

A. KELLER

C. FALVO – R. PARENTANI – C. TEXIER

Y. BERNARD

MÉCANIQUE I  
*NOTES DE COURS*

VERSION POLYTECH

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY



## *Table des matières*

<i>1</i>	<i>Introduction</i>	5
<i>2</i>	<i>Cinématique</i>	15
<i>3</i>	<i>Dynamique</i>	29
<i>4</i>	<i>Energie</i>	53
<i>A</i>	<i>Trigonométrie</i>	77
<i>B</i>	<i>Vecteurs</i>	83
<i>C</i>	<i>Etude de fonctions d'une variable réelle</i>	89
<i>D</i>	<i>Intégration des fonctions</i>	113



# 1

## Introduction

LA MÉCANIQUE dite *classique* est la théorie physique qui traite du mouvement des objets macroscopiques qui se déplacent à des vitesses faibles par rapport à la vitesse de la lumière. Comme toute théorie physique, elle repose sur un formalisme mathématique qui lui permet d'analyser les causes du mouvement des corps et de prédire leur évolution future.

### 1.1 La place de la mécanique newtonienne parmi les théories physiques fondamentales

La mécanique est la première théorie du mouvement, et même la première théorie de physique fondamentale. C'est à la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle qu'est née la *mécanique newtonienne*, ou *mécanique classique* à l'issue des travaux d'Isaac Newton publiés en 1687 dans son ouvrage *Philosophiæ naturalis principia mathematica* : Principes mathématiques de la philosophie naturelle. La mécanique classique a pu être formulée grâce au développement en Mathématiques du calcul différentiel par notamment Leibniz et Newton.<sup>1</sup> La mécanique classique a été construite à partir de l'analyse d'expériences ou d'observations sur le mouvement des corps matériels à échelle humaine et le mouvement des planètes. Elle résulte de nombreux travaux de philosophes et mathématiciens qui ont précédé Newton depuis l'antiquité, notamment Aristote et Archimède, à la renaissance, notamment Galilée et Kepler. Grâce à l'introduction de la loi de la gravitation universelle, la théorie de Newton a permis d'unifier deux branches jusque-là séparée de la physique : celle dédiée à l'étude de la chute des corps (étudiée notamment par Galilée) et celle dédiée à l'étude du mouvement des corps célestes (étudiée notamment par Kepler).

La mécanique classique se base sur un petit nombre de postulats (« axiomes ») à partir de concepts cinématiques (position, vitesse, accélération,...) et dynamiques (forces, énergie,...). Bien qu'elle ait eu des succès remarquables, qui ont probablement culminé avec la description

1. La plupart des théories physiques ont pu être formulées grâce au développement d'un nouveau formalisme mathématique. C'est le cas notamment de la Relativité Générale d'Einstein qui repose sur la géométrie différentielle.

extrêmement précise du mouvement des planètes du système solaire au XIX<sup>ème</sup> siècle, les progrès techniques, qui ont permis d'améliorer la précision des mesures et d'explorer les lois physiques à de nouvelles échelles, ont mis à jour des désaccords profonds avec certaines prédictions de la mécanique classique. On sait aujourd'hui que la mécanique newtonienne possède des limitations et qu'elle n'est qu'une forme approchée d'autres théories plus fondamentales.<sup>2</sup>

- *Aller vers les hautes énergies – la théorie de la relativité* : lorsque la vitesse d'un objet atteint une vitesse comparable à la vitesse de la lumière  $c \simeq 300\,000 \text{ km/s}$ , sa dynamique n'est plus prédite par les lois de la mécanique classique. De nos jours, ces conditions sont réalisées couramment dans les accélérateurs de particules élémentaires. En cherchant à résoudre le problème d'incompatibilité entre mécanique newtonienne et électromagnétisme, Einstein a proposé au début du XX<sup>ème</sup> siècle d'autres lois pour décrire la dynamique des particules matérielles, la *mécanique einsteinienne* (« relativité restreinte »), remettant en particulier en cause la conception de l'espace-temps galiléo-newtonien. Cette nouvelle conception de la structure de l'espace-temps apporte un nouveau regard sur la nature de l'interaction gravitationnelle. C'est la théorie de la *relativité générale*. Les corrections apportées par la relativité générale sont aujourd'hui prises en compte dans le système de localisation GPS.

- *Tendre à l'élémentarité (réduire la taille) – la mécanique quantique* : l'étude de la structure de la matière a conduit les physiciens à développer des outils permettant d'analyser des échelles de plus en plus petites. L'existence d'une échelle élémentaire (atomique) a suscité de vifs débats pendant plusieurs décennies au XIX<sup>ème</sup> siècle, entre une approche « énergétiste » promouvant une description continue des milieux matériels et s'inscrivant dans un courant de pensée holiste, et une approche « atomiste » suivant une logique réductionniste. La preuve indiscutable de l'existence des atomes fût fournie par les expériences de Jean Perrin au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Depuis, divers types d'appareils devenus d'usage courant en laboratoire permettent de « voir » assez directement les atomes : les microscopes à effet tunnel, microscopes à force atomique, etc. L'étude des phénomènes aux échelles atomiques ( $10^{-10} \text{ m}$ ) ou subatomiques a rapidement mis à jour l'incompatibilité entre théorie du rayonnement (électromagnétisme) et description newtonienne des corps matériels. Précisément, la difficulté porte sur la compréhension des processus d'interaction entre matière et rayonnement (absorption et émission de l'énergie du rayonnement par la matière). Le dépassement de ces difficultés a donné naissance, à la fin des années 1920, à une autre théorie permettant de décrire la dynamique des objets aux échelles les plus élémentaires : la *mécanique quantique*. Le bouleversement fût d'autant plus grand que, contrairement au passage de la mécanique newtonienne à la

2. « fondamentale » au sens de « fondements ».

mécanique einsteinienne, qui conserve en gros les outils cinématiques, la mécanique quantique est basée sur un langage radicalement différent de celui de la mécanique newtonienne. Avec du recul, il n'est pas surprenant que cette dernière, dont les axiomes ont été inspirés de l'analyse de phénomènes à l'échelle macroscopique (disons  $\ell \gtrsim 10^{-3}$  m), soit incapable de décrire les phénomènes à  $\ell \lesssim 10^{-10}$  m.

Depuis les premiers temps de la mécanique quantique, les progrès technologiques ont permis de déplacer sensiblement les frontières entre classique et quantique : les phénomènes quantiques ne sont plus seulement limités aux échelles extrêmement petites et de nombreuses manifestations de la mécanique quantique existent aussi aux échelles macroscopiques, telles les phénomènes spectaculaires de superfluidité, supraconductivité, etc. De nombreuses applications courantes aujourd'hui sont basées sur des phénomènes quantiques comme par exemple : le laser, la conduction électrique, les semi-conducteurs, le magnétisme des surfaces (disques durs), etc.

- *Augmenter la complexité – la thermodynamique et la physique statistique* : la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle a vu l'émergence d'une autre théorie fondamentale : la *thermodynamique*. Même si elle met en jeu des concepts communs avec la mécanique newtonienne, comme l'énergie. L'approche extrêmement fructueuse de la thermodynamique s'inscrit dans le cadre d'une description continue de la matière (par opposition à « atomiste »). C'est Boltzmann, suivant les travaux précurseurs de Clausius et Maxwell, qui introduisit les concepts permettant de faire le lien entre une description mécanique à l'échelle élémentaire (atomiste) et la description continue à l'échelle « macroscopique », ce qui a donné naissance à une autre théorie fondamentale : la *physique statistique*. En bénéficiant de la complexité de la dynamique des systèmes à très grand nombre de degrés de liberté (les gaz d'atomes par exemple), la description déterministe de la dynamique des particules à l'échelle atomique est remplacée par une description probabiliste des processus élémentaires.

*Ce qui sera discuté dans le cours (et ce que nous n'aborderons pas)*

Cette vue d'ensemble des grandes « théories cadres » de la physique nous permet de situer le matériel présenté dans ces notes qui proposent une **introduction** à la *mécanique classique*, dans laquelle nous ne traiterons que le problème des points matériels. Ce sont des systèmes idéalisés où on considère que les masses sont concentrées dans des volumes infiniment petits. Cette première approche bien que très idéalisée, permet en fait de décrire, dans de nombreuses situations, le mouvement du centre de masse d'un solide étendu. L'étude des mouvements de rotation dans l'espace (moment cinétique) sera abordée dans le cours « Mécanique II » du second semestre. Les outils permettant d'analyser la dynamique des

corps matériels étendus, la « mécanique du solide », sera abordée plus tard dans un autre cours.

Malgré ces restrictions, on pourra déjà entrevoir la structure de *la première théorie physique fondamentale* de l'histoire de l'humanité, qui reste encore aujourd'hui, malgré ses limitations, d'une formidable efficacité.

