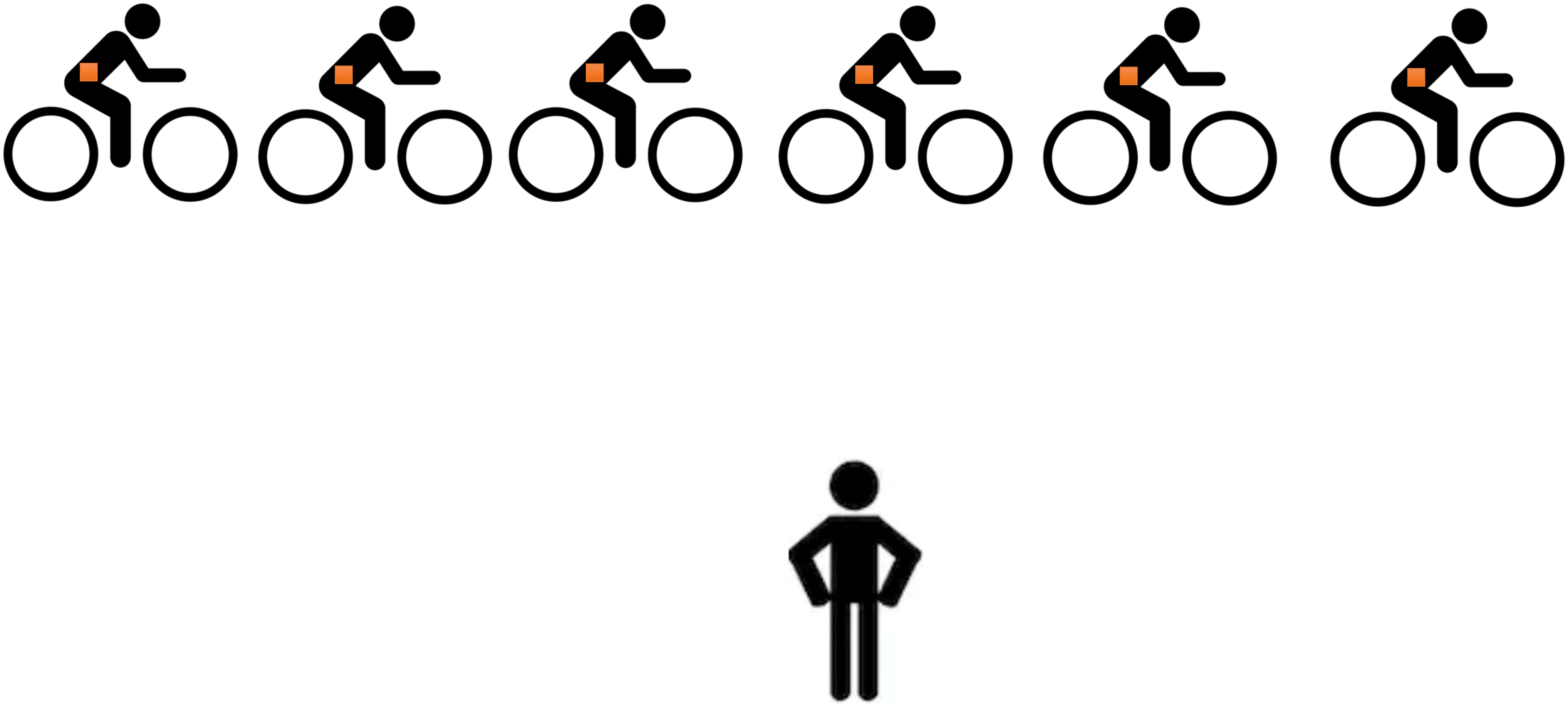
- Vu par un observateur au bord de la chaussée