## 1.2 Les constantes fondamentales en physique

La mécanique newtonienne est une forme approchée, ou simplifiée, de la mécanique einsteinienne et de la mécanique quantique (il existe également une version relativiste de la mécanique quantique : la théorie quantique des champs qui est donc le cadre le plus général). Les constantes fondamentales de la physique jouent un rôle important pour définir le domaine de validité de la mécanique newtonienne :

- La théorie de la relativité restreinte (« mécanique einsteinienne ») fait intervenir la célérité de la lumière  $c$ . Si la vitesse du corps matériel considéré est  $v \ll c$ , alors les prédictions de la mécanique newtonienne sont valables.
- La constante fondamentale de la mécanique quantique est la constante de Planck  $\hbar$ . Elle représente une grandeur physique appelée « action », ayant la dimension [position]  $\times$  [impulsion]. Si l'action caractéristique du problème est  $\gg \hbar$ , alors il sera légitime de se placer dans le cadre classique.
- Enfin, la physique statistique fait intervenir la constante de Boltzmann  $k_B$  reliée au nombre d'Avogadro  $N_A$ <sup>3</sup> et à la constante des gaz parfaits par  $R = \mathcal{N}_A k_B$ .  $k_B$  a la dimension d'une entropie et fournit une unité de mesure du manque d'information. Si l'entropie (le manque d'information) est petite devant  $k_B$ , alors l'état du système est défini avec une probabilité voisine de l'unité et l'on peut considérer l'évolution du système comme déterministe.
- Il existe d'autres constantes fondamentales qui elles permettent de définir l'intensité des différentes forces ou interactions fondamentales. Par exemple la constante de gravitation universelle  $G = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  permet de définir l'intensité de la force gravitationnelle.

L'association de différentes constantes fondamentales permet de définir une théorie physique. Quelques exemples sont donnés dans le tableau suivant :

3. Le nombre d'Avogadro  $N_A$  est le nombre d'éléments constituant une mole.  $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ . Une mole d'atome de carbone représente  $6.02 \times 10^{23}$  atomes de carbone.



$c$	Relativité restreinte d'Einstein
$\hbar$	Mécanique quantique
$G$	Théorie de la gravitation universelle de Newton
$c, \hbar$	Théorie quantique des champs
$c, G$	Théorie de la relativité générale d'Einstein
$c, \hbar, G$	Théorie de la gravitation quantique, en construction...

TABLE 1.1: Quelques exemples de théories physiques et les constantes fondamentales sur lesquelles elles reposent.

### 1.3 Les interactions fondamentales

Un concept essentiel en mécanique est celui de « force » (ou « interaction »). Les problèmes que nous considérerons feront intervenir différents types de forces, de nature fondamentale (comme l'interaction coulombienne) ou phénoménologique (comme la force de rappel d'un ressort). Il existe quatre interactions fondamentales que l'on peut distinguer par leur intensité et par leur portée, voir figure 1.1. Les plus connues sont la

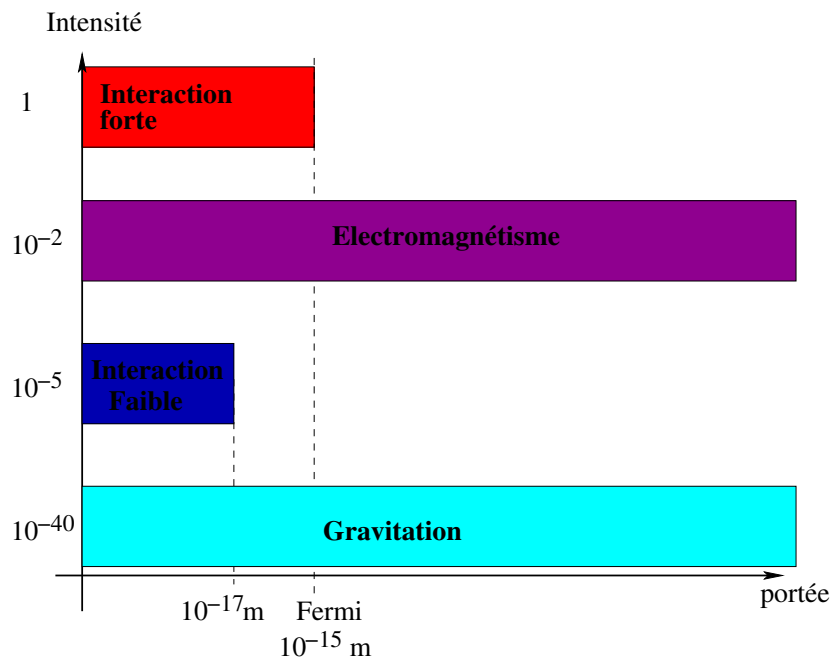


FIGURE 1.1: Les quatre interactions fondamentales.

gravitation et l'électromagnétisme. Elles ont toutes les deux une portée infinie. Deux masses interagissent par la gravitation avec une force qui dépend de l'inverse du carré de leur distance respective, de même que deux charges interagissent par la force de Coulomb. La force de gravitation est beaucoup plus faible que l'interaction électromagnétisme. La gravitation est donc souvent négligée lorsqu'on s'intéresse à l'interaction entre particules chargées. Néanmoins, il existe des charges positives et négatives, alors qu'il n'existe pas de masse négative. La force de gravitation est donc toujours attractive alors que la force électromagnétique

peut être répulsive (lorsque les charges ont même signes) ou attractive (lorsque les charges possèdent des signes opposés). C'est pour cette raison qu'en générale la force électromagnétique n'a pas d'influence sur de grandes distances. En effet, si on met une charge positive en un point de l'espace, elle va attirer des charges négatives et former un système neutre (comme un atome ou une molécule par exemple).

La plus intense des 4 interactions est *l'interaction forte*, qui est responsable de la cohésion des noyaux des atomes. En effet, les noyaux des atomes sont constitués de charges positives, les protons, qui sont très proches les uns des autres ( $\simeq 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ). L'intensité de la force électromagnétique entre les deux charges des protons est données par :

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2},$$

où  $d$  est la distance séparant les deux protons dans le noyau et  $e = 1.6e^{-19} \text{ C}$  est la charge du proton.  $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  est une constante fondamentale appelée la permittivité du vide. En prenant  $d = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$ , on trouve  $F \simeq 200 \text{ N}$ . Il faut donc une force qui compense cette force électrostatique ; c'est l'interaction forte. Cette interaction est de courte portée et n'agit que sur des distances de l'ordre de la taille des noyaux.

La dernière des quatre interactions est *l'interaction faible*. Cette interaction est responsable de certaines réactions nucléaires en particulier la désintégration radioactive beta, qui permet par exemple la désintégration d'un noyau de carbone 14 en azote 14 où un neutron est devenu un proton et est accompagné de l'émission d'un antineutrino et d'un électron. Cette interaction est de très courte portée. Sa portée est encore plus faible que celle de l'interaction forte.

#### 1.4 Les grandeurs physiques – Dimensions et unités

La notion de grandeur ou quantité physique est basée sur l'expérience et sur les résultats de mesures. Parmi les grandeurs physiques mesurées certaines peuvent être comparées entre elles et d'autres ne le peuvent pas. Par exemple on pourra écrire que  $Q_1 = Q_2$ , ou  $Q_1 \neq Q_2$  si les quantités  $Q_1$  et  $Q_2$  qui caractérisent des grandeurs physiques sont du même type. On peut comparer des masses entre elles mais comparer une masse avec une longueur n'a pas de sens. Le type d'une grandeur physique est ce qu'on appelle une dimension.

##### 1.4.1 Les grandeurs physiques et dimensions de base

On définit cinq dimensions de base correspondant à 5 grandeurs physiques de base à partir desquelles toutes les dimensions des grandeurs physiques pourront être obtenues. Le tableau 1.2 résume les grandeurs

de base, avec leur unités dans le système d'unité international. En plus des quatre premières (longueur, temps, masse et températures) qui sont les plus courantes, on doit introduire le courant électrique  $I$ , dont l'unité internationale est l'ampère. 1 ampère correspond à 1 charge de 1 coulomb par seconde. A chacune des grandeurs de base correspond une

Grandeurs	Notations	unités (S.I.)	symboles
Longueur	$L$	mètre	m
Temps	$T$	seconde	s
Masse	$M$	kilogramme	kg
Température	$\theta$	kelvin	K
Courant	$I$	ampère	A

unité dans le système international (S.I.). Il ne faut pas confondre la notion d'unité, et la notion de dimension. L'unité donne un sens à la valeur numérique que l'on obtient lors d'une mesure d'une grandeur physique. La dimension donne un sens à la grandeur physique elle-même indépendamment de la valeur mesurée.

Il existe des quantités sans dimensions qui possèdent une unité dans le système internationale. En voici deux exemples :

- L'unité S.I. de mesure d'un angle est le radian (rad). Un angle n'a pas de dimension. En effet, un angle est le rapport entre la circonférence et le rayon de l'arc de cercle correspondant.
- La mole, représente un ensemble de  $6.02 \times 10^{23}$  objets (une mole d'atomes ou de molécules).

### 1.4.2 Des grandeurs dérivées

Dans le tableau 1.3, on donne des exemples de quantités physiques que nous utiliserons, accompagnées de leurs dimensions et unités.

Grandeurs	Equations/lois	Dimensions	unités (S.I.)	symboles
Aire, surface	$S = x^2$	$L^2$		$m^2$
Volume	$V = x^3$	$L^3$		$m^3$
fréquence	$\nu = \frac{1}{T}$	$T^{-1}$	hertz	Hz
vitesse	$v = \frac{dx}{dt}$	$LT^{-1}$		$m \cdot s^{-1}$
accélération	$a = \frac{dv}{dt}$	$LT^{-2}$		$m \cdot s^{-2}$
Force	$\vec{F} = m\vec{a}$	$MLT^{-2}$	newton	N
Energie	$E_c = \frac{1}{2}m\ \vec{v}\ ^2$	$ML^2T^{-2}$	joule	J
Puissance	$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$ML^2T^{-3}$	watt	W
Pression	$P = \frac{\ \vec{F}\ }{S}$	$ML^{-1}T^{-2}$	pascal	Pa

TABLE 1.2: Grandeurs et dimensions de base.

Il ne faut pas confondre la notion d'unité, et la notion de dimension. L'unité donne un sens à la valeur numérique que l'on obtient lors d'une mesure d'une grandeur physique. La dimension donne un sens à la grandeur physique elle-même indépendamment de la valeur mesurée.

**Angle :** Un angle n'a pas de dimension.  
 $\alpha = \frac{\ell}{R}$ .

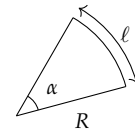


TABLE 1.3: Grandeurs dérivées.

### 1.4.3 Analyse dimensionnelle

Les dimensions de base sont notées comme suit :  $L$  pour la longueur,  $T$  pour le temps,  $M$  pour la masse. Ces trois dimensions de bases seront celles que nous utiliserons le plus dans ce cours de mécanique. Les deux autres : Température  $\theta$  et courant  $I$  seront moins fréquemment utilisées. La première relevant plus de la thermodynamique ou de la physique statistique et la seconde de l'électromagnétisme. Une quantité physique  $Q$  quelconque, possèdera une dimension qui s'exprimera comme un produit des puissances des dimensions de base. On notera :

$$[Q] = L^\alpha T^\beta M^\gamma \theta^\delta I^\epsilon,$$

et on dira dimension de  $Q$  égale à  $L^\alpha T^\beta M^\gamma \theta^\delta I^\epsilon$ . Dans le cas où  $Q$  est une quantité sans dimension, on écrira formellement  $[Q] = 1$ .

*Homogénéité des équations* Les grandeurs physiques comparables doivent avoir la même dimension. Cela implique que les équations reliant des quantités physiques doivent être homogènes. Les règles suivantes doivent être satisfaites :

1. Dans une équation, les quantités physiques des deux cotés de l'égalité doivent avoir les mêmes dimensions. C'est à dire que :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2].$$

2. Si une quantité physique  $Q$  est exprimée comme une somme de plusieurs autres quantités physiques  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , alors chacun des termes de la somme doit avoir la même dimension que  $Q$ . C'est à dire que :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \Rightarrow [Q_1] = [Q_2] = \dots = [Q_n] = [Q].$$

3. Dans une équation reliant des quantités physiques, l'argument d'une fonction transcendante ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp \dots$ ) ne peut avoir de dimension.

$$Q = Q_1 f(Q_2) \Rightarrow \begin{cases} [Q_2] = 1 \\ [Q] = [Q_1] \end{cases}$$

4. Une quantité vectorielle possède la dimension de ses composantes et de sa norme. C'est à dire que si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormée :

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{i} + Q_2 \vec{j} + Q_3 \vec{k} \Rightarrow [\vec{Q}] = [Q_1] = [Q_2] = [Q_3] = [||\vec{Q}||].$$

5. Si une quantité physique  $Q(x)$  dépend d'une autre quantité physique  $x$ . Alors la dimension de la dérivée de  $Q(x)$  par rapport à  $x$  est la dimension de  $Q$  divisée par celle de  $x$  :

$$\left[ \frac{dQ(x)}{dx} \right] = [Q][x]^{-1}.$$

#### Homogénéité des équations physiques :

Une équations reliant des quantités physiques doit respecter les règles suivantes :

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2]$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow [Q_1] = [Q_2] = [Q].$$

$$Q = Q_1 f(Q_2) \Rightarrow \begin{cases} [Q_2] = 1 \\ [Q] = [Q_1] \end{cases}$$

$$\vec{Q} = Q_1 \vec{i} + Q_2 \vec{j} + Q_3 \vec{k}$$

$$\Rightarrow [\vec{Q}] = [Q_1] = [Q_2] = [Q_3] = [||\vec{Q}||]$$

$$\left[ \frac{dQ(x)}{dx} \right] = [Q][x]^{-1}.$$

Lorsqu'on écrira des équations reliant des quantités physiques, on vérifiera que ces règles sont bien respectées. En outre, cette vérification est souvent un moyen de détecter des erreurs de calcul.



## 2

# Cinématique

LA CINÉMATIQUE constitue le champ d'étude du mouvement des corps indépendamment des causes qui le produit. On ne s'intéresse pas à la cause du mouvement, mais uniquement à sa description. Nous allons considérer la cinématique de points dont la taille est infiniment petite. C'est-à-dire que nous allons considérer uniquement les positions de ces points et la notion d'orientation de chacun de ces points n'a pas de sens physique. Cette approche qui au premier abord semble restrictive contient l'ensemble des outils nécessaires à la description de systèmes plus complexes. En effet, il est possible de décrire un système étendu, comme un solide ou un fluide par exemple, en décrivant un ensemble infini de points. Nous allons également nous restreindre à la cinématique *Galiléenne* permettant de décrire le mouvement non-relativiste des points.

Au cours de ce chapitre nous allons introduire divers concepts pour décrire le mouvement d'un point : trajectoire, équation horaire du mouvement, vitesse et accélération. Tous ces concepts vont reposer sur deux outils mathématiques essentiels : les *vecteurs* et l'étude des fonctions d'une variable réelle et en particulier le *calcul différentiel*. La lecture de ce chapitre suppose la maîtrise de ces outils introduits au lycée. Le lecteur pourra trouver dans l'annexe B, page 83 et dans l'annexe C, page 89 les rappels essentiels sur les *vecteurs* et l'étude des fonctions.

### 2.1 Notion d'espace et de temps

Pour décrire le monde physique, le physicien introduit la notion d'événements. Un *événement* est constitué d'un point  $P$  et d'un temps  $t$ . Le point  $P$  décrit la position où l'évènement a eu lieu et le temps  $t$  est l'instant auquel il s'est produit. Le physicien doit donc introduire deux espaces métriques (en mathématique, un espace métrique est un espace au sein duquel il est possible de définir une distance entre deux points). Un espace de dimension 3 qui permet de décrire les positions des *évène-*

**Évènement :** Un événement  $(P, t)$  est constitué d'un point  $P$  et d'un temps  $t$ . Le point  $P$  décrit la position où l'évènement a eu lieu et le temps  $t$  est l'instant auquel il s'est produit.

ments et un espace de dimension 1 qui permet de décrire les instants où les événements se produisent.

### 2.1.1 L'espace

La cinématique *Galiléenne* décrit l'espace ambiant par les outils de la géométrie *Euclidienne*, c'est à dire la géométrie élémentaire telle qu'introduite au collège et lycée et reposant sur les concepts de droite, plan, longueur et aire. Dans cette représentation la position d'un point de l'espace est repérée par trois coordonnées dans un repère d'espace (une origine ainsi que trois axes de références). Dans le cadre de ce cours on n'étudiera que le cas d'un repère orthonormé, c'est-à-dire où les axes de référence sont perpendiculaires entre eux. Par convention l'origine du repère est noté  $O$  et on note les trois axes de référence  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . Le repère est alors noté  $Oxyz$ . Aux trois axes de référence, on associe trois vecteurs unitaires (de norme égale à 1)  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ , on parle de base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . La position d'un point  $M$  de l'espace est alors donnée par le vecteur

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.1)$$

où  $x$ ,  $y$ , et  $z$  sont les composantes du vecteur position  $\vec{r}$  (les coordonnées).

On rappelle que dans le cas d'un repère orthonormé la distance entre le point  $M$  et l'origine du repère est donnée par

$$\|\vec{r}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.2)$$

On peut parfois trouver dans la littérature d'autres notations. Par exemple il est courant d'utiliser les vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  ou  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$  les lettres *e* et *u* faisant référence à l'allemand *ein*z et au français *un*. Les trois coordonnées sont parfois également notées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  et les vecteurs de bases associés  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ .

*Remarque :* La géométrie Euclidienne, n'est pas la seule représentation du monde physique. Einstein a utilisé la géométrie différentielle dans sa théorie de la relativité générale. Dans cette théorie, le monde est décrit par un espace courbe de dimension 4 (espace+temps) et la courbure de l'espace-temps est induite par la répartition de la matière (étoiles, galaxies, matière sombre, ...) et de l'énergie telle que l'énergie sombre.

### 2.1.2 Le temps

La mesure du temps doit être comprise au sens de la mesure du temps écoulé. Cette idée repose sur le concept d'orientation du temps du passé vers le futur et sur le concept de l'irréversibilité de l'évolution des phénomènes physiques. L'origine de cette irréversibilité peut-être comprise dans le cadre de la physique statistique et de la thermodynamique et sera admise dans ce cours. La mesure du temps suppose le choix d'une

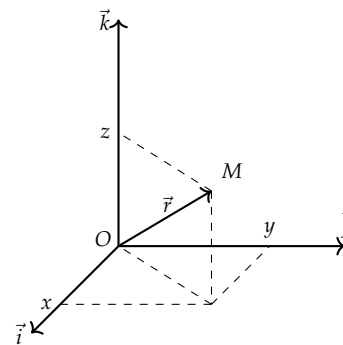


FIGURE 2.1: Vecteur position.



origine, par exemple l'instant initial dans la description d'un phénomène physique et repose sur l'utilisation d'une horloge, c'est-à-dire un système physique périodique et stable dont on connaît la loi d'évolution (par exemple un pendule, un oscillateur mécanique ou électrique, une horloge atomique . . . , suivant la précision requise).

La cinématique Galiléenne décrit le temps  $t$  comme un paramètre universel et unique pour tous les observateurs. Si bien que tous les observateurs, munis d'horloges synchronisées, à un instant donné, mesureront tous le même temps d'occurrence des événements physiques qu'ils observent.