- Ou vu par le cycliste

Changement de référentiel

Mouvement du cycliste

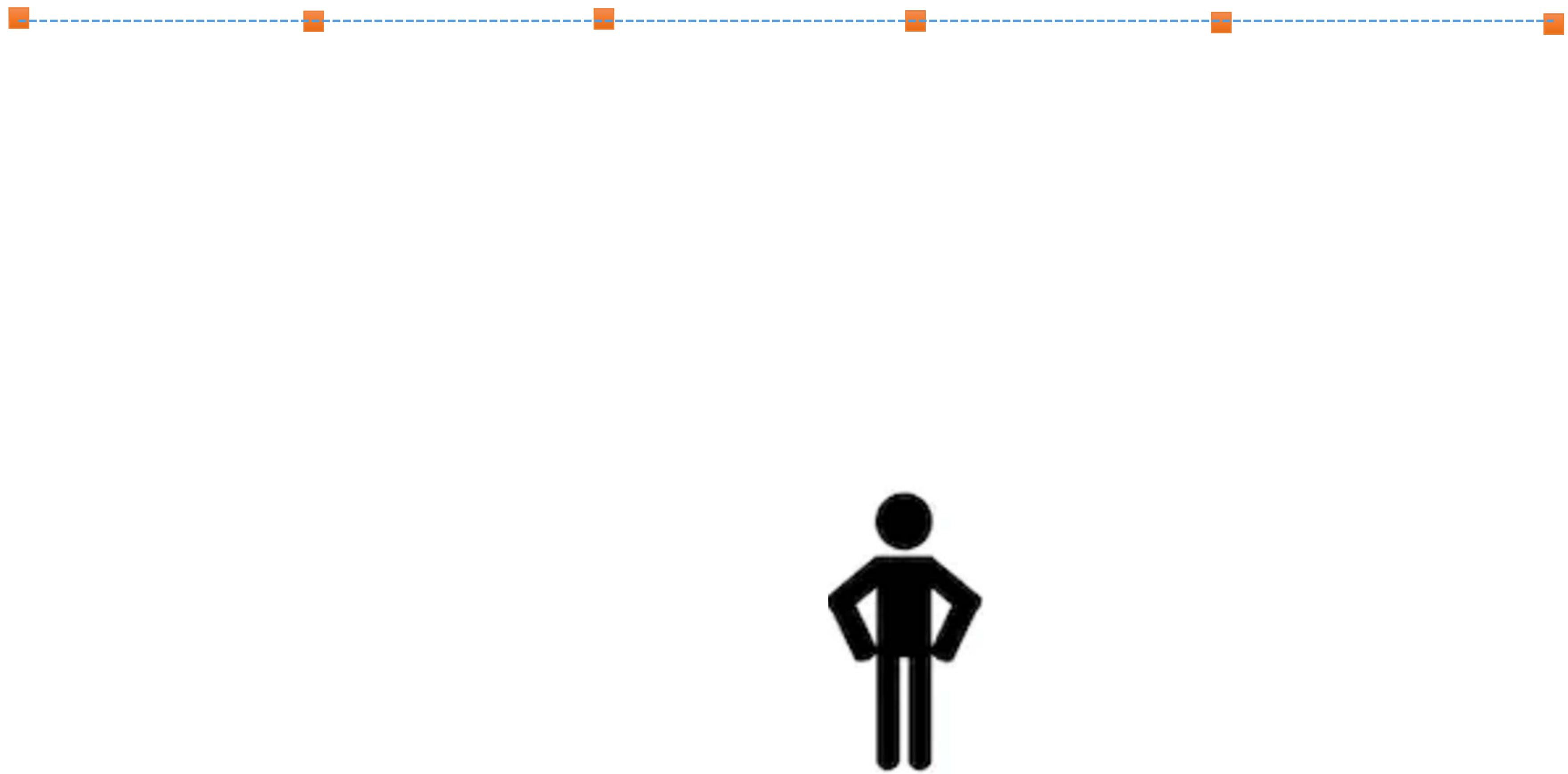
Vu par un observateur au bord de la chaussée