Il convient de remarquer que l'on néglige ici le temps de propagation pris par la lumière pour voyager des événements physiques à l'observateur. La prise en compte de ces délais, en particulier pour synchroniser les horloges des observateurs, est l'un des éléments clés de la théorie de la Relativité Restreinte. voir ci-dessous la première équation du système (2.29) pour l'expression mathématique de cet effet qui est négligé dans la transformation de Galilée donnée par l'Eq. (2.28).

### 2.1.3 Référentiel

L'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère de temps constitue un *référentiel*. Cette notion est essentielle en physique car le mouvement d'un point (position, vitesse et accélération) est défini par rapport à un référentiel donné. En pratique un référentiel est souvent défini par un solide indéformable pour lequel il est possible de définir une orientation. L'observateur qui décrit le mouvement est alors attaché à ce solide. Ainsi lors de la description du mouvement d'un point par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  muni du repère  $Oxyz$ , on supposera que l'origine  $O$  et les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  sont fixes. Ainsi la position au cours du temps du point  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  est donné par le vecteur position

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont les coordonnées du point qui sont donc des fonctions dépendantes du temps. La variation temporelle du vecteur  $\overrightarrow{OM}(t)$  permet donc de suivre la position du point  $M$  au cours du temps.

Voici quelques exemples de référentiels courants :

- *Référentiel terrestre* : Ce référentiel est fixe par rapport à la Terre. On peut choisir les axes  $Oxyz$  de telle sorte que l'axe  $Oz$  passe par le centre de la Terre et par le pôle nord. Les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont alors situés dans le plan de l'équateur et on peut choisir l'axe  $Ox$  comme l'axe passant par le centre de la Terre et par le méridien de Greenwich (méridien choisi pour définir la longitude  $0^\circ$ ).
- *Référentiel géocentrique* : L'origine  $O$  est prise au centre de la Terre, mais les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  ne sont pas fixés sur la Terre. Les directions

**Cinématique Galiléenne** : le temps  $t$  est pris comme un paramètre universel et unique pour tous les observateurs.

**Référentiel** : association d'un repère d'espace et d'un repère de temps

de ses axes sont définies par trois étoiles éloignées.

- *Référentiel héliocentrique* : L'origine est prise au centre du soleil et les directions de ses axes sont définies par trois étoiles éloignées.
- *Référentiel de Copernic* : Ce référentiel est centré sur le centre de masse du système solaire et ses axes sont définis par trois étoiles éloignées. Cette définition supposerait que ces étoiles sont fixes, ce qui n'est pas exactement le cas car notre Galaxie tourne (lentement) sur elle-même (en 240 millions d'années).

#### 2.1.4 Trajectoire et lois horaires

On appellera *trajectoire*, l'ensemble des positions occupées par le point au cours de son mouvement et mesurées dans un référentiel donné. Il s'agit d'une notion purement géométrique. La donnée de la trajectoire ne donne aucune information sur la position du point à un instant donné.

On appellera *équation horaire* la donnée de la position du point, à chaque instant  $t$ , mesurée dans un référentiel donné. C'est à dire la donnée de la fonction  $\vec{r}(t)$  ou encore la donnée des trois fonctions du temps  $t$  :  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ , qui constituent les trois composantes du vecteur  $\vec{r}(t)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . L'équation horaire est en fait l'équation paramétrique de la trajectoire (voir cours de mathématique) où le paramètre utilisé est le temps  $t$ . Plusieurs équations horaires différentes peuvent correspondre à la même trajectoire. Par exemple, un point peut parcourir un même segment de droite à vitesse constante (accélération nulle) ou avec une accélération non nulle.

**Remarque** : La trajectoire d'un mobile dépend du référentiel dans lequel elle est mesurée. Il en est de même de l'équation horaire. Par exemple, la trajectoire de la lune est différente suivant qu'elle est observée depuis le référentiel terrestre (c'est celle que nous observons habituellement), ou depuis le référentiel héliocentrique.

**Trajectoire** : Lieu géométrique des points atteints par le mobile au cours de son mouvement. C'est une courbe dans l'espace.

**Equation horaire** : équation paramétrique de la trajectoire où le paramètre utilisé est le temps  $t$ . C'est à dire l'expression des composantes  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  du vecteur position  $\vec{r}(t)$  en fonction du temps  $t$ .

## 2.2 Trajectoire rectiligne

On considère ici le mouvement d'un point  $M$  le long d'une droite (rectiligne) mesuré dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour repérer le point sur cette droite, on choisit une origine  $O$  et un sens positif, qui sera indiqué par le vecteur unitaire  $\vec{i}$ . On a donc une droite orientée, ou encore un axe, que l'on notera  $Ox$ . Puisque le point ne peut se déplacer que sur l'axe  $Ox$  le vecteur position s'écrit

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i}. \quad (2.3)$$

où  $x(t)$  est la composante de  $\overrightarrow{OM}$  sur l'axe  $Ox$ .  $x(t)$  sera donc positif si le sens de  $\overrightarrow{OM}$  est le sens positif, c'est à dire, le même que  $\vec{i}$ . Dans le cas

contraire  $x(t) < 0$ . On remarque que la distance du point  $M$  à l'origine est donné par

$$\|\vec{x}\|(t) = \sqrt{[x(t)]^2} = |x(t)| \quad (2.4)$$

### 2.2.1 Vitesse

*Vitesse moyenne* A l'instant  $t_1$ , le mobile est en  $M(t_1)$  repéré par son abscisse  $x(t_1)$ . A l'instant  $t_2 > t_1$ , il est en  $M(t_2)$  d'abscisse  $x(t_2)$ . On définit la *vitesse moyenne*,  $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}$ , dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$  par :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \vec{i}. \quad (2.5)$$

C'est un vecteur, dont la composante sur  $\vec{i}$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f(t) = x(t)$ , entre  $t_1$  et  $t_2$ . La norme de  $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}$  correspond bien à l'idée habituelle de vitesse moyenne. En effet,

$$\|\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_2]}\| = \frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|}, \quad (2.6)$$

ce qui correspond bien au rapport de la distance parcourue par le temps écoulé. La dimension de la vitesse moyenne est  $LT^{-1}$ . En notant  $\Delta t$  le temps écoulé entre  $t_1$  et  $t_2$ , c'est à dire que  $t_2 - t_1 = \Delta t$ , on peut aussi écrire la vitesse moyenne de la façon suivante :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \vec{i}. \quad (2.7)$$

*Vitesse instantanée* La vitesse instantanée  $\vec{v}(t)$ , à un instant  $t$ , (sur une trajectoire rectiligne) s'obtient comme la limite quand  $\Delta t$  tend vers zéro, de la vitesse moyenne :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i}. \quad (2.8)$$

C'est un vecteur dont l'unique composante  $v_x(t)$  sur l'axe  $Ox$  est donnée par :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}.$$

En effet, la limite du taux d'accroissement de la fonction  $x(t)$  est la dérivée  $x'(t)$  de la fonction  $x(t)$  par rapport à  $t$ . En cinématique et en mécanique en général, on utilisera souvent la notation  $\dot{f}$  pour noter la dérivée d'une fonction  $f(t)$  par rapport au temps  $t$ . La notation  $f'$  sera utilisée pour une dérivée par rapport à une variable qui n'est pas le temps (par exemple par rapport à  $x$ ). On utilisera aussi la notation  $\frac{df}{dt}$ , qui rappelle la limite du taux d'accroissement. On remarque que la norme de la vitesse instantané est alors donné

$$\|\vec{v}(t)\| = |\dot{x}(t)| \quad (2.9)$$

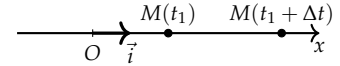


FIGURE 2.2: Repérage d'un point sur sa trajectoire rectiligne.

**Vitesse moyenne :** La vitesse moyenne  $\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]}$ , dans l'intervalle  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  est définie par :

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t_1, t_1 + \Delta t]} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} \vec{i}.$$

**Vitesse instantanée :** La vitesse instantanée est définie par

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{i} = \frac{dx}{dt} \vec{i} \equiv \dot{x} \vec{i}.$$

### 2.2.2 Accélération

L'accélération indique la variation de la vitesse en fonction du temps, de la même façon que la vitesse indique la variation de la position en fonction du temps. On définit donc l'accélération  $\vec{a}(t)$  comme la dérivée de la vitesse  $\vec{v}(t) = v(t) \vec{i}$  :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i}. \quad (2.10)$$

On pourra aussi voir l'accélération comme la dérivée seconde de la position :

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i}.$$

En cinématique, on réservera la notation  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$  pour la dérivée seconde de  $x$  par rapport au temps.

### 2.3 Trajectoire non-rectiligne

De façon générale, la trajectoire d'un point est une courbe dans l'espace. La position d'un point  $M$  sera repérée par le *vecteur position*  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , où  $O$  est un point fixe, que l'on prend comme l'origine d'un repère cartésien  $Oxyz$ , muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . A chaque instant  $t$ , le vecteur position  $\vec{r}$  est alors déterminé par ses composantes  $(x(t), y(t), z(t))$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

#### 2.3.1 Vecteur vitesse

La vitesse du point  $M(t)$  caractérise la variation du vecteur position à chaque instant  $t$ . Dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est défini par :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}. \quad (2.12)$$

C'est à dire que le vecteur vitesse est le vecteur dont les composantes  $(v_x, v_y, v_z)$  dans un repère cartésien sont les dérivées, par rapport au temps, des composantes du vecteur position  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ ,  $v_z = \dot{z}$ .

On notera :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

et on dira que le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position. Cette notation a un sens mathématique plus profond car elle est indépendante du repère choisi. On peut montrer que :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.13)$$

**Accélération :** l'accélération est la dérivée de la vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} \equiv \ddot{x}(t) \vec{i}. \quad (2.11)$$

**Vecteur position :**

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

**Vecteur vitesse :**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}.$$

$\vec{v}$  est un vecteur tangent à la trajectoire au point  $M(t)$ .

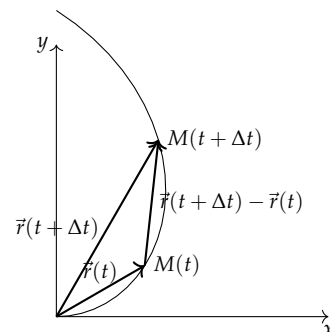


FIGURE 2.3: A l'instant  $t$  le mobile est au point  $M(t)$  repéré par le vecteur position  $\vec{r}(t)$ .  $\Delta t$  plus tard, il se trouve au point  $M(t + \Delta t)$  repéré par le vecteur position  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du mobile, au

C'est à dire que le vecteur vitesse est bien la limite d'un taux d'accroissement vectoriel du vecteur position. Regardons en détail la signification géométrique du vecteur  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ . pour cela notons  $M(t)$  la position du mobile à l'instant  $t$  et par  $M(t + \Delta t)$  la position du mobile  $\Delta t$  plus tard. Avec ces notations, on peut écrire  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t)$  et  $\vec{r}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t)$ . On aura donc :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) &= \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) \\ &= \overrightarrow{M(t)M}(t + \Delta t).\end{aligned}$$

C'est à dire que le vecteur  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  est en fait le vecteur qui joint la position du mobile à l'instant  $t$  à la position du mobile  $\Delta t$  plus tard (voir Figure 2.3). Lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  le point  $M(t + \Delta t)$  se rapproche du point  $M(t)$  et donc le vecteur  $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$  tend vers le vecteur nul. Le numérateur et le dénominateur de l'équation (2.13) tendent donc vers zéro. On montre que le rapport  $\frac{\overrightarrow{M(t)M}(t + \Delta t)}{\Delta t}$  tend vers un vecteur fini quand  $\Delta t$  tend vers zéro, qui définit le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$  à l'instant  $t$  et qui est tangent à la trajectoire, au point  $M(t)$ . On remarquera que dans le cas d'une trajectoire non rectiligne la norme du vecteur vitesse est donnée par

$$\|\vec{v}\|(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \quad (2.14)$$

### 2.3.2 Vecteur accélération

Le vecteur accélération du point  $M(t)$  caractérise la variation de la vitesse du point  $M(t)$  à chaque instant  $t$ . Dans la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le vecteur accélération  $\vec{a}(t)$  est défini par :

$$\vec{a}(t) = \dot{v}_x(t)\vec{i} + \dot{v}_y(t)\vec{j} + \dot{v}_z(t)\vec{k}. \quad (2.15)$$

C'est à dire que le vecteur accélération est le vecteur dont les composantes  $(a_x, a_y, a_z)$  dans un repère cartésien sont les dérivées, par rapport au temps, des composantes du vecteur vitesse  $a_x = \dot{v}_x, a_y = \dot{v}_y, a_z = \dot{v}_z$ .

## 2.4 Cas particuliers

### 2.4.1 Mouvement uniforme

Le mouvement est dit *uniforme* si la norme du vecteur vitesse est constante  $\|\vec{v}\| = \text{cte}$ . Autrement dit :

$$\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0.$$

Par contre, le vecteur vitesse  $\vec{v}$  n'est pas forcément constant. Sa direction peut varier, donc l'accélération n'est pas forcément nulle :  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Par exemple une voiture dont le compteur de vitesse indique 30km/h et qui

**Vecteur accélération :**

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \dot{v}_x(t)\vec{i} + \dot{v}_y(t)\vec{j} + \dot{v}_z(t)\vec{k} \\ &= \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}.\end{aligned}$$

**Mouvement uniforme :**  $\|\vec{v}\| = \text{cte}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

Le vecteur vitesse est à chaque instant orthogonal au vecteur accélération.

roule dans dans un virage, a un mouvement uniforme mais la direction de son vecteur vitesse varie.

Montrons que dans un mouvement uniforme, le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est à tout instant orthogonal au vecteur accélération  $\vec{a}$  du mobile. Pour cela rappelons que :

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (2.16)$$

Comme  $\|\vec{v}\|$  est constante,  $\|\vec{v}\|^2$  est aussi constante et donc

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0. \quad (2.17)$$

En utilisant l'expression Eq. (2.16), on peut exprimer cette dérivée de la façon suivante :

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

En reconnaissant l'accélération  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , on obtient

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}.$$

Finalement :

$$\frac{d\|\vec{v}\|^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2\vec{v} \cdot \vec{a} = 0.$$

Ce qui est bien équivalent à l'orthogonalité entre les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$ .

Le mouvement circulaire et *uniforme* est un exemple de mouvement uniforme. Le mobile décrit un cercle, la norme de sa vitesse est constante. Le vecteur vitesse est tangent au cercle, et la direction du vecteur accélération est suivant le rayon du cercle ; l'accélération est centripète, c'est à dire que  $\vec{a}$  est orientée vers le centre du cercle (voir figure 2.4).

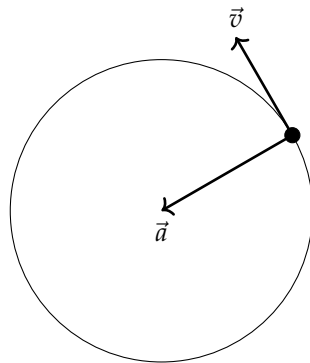


FIGURE 2.4: Mouvement circulaire et uniforme. Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est orthogonal au vecteur accélération  $\vec{a}$ .

### 2.4.2 Mouvement rectiligne et uniforme

Lorsque en plus d'être uniforme, le mouvement du mobile est rectiligne, alors le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est constant. Sa norme est constante

puisque le mouvement est uniforme et sa direction et son sens sont aussi constant, car la trajectoire est rectiligne. Dans ce cas  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ , et donc

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

Le vecteur accélération est donc nul.

**Mouvement rectiligne et uniforme :** Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est constant :

$$\vec{a} = \vec{0}.$$

## 2.5 Changement de référentiel

Pour décrire le mouvement dans un référentiel donné, il est parfois plus simple de le décrire tout d'abord dans un autre référentiel. Par exemple pour décrire le mouvement d'un enfant sur un manège, on peut tout d'abord décrire son mouvement (vertical) dans un référentiel fixé sur le manège et donc en rotation par rapport au sol, avant de décrire le mouvement de l'enfant dans le référentiel terrestre. Sachant exprimer les caractéristiques cinématiques (vitesse et accélération) d'un point par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}'$ , il peut-être utile de pouvoir exprimer ces caractéristiques par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ . On parle de composition des mouvements.

Pour passer de la description du mouvement d'un mobile dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  à la description du mouvement du même mobile mais dans un autre référentiel  $\mathcal{R}$ , il faut connaître le mouvement du référentiel  $\mathcal{R}'$  tel qu'il serait mesuré par un observateur fixe dans  $\mathcal{R}$ .

D'une manière générale, le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre référentiel peut-être décomposé en une *translation* et une *rotation*. La translation décrit le déplacement de l'origine  $O'$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à l'origine  $O$  de  $\mathcal{R}$ . La rotation décrit l'orientation des axes  $x', y', z'$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport aux axes  $x, y, z$  de  $\mathcal{R}$ .

Nous n'allons considérer ici que le cas où les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont en *translation* l'un par rapport à l'autre. Le cas de la *rotation* sera abordé dans le cadre du cours du second semestre.

**Remarque :** Lorsque  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ , le mouvement de  $O'$ , mesuré dans  $\mathcal{R}$ , peut décrire une trajectoire quelconque. Ce qui est important est que l'orientation des axes  $O'x'y'z'$  par rapport aux axes  $Oxyz$  ne varie pas au cours du temps. Considérons, par exemple, une nacelle dans une grande roue. Si on attache à la nacelle un référentiel  $\mathcal{R}'$  muni du repère  $O'x'y'z'$ , où les axes  $Ox'$ ,  $O'y$  et  $O'z$  sont à tout instant parallèle aux axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ , respectivement, le mouvement de la nacelle sera un mouvement de translation par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ , fixé sur la Terre ; même si le mouvement de  $O'$  mesuré dans  $\mathcal{R}$  est une rotation.