Changement de référentiel

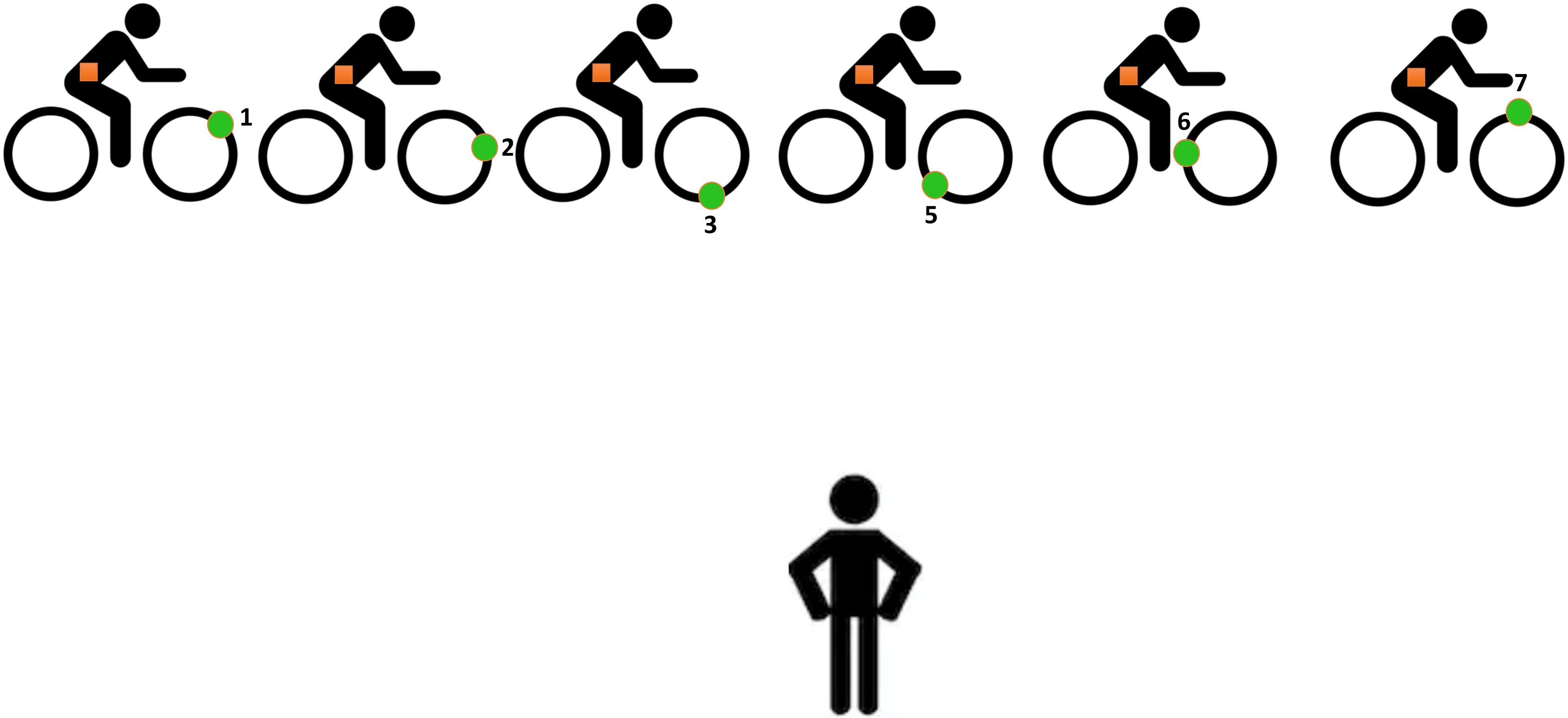
Trajectoire du cycliste

Vue par un observateur au bord de la chaussée



Mouvement du **Caillou**

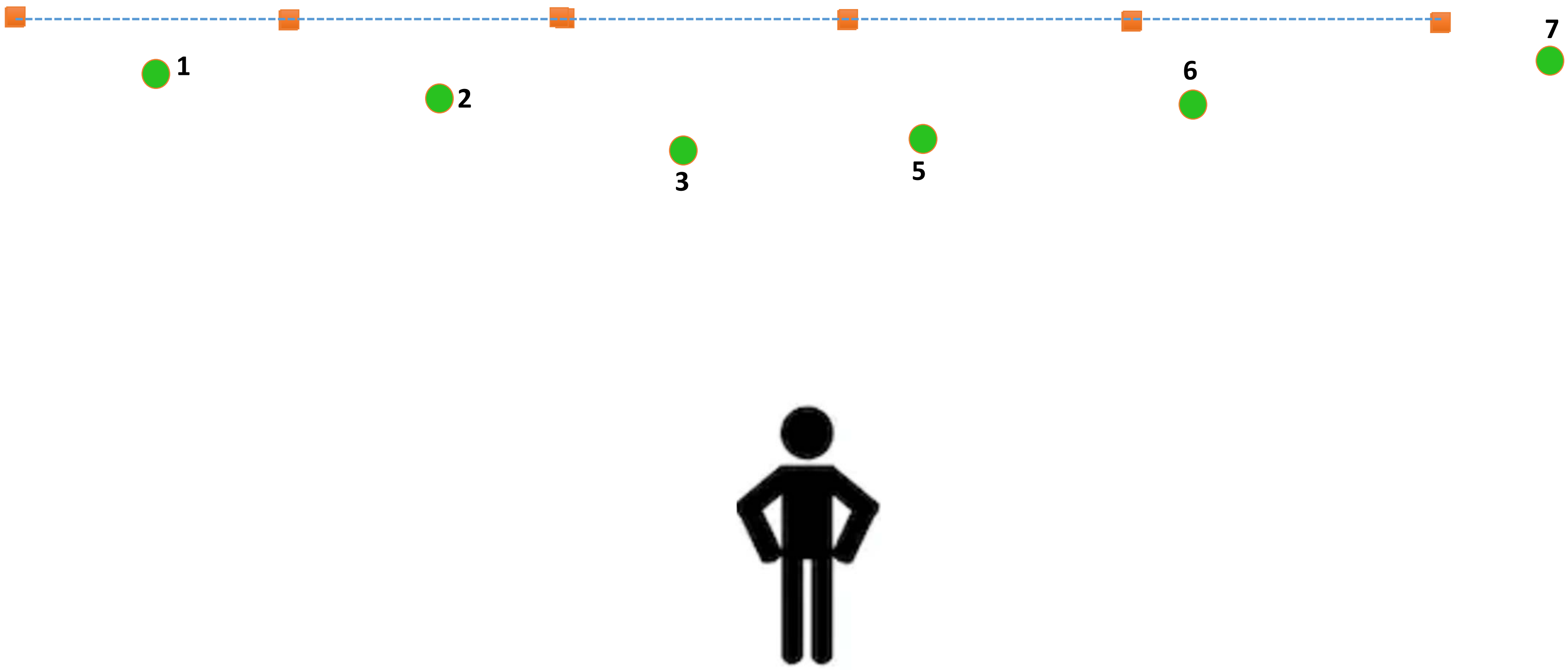
Vu par un observateur au bord de la chaussée



Changement de référentiel

Trajectoire du **Caillou**

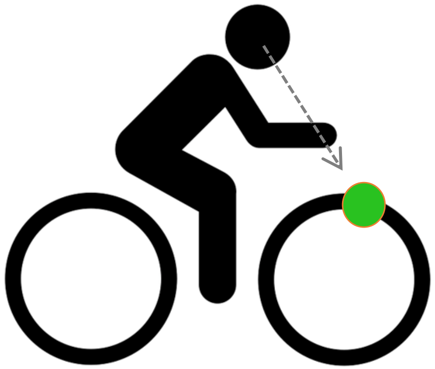
Vu par un observateur au bord de la chaussée

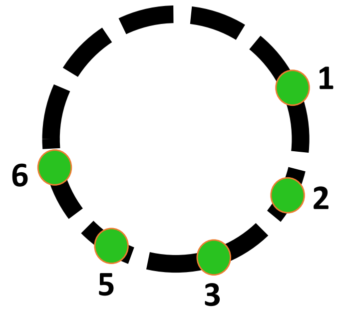


Changement de référentiel

Mouvement du **Caillou**

Vu par un le cycliste depuis son vélo





La description du mouvement est plus facile si on **décompose** en deux:

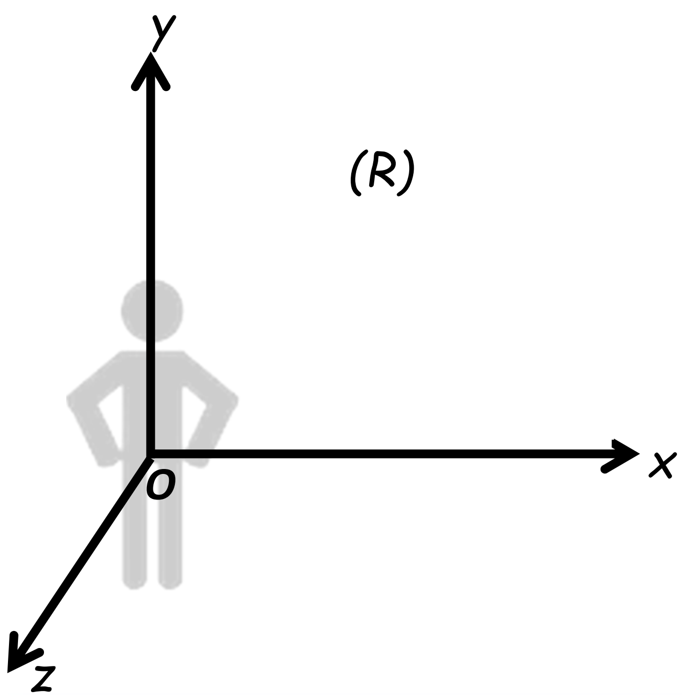
- **le mouvement du vélo par rapport à la chaussée – fixe**
- **le mouvement du caillou par rapport au vélo**

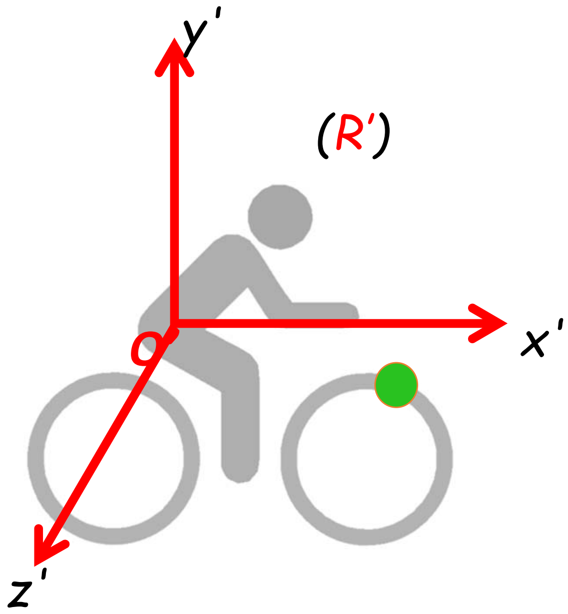
Changement de référentiel

On définit deux référentiels:

- **Référentiel « fixe » lié à la chaussée:** ***Oxy*** ***(R)***

- **Référentiel « mobile » lié au vélo:** ***Ox'y*** ***(R')***





Le référentiel ***(R')*** est en mouvement relatif par rapport au référentiel ***(R)***

Mouvement uniforme complément

Mouvement Uniforme $\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t} = 0.$

Mais $\overrightarrow{V}$ n'est pas forcément constant !!! La direction peut varier (voiture). Comment est alors l'accélération ?

Rappel $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}.$

Si $\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t} = 0.$ alors $\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|^2}{\mathrm{d}t} = 0.$

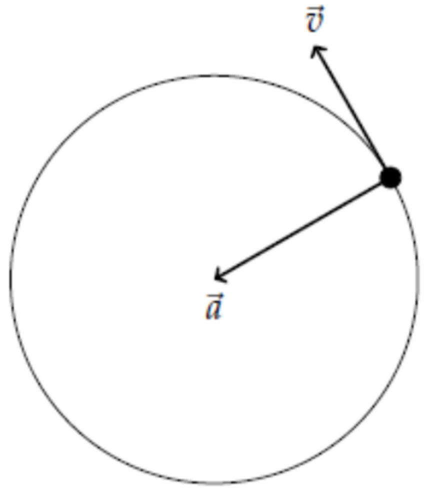
On a donc $\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$

Et comme $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, cela revient à $\frac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|^2}{\mathrm{d}t} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}. = 0$

La vitesse et l'accélération sont orthogonales

Mouvement circulaire uniforme complément

Circulaire Uniforme



Rectiligne uniforme $\vec{a}=0$

Fin de la cinématique

À SAVOIR:

- **Exprimer position, vitesse, accélération**
- **Savoir calculer une trajectoire**
- **Jongler avec les vecteurs et les dérivées.**

Programme

-

- **Dynamique du point matériel et principe fondamental de la dynamique**

- Energie