### 2.5.1 Composition du mouvement

Soit  $\mathcal{R}'$  un référentiel muni du repère  $O'x'y'z'$  en translation par rapport un référentiel  $\mathcal{R}$  muni du repère  $Oxyz$ . Comme  $\mathcal{R}'$  est en translation

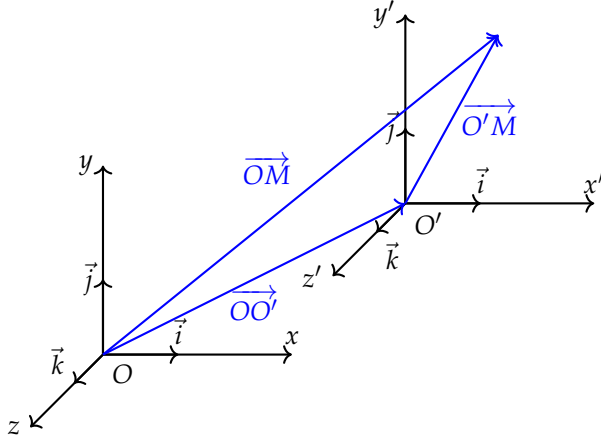


FIGURE 2.5: Composition du mouvement

par rapport à  $\mathcal{R}$ , à tout instant, on peut choisir les axes  $O'x'$ ,  $O'y'$  et  $O'z'$  parallèles respectivement aux axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . On pourra donc utiliser la même base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  pour les deux référentiels. On note  $\vec{r}$  le vecteur position du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (2.18)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , c'est à dire la position du point mesurée par l'observateur fixé au référentiel  $\mathcal{R}$ . On note  $\vec{r}'$  le vecteur position du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ ,

$$\vec{r}'(t) = \overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}, \quad (2.19)$$

où  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$  sont les coordonnées de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , c'est à dire la position du point mesurée par l'observateur fixé au référentiel  $\mathcal{R}'$ . Finalement on note également  $\vec{R}(t)$  la position du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$

$$\vec{R} = \overrightarrow{OO'}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}, \quad (2.20)$$

où  $X(t)$ ,  $Y(t)$  et  $Z(t)$  sont les coordonnées de  $O'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et sont pour l'instant des fonctions générales du temps  $t$ . En utilisant la relation de Chasles on obtient la relation

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t), \quad (2.21)$$

c'est à dire puisque les deux repères sont parallèles entre eux

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) + x'(t), \\ y(t) &= Y(t) + y'(t), \\ z(t) &= Z(t) + z'(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$



Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3, la vitesse et l'accélération du point  $M$  mesurées par un observateur dans  $\mathcal{R}$  sont données par

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \\ \vec{a}(t) &= \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}\end{aligned}$$

De même la vitesse et l'accélération du point  $M$  mesurées par l'observateur fixe dans  $\mathcal{R}'$  s'écrivent

$$\begin{aligned}\vec{v}'(t) &= \dot{x}'(t)\vec{i}' + \dot{y}'(t)\vec{j}' + \dot{z}'(t)\vec{k}' \\ \vec{a}'(t) &= \ddot{x}'(t)\vec{i}' + \ddot{y}'(t)\vec{j}' + \ddot{z}'(t)\vec{k}'\end{aligned}$$

En utilisant ce résultat et en dérivant par rapport au temps  $t$  les équations (2.22), on obtient les relations entre les vitesses  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  mesurées dans les deux référentiels.

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{V}(t) + \vec{v}'(t) \\ \vec{a}(t) &= \vec{A}(t) + \vec{a}'(t)\end{aligned}\tag{2.23}$$

où  $\vec{V}(t)$  et  $\vec{A}(t)$  sont respectivement la vitesse et l'accélération de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ; soient :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \dot{X}(t)\vec{i} + \dot{Y}(t)\vec{j} + \dot{Z}(t)\vec{k} \\ \vec{A} &= \ddot{X}(t)\vec{i} + \ddot{Y}(t)\vec{j} + \ddot{Z}(t)\vec{k}\end{aligned}$$

Les relations données par les Eqs. (2.23) sont parfois appelées la *composition des vitesses* et la *composition des accélérations*, respectivement.

**Remarque :** On retiendra que ces équations ne sont valides que pour des référentiels en translation l'un par rapport à l'autre. Dans le cas de la rotation des axes, il faut utiliser une base orthonormée  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  liée au référentiel  $\mathcal{R}'$  dont l'orientation par rapport à la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  du référentiel  $\mathcal{R}$  dépend du temps  $t$ . Du point de vue de l'observateur attaché au référentiel  $\mathcal{R}$ , les vecteurs  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  sont donc des fonctions du temps et dans le calcul de la vitesse et de l'accélération, il faut tenir compte de cette dépendance.

### 2.5.2 Cas de la translation rectiligne uniforme et transformation de Galilée

Dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  alors

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \overrightarrow{csté}.$$

Ainsi l'accélération de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0}.$$

#### Composition des vitesses

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'$$

où  $\vec{v}$  la vitesse du mobile mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{v}'$  est celle mesurée dans  $\mathcal{R}'$  et  $\vec{V}$  le vitesse de  $\mathcal{R}'$  mesurée dans  $\mathcal{R}$

#### Composition des accélérations

$$\vec{a}(t) = \vec{A}(t) + \vec{a}'(t)$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération du mobile mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  et  $\vec{a}'$  est celle mesurée dans  $\mathcal{R}'$ .  $\vec{A}$  est l'accélération de  $\mathcal{R}'$  mesurée dans  $\mathcal{R}$ .

Les lois de composition de la vitesse et de l'accélération deviennent donc (voir Eqs. (2.23)) :

$$\vec{v}(t) = \vec{V} + \vec{v}'(t), \quad (2.24)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t). \quad (2.25)$$

Ainsi lorsque deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, les accélérations, d'un point, mesurées dans les deux référentiels, sont égales.

Puisque  $\vec{V}$  est une constante la position du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est une fonction linéaire du temps

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}t \quad (2.26)$$

En effet si la composante selon  $x$  de la vitesse  $\vec{V}$  est constante  $\frac{dX}{dt} = V_x = \text{cste}$  alors on a  $X(t) = V_x t + X_0$ . On obtient la même chose pour  $Y(t)$  et  $Z(t)$  pour finalement obtenir l'équation précédente. D'autre part nous pourrions supposer que le temps mesuré dans les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  peut être différent. Mais la cinématique Galiléenne nous impose que l'écoulement du temps doit être identique dans les deux référentiels. Néanmoins, les horloges utilisées par les deux observateurs peuvent ne pas coïncider à l'instant initial. Nous allons donc supposer que l'origine du temps utilisé dans les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  peut être différente. Ainsi, on introduit le temps  $t'$  associé au référentiel  $\mathcal{R}'$  et on réserve la notation du temps  $t$  pour le temps associé au référentiel  $\mathcal{R}$ . En cinématique Galiléenne on a nécessairement la relation  $t = t' + t_0$ . On en déduit que dans le cas où  $\mathcal{R}'$  a un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , les relations entre les coordonnées  $(\vec{r}', t')$  d'un évènement mesurées dans  $\mathcal{R}'$  et celles  $(\vec{r}, t)$  mesurées dans  $\mathcal{R}$  sont :

$$\begin{aligned} t' &= t - t_0, \\ \vec{r}'(t') &= \vec{r}(t) - \vec{V}t - \vec{R}_0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Cette transformation s'appelle la transformation de *Galilée*, dans le cas simple d'une translation rectiligne et uniforme le long de l'axe  $Ox$ , et pour le cas où la position des deux référentiels coïncide à  $t = t' = 0$  alors la transformation peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.28)$$

**Remarque :** La transformation de Galiléen Eq. (2.27) est en fait un cas limite de la transformation de *Lorentz* qui prévaut en mécanique

relativiste. On peut montrer que cette transformation s'écrit

$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \\x' &= \gamma (x - Vt) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.29}$$

où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  et où  $c$  est la vitesse de la lumière. A partir de la transformation de Lorentz on peut retrouver la transformation de Galilée dans le cas des faibles vitesses par rapport à la vitesse de la lumière  $V \ll c$ .



## Dynamique

On s'intéresse ici à déterminer les changements qui s'opèrent dans le mouvement d'un corps lorsqu'une ou plusieurs forces s'appliquent sur ce dernier.

Nous n'aborderons pas ici le problème de la dynamique dans toute sa généralité. Nous nous intéresserons à la dynamique d'un système très idéalisé appelé le point matériel. Le point matériel est un corps dont la masse est concentrée dans un volume infiniment petit. Cette première approche bien que très idéalisée, permet en fait de décrire, dans de nombreuses situations, le mouvement du centre de masse d'un solide étendu. La dynamique générale d'un solide étendu soumis à des forces ou en interaction avec d'autres corps sort du cadre de ce cours.

### 3.1 Première loi de Newton

C'est dans son célèbre ouvrage "Principes mathématiques de la philosophie naturelle (1686)" (<http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-29038>) que Newton formalise clairement la notion de force, dans l'énoncé de sa première loi :



FIGURE 3.1: *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, texte original (1686) et traduction par Mme La Marquise du Chastellet (1759)

*“Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état.”*

**Notion dynamique de la force :** Il peut y avoir mouvement sans force. La force change le mouvement.

Pour Newton, l'état de base du mouvement est le repos ou le mouvement rectiligne uniforme. De plus, la notion de force qui est introduite, est une notion dynamique. C'est à dire que la force est celle qui est responsable du changement du mouvement. La force fait sortir le système de son état de base. On se rappellera qu'il peut y avoir un mouvement sans force, la force change le mouvement.

Le principe d'inertie tel qu'exprimé par Newton suppose l'existence d'un référentiel absolu et supposé immobile. Une formulation moderne du principe d'inertie permet de définir le concept de référentiel *Galiléen* (également appelée *inertiel*) :

*“Dans un référentiel Galiléen, tout point matériel isolé (c'est-à-dire soumis à aucune force extérieure) est soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme” .”*

S'il existe un référentiel  $\mathcal{R}$  qui est Galiléen, alors il en existe une infinité. En effet, si le mouvement d'un point mesuré dans  $\mathcal{R}$  est rectiligne et uniforme alors son vecteur accélération est nulle. Or d'après l'équation (2.25), le vecteur accélération sera aussi mesuré comme nul dans tout autre référentiels en translation rectiligne et uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ . Donc tous les référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiels galiléen  $\mathcal{R}$  sont aussi des référentiels galiléen.

Newton postule l'existence d'un référentiel Galiléen absolu qui structure la notion de l'espace et du temps de l'univers. A partir de ce référentiel absolu, on peut, en principe, obtenir tous les référentiels galiléens qui sont en translation rectiligne et uniforme par rapport à ce référentiel Galiléen absolu. Le mouvement mesuré dans un référentiel galiléen quelconque peut en principe se déduire du mouvement mesuré dans le référentiel galiléen absolu, par la transformation de Galilée (voir Eqs. (2.27)). La notion de référentiel est aujourd'hui abandonnée.

Dans la pratique, lors d'une expérience de physique, où on utilise un solide indéformable réel comme référentiel, ce dernier ne pourra constituer un référentiel Galiléen que de manière approximative. Le degré d'approximation va dépendre du processus physique étudié. Par exemple le référentiel terrestre constitue un bon référentiel Galiléen, si l'on ne s'intéresse qu'à des mouvements sur des temps courts par rapport à la période de rotation de la Terre sur elle même, autrement dit la durée du jour (pendule, chute libre sur quelques mètres). En effet, dès que la durée des expériences deviendra comparable à la durée du jour, il faudra tenir compte du fait que vu depuis un référentiel géocentrique la Terre tourne sur elle même et qu'elle n'est donc pas un référentiel galiléen. Ensuite, mesurée dans un référentiel héliocentrique, la Terre tourne autour du soleil. On peut continuer en remarquant que mesuré dans le référentiel de Copernic, le soleil lui même possède un mouvement accéléré ...

## 3.2 Les forces

### 3.2.1 Définition

Dans un référentiel Galiléen, une force exercée sur un point matériel, modifie la vitesse de celui-ci. Par exemple, si l'on souhaite faire bouger un meuble qui est immobile, il faudra exercer une force sur ce meuble. Sa vitesse qui était nulle au départ deviendra non nulle. La vitesse étant une quantité vectorielle, la force doit aussi être un vecteur. La direction et le sens du vecteur force indiqueront dans quelle direction et dans quel sens la vitesse du corps sera modifiée. Une force est une quantité physique qui sera donc caractérisée par la donnée de trois quantités, *l'intensité de la force*, *la direction* dans laquelle elle est appliquée et son *sens* ou son orientation. C'est à dire qu'une fois donnée sa direction, il faut aussi préciser si on tire ou on pousse dans cette direction. La direction et le sens de la force seront donnés par la direction et le sens du vecteur force. L'intensité de la force sera donnée par la norme du vecteur force. Pour un rappel sur les vecteurs on pourra se référer à l'annexe B, page 83.

On précisera aussi le point sur lequel on exerce la force, c'est ce qu'on appelle le point d'application de la force. Comme ici on ne traitera presque qu'exclusivement de la dynamique d'un point matériel, la force s'exercera le plus souvent sur le point matériel considéré.

On prendra soin de distinguer les quantités vectorielles des quantités réelles en mettant une flèche au dessus comme  $\vec{F}$ . Par exemple, dans l'équation  $F = \|\vec{F}\|$ , le terme  $\vec{F}$  désigne un vecteur, dont la norme est notée  $F$ , sans la flèche puisque la norme d'un vecteur est un nombre réel (positif).

La dimension associée à la force est  $MLT^{-2}$  et l'unité internationale associée est le Newton qui correspond à  $1 \text{ kg.m.s}^{-2}$ .

### 3.2.2 Exemples de Forces

*La force de gravitation* La force de gravitation est une force d'interaction entre les masses. Une masse  $m_1$  exerce une force de gravitation  $\vec{F}_{12}$  sur une masse  $m_2$ , qui est proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les masses. En notant  $M_1$  et  $M_2$  les positions respectives des deux masses  $m_1$  et  $m_2$ , le vecteur force de gravitation peut s'écrire :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\vec{M_1M_2}\|^3} \vec{M_1M_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.1)$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire (de norme égale à 1) dans la direction et le sens de  $\vec{M_1M_2}$ , et  $r$  est la distance entre  $M_1$  et  $M_2$ . Ce qu'on peut écrire :

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{M_1M_2}}{\|\vec{M_1M_2}\|}$$

**Force** : Intensité, direction et sens  $\vec{F}$ . Dimension  $[\vec{F}] = MLT^{-2}$ . Unité : Newton (N). On précise aussi son point d'application

La constante de proportionnalité  $G$  est appelée la constante universelle de gravitation sa valeur est :  $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ .

Question : quand les masses sont concentrées en des points  $M_1$  et  $M_2$ , l'expression précédente est claire, mais pour deux objets étendus, comme la Terre et un satellite, où faut il prendre les points  $M_1$  et  $M_2$  ?

Remarques : la masse  $m_2$  subit aussi une force de gravitation due à la présence de la masse  $m_1$ . Cette force,  $\vec{F}_{21}$  est opposée à  $\vec{F}_{12}$  :

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (3.2)$$

Il s'agit d'un cas particulier de la troisième loi de Newton, appelée la loi des actions réciproques, ou loi de l'action et de la réaction qui sera étudié au chapitre ??.

Calculons la force de gravitation  $\vec{F}$  qui s'exerce sur un humain de masse  $m$ , provoquée par la masse  $M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$  de la Terre. Pour faire ce calcul, nous pouvons considérer que toute la masse  $M$  de la Terre est concentrée en son centre. Cette propriété de la force de gravitation est une conséquence du théorème de Gauss dont l'étude sort du cadre de ce cours.

Le rayon de la Terre étant  $R = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ , on obtient :

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^2} \vec{u}_r = m\vec{g}$$

où on a défini le vecteur  $\vec{g}$  :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R^2} \vec{u}_r \simeq -9.81 \vec{u}_r \text{ ms}^{-2}$$

$\vec{g}$  est un vecteur dirigé vers le centre de la Terre, c'est à dire vertical vers le bas, et qui a la dimension d'une accélération.  $\vec{g}$  est appelé *accélération de la pesanteur*.

La force de gravitation (3.1) est actuellement considérée comme une approximation (non-relativiste) de la théorie de la Relativité Générale, tout comme on l'a vu pour la transformation de Galilée à la fin du chapitre de Cinématique. Les interactions gravitationnelles ont une portée infinie et jouent un rôle clé en cosmologie. Ce sont elles qui gouvernent l'évolution de l'Univers. En Relativité Générale, les phénomènes gravitationnels sont encodés dans la courbure de l'espace-temps quadri-dimensionnel, et cette courbure est elle-même induite par la répartition des diverses formes de matières dans notre Univers. Les observations astrophysiques récentes (telles celles liées à l'observation d'ondes gravitationnelles émises lors de la coalescence de deux trous noirs en septembre 2015) sont toutes en accord avec les prédictions de la Relativité Générale. Par contre le comportement de la gravitation aux échelles subatomiques n'a pas encore été testé en laboratoire et reste donc inconnu. ■

*La force électrostatique* La Force électrostatique est la force fondamentale qui existe entre les charges qui se déplacent lentement par rapport à

Force de gravitation s'appliquant sur la masse  $m_2$  située à une distance  $r$  de la masse  $m_1$  :

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire dans la direction de  $m_1$  vers  $m_2$ . soit :  $\vec{u}_r = \frac{\vec{M_1M_2}}{\|M_1M_2\|}$

Le poids d'une masse  $m$  est la force de gravitation qu'exerce la Terre (de masse  $M$ ) sur la masse  $m$  situé à la surface de la Terre :

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{R^2} \vec{u}_r = m\vec{g};$$

$$\text{où } \vec{g} = -\frac{GM}{R^2} \vec{u}_r \simeq -9.81 \vec{u}_r \text{ ms}^{-2},$$

où  $R$  désigne le rayon de la Terre.  $\vec{g}$  est appelée *accélération de la pesanteur*

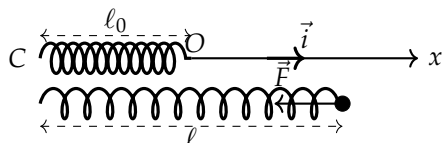


la vitesse de la lumière. C'est une force très importante, elle est en partie responsable de la structure de la matière. En effet elle est responsable de l'interaction entre les électrons de charge négative et les noyaux des atomes qui sont chargés positivement. Le courant dans un fil métallique est le résultat du déplacement des charges portées par les électrons du métal. La charge se mesure en Coulomb (C) et le courant représente la charge qui passe par seconde par la section du fil. Le courant se mesure en ampère (A), qui représente 1 Coulomb par seconde. L'expression de la force qu'exerce la charge  $Q_1$  sur la charge  $Q_2$  située à une distance  $r$  est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.3)$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  et  $\epsilon_0$  est une constante fondamentale, appelée la permittivité diélectrique du vide et dont la valeur est :  $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}$  Farad.m<sup>-1</sup>. L'expression de la force est très similaire à celle de la force de gravitation. La grande différence est que contrairement à la force de gravitation, la force électrostatique peut aussi être répulsive. En effet, si les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  sont de même signe alors la force électrostatique est répulsive et si les charges sont de signes opposés la force est attractive.

*Force de rappel élastique* La force de rappel élastique est la force qu'oppose certains matériaux quand on tente de les déformer. Elle est présente dans les ressorts, les amortisseurs à lames, les trampolines etc ...



La force électrostatique qui s'exerce sur une charge  $Q_2$  en  $M_2$  située à la distance  $r$  d'une charge  $Q_1$  en  $M_1$  :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r,$$

où  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$  et  $r = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ .

FIGURE 3.2: Modélisation du ressort.

Prenons un ressort que l'on pose sur une table horizontale. On fixe une des extrémités du ressort à la table en un point que l'on note C, et on note  $\ell_0$  la longueur du ressort. On étire le ressort d'une certaine quantité  $x$ , de telle sorte que la nouvelle longueur du ressort soit  $\ell = \ell_0 + x$ . On constate que le ressort exerce une certaine résistance à cet allongement. Il oppose une force dont le sens est opposé à la force de l'opérateur qui allonge le ressort, et dont la norme est proportionnelle à l'allongement  $x$ . C'est la loi de Hooke (scientifique britannique 1635–1703).

Si on note  $Ox$  l'axe dont la direction est le ressort et dont le sens est celui de l'allongement du ressort, alors on pourra écrire le vecteur force de rappel élastique de la façon suivante :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}, \quad (3.4)$$

Force de rappel d'un ressort :

$$\vec{F} = -kx\vec{i} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i},$$

où  $\ell_0$  est la longueur à vide et  $\ell$  la longueur actuelle du ressort.  $k$  est la raideur du ressort. Cette expression est valable quel que soit le signe de  $x$ . C'est à dire que l'expression est la même que le ressort soit étiré ou comprimé. On dira que l'expression est *algébrique*.

où  $\vec{i}$  est un vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $Ox$ . La constante  $k > 0$  est appelée raideur du ressort.

On remarque que cette équation est aussi valable dans le cas où le ressort est comprimé au lieu d'être étiré. En effet si on comprime le ressort, alors  $\ell < \ell_0$  donc  $x < 0$  et dans ce cas  $\vec{F}$  est orienté dans le sens positif de l'axe  $Ox$ . Ce qui est bien le sens opposé à la force exercée par l'opérateur qui comprime le ressort dans le sens négatif de l'axe  $Ox$ . On essaiera toujours d'écrire des expressions valables quel que soit le signe des variables composant l'expression. On dira alors que l'expression est *algébrique*.

La force qu'exerce un matériau qui résiste à la déformation ne reste proportionnelle à la déformation que si la déformation reste faible. En effet, si on le déforme trop fortement, le matériau ne reviendra plus à sa forme initiale. On entre dans le domaine de la déformation dite "*plastique*".

*Frottement visqueux – Modèle de Stokes* Un solide qui se déplace dans un fluide (un liquide ou un gaz) subit une force de frottement, qui dépend de la vitesse relative entre le mobile et le fluide. La norme de cette force augmente avec la norme de la vitesse. Cette force résulte de l'interaction entre les atomes ou molécules du solide avec les atomes ou molécules constituant le fluide. Si la vitesse relative entre le mobile et le fluide n'est pas trop élevée, on pourra considérer que la norme de la force est proportionnelle à la norme de la vitesse. On écrira :

$$\vec{F} = -\lambda\vec{v} \quad (3.5)$$

où le coefficient de frottement  $\lambda$  est une constante positive qui dépend de la nature du fluide et de la nature et de la forme du solide. Il ne s'agit pas d'une force fondamentale. Il s'agit d'une expression phénoménologique qui résulte de constatations expérimentales. Cette force est la résultante de multiples interactions fondamentales entre les molécules constituant le solide et le fluide. Ce modèle de force de frottement appelée force de Stokes (du nom du physicien et mathématicien irlandais (1819–1903)), n'est valable que pour des vitesses faibles, ou pour un fluide très visqueux. Dans le cas où le solide est une sphère de rayon  $r$ , le coefficient de frottement est  $\lambda = 6\pi r\mu$ , où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide. Pour des vitesses élevées, la force de frottement dépend du carré de la vitesse.

Frottement visqueux

$$\vec{F} = -\lambda\vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse du mobile par rapport au fluide.

*Frottement solide* A la suite de Guillaume Amontons (1699), c'est Charles Coulomb (1736-1806) qui a étudié expérimentalement de façon systématique le frottement entre deux solides dans son mémoire intitulé "*Théorie des machines simples*" (<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095299>). Supposons un solide, immobile, posé sur une table horizontale. Essayons

de faire bouger le solide en exerçant une force horizontale  $\vec{F}$ . C. Coulomb constate qu'il faut exercer une force dont la norme est supérieure à une valeur critique qui est proportionnelle au poids du solide. C'est à dire que pour déplacer le solide il faut que :  $\|\vec{F}\| > k_s \|\vec{p}\| = k_s mg$ , où le coefficient de proportionnalité  $k_s$  est appelé coefficient de frottement statique.

On en déduit, qu'en plus de la force  $\vec{R}_n$  qui est orthogonale au support et qui s'oppose au poids du solide, le support exerce donc une force de frottement  $\vec{f}_s$  qui s'oppose à la force appliquée  $\vec{F}$  et qui est parallèle au support. La force  $\vec{f}_s$  est appelée force de *frottement solide statique*, c'est la force qui s'exerce tant que le solide est immobile par rapport au support. Sa norme est toujours plus faible que  $k_s mg$  :  $\|\vec{f}_s\| < k_s mg$ .

Cette loi du frottement solide peut être généralisée en remarquant que la norme de la réaction orthogonale au support  $\vec{R}_n$ , est égale à la norme du poids,  $\|\vec{R}_n\| = mg$ . On aura donc :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.} \quad (3.6)$$

C'est cette dernière expression plus générale qui est considérée comme la loi du frottement solide. La norme de la force de frottement exercée par le support (et parallèle à ce dernier) ne peut pas être supérieure à  $k_s \|\vec{R}_n\|$  où  $\vec{R}_n$  est la force exercée par le support et qui est orthogonale à ce dernier.

Lorsque la force appliquée  $\vec{F}$  est suffisamment grande pour que le solide se mette en mouvement, c'est à dire que  $\|\vec{F}\| > k_s \|\vec{R}_n\|$ , alors la force de frottement  $\vec{f}_c$  que le support exerce sur le solide a une norme plus faible que lorsque le solide était au repos. C'est à dire que  $\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\|$ . La force  $\vec{f}_c$  est appelée *force de frottement solide cinétique*. C'est la force de frottement exercée par le support lorsque le solide est en mouvement par rapport au support. L'expérience montre que :

$$\|\vec{f}_c\| = k_c \|\vec{R}_n\|, \quad (3.7)$$

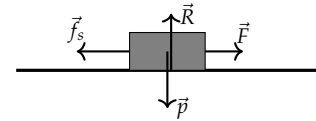
où  $k_c$  est le coefficient de frottement cinétique. Comme  $\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\|$  et  $\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|$ , on a aussi :

$$k_c < k_s.$$

Un des résultats marquant des expériences de Amontou et Coulomb est que les coefficients de frottement  $k_s$  et  $k_c$  ne dépendent que de la nature des matériaux en contact, et ne dépendent pas de la géométrie des surfaces en contact. Le frottement solide ne constitue pas une interaction fondamentale. Cette force résulte de l'interaction entre les atomes et/ou molécules des surfaces qui sont en contact. L'étude de l'origine microscopique du frottement, et en particulier des lois de Coulomb est aujourd'hui un sujet de recherche actif qui est appelé la *tribologie*.

Frottement solide :

Pour déplacer le solide il faut que,  $\|\vec{F}\| > k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$



La norme de la force de frottement solide qui s'applique sur un solide immobile  $\vec{f}_s$  vérifie :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$$

$k_s$  est le coefficient de frottement statique.

La norme de la force de frottement solide qui s'applique sur un solide en mouvement  $\vec{f}_c$  vérifie :

$$\|\vec{f}_c\| = k_c \|\vec{R}_n\|; \vec{R}_n \perp \text{support.}$$

$k_c$  est le coefficient de frottement cinétique (ou dynamique).

$$\|\vec{f}_c\| < \|\vec{f}_s\| \Rightarrow k_c < k_s.$$

### 3.3 Seconde loi de Newton

#### 3.3.1 Principe fondamental de la dynamique

C'est dans sa seconde loi que Newton précise la façon dont la force affecte le mouvement. La force fait changer la quantité de mouvement. La quantité de mouvement est en générale notée  $\vec{p}$  (ne pas confondre avec le poids). La quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  et possédant une vitesse  $\vec{v}$  est une quantité vectorielle :

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

La seconde loi de Newton, aussi appelée Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) peut s'énoncer comme suit : Dans un référentiel Galiléen, la somme  $\vec{F}$  des forces appliquées sur le point matériel, induit une variation de sa quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.8)$$

Si la masse  $m$  reste constante au cours du temps alors

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Le PFD Eq. (3.8) devient donc :

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (3.9)$$

On remarquera que cette équation est invariante quelque soit le choix du référentiel Galiléen. En effet nous avons vu que dans le cas d'une transformation de Galilée (translation rectiligne uniforme), alors l'accélération était un invariant. Inversement, il est important de se rappeler que cette équation n'est valide que dans un référentiel Galiléen.

Comme  $\vec{a}$  est la dérivée seconde de la position  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  et qu'en général les forces dépendent de la position (ou même de la vitesse),  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ , le PFD est une relation entre la position, la dérivée première et la dérivée seconde de la position. C'est ce qu'on appelle une *équation différentielle*. Dans le cas particulier de la dynamique, on l'appelle l'équation différentielle du mouvement.

Cette équation permet en principe d'obtenir le vecteur position à chaque instant  $t$  connaissant la position et la vitesse à un instant initial. En effet, supposons connus le vecteur position  $\vec{r}(t)$  et le vecteur vitesse  $\vec{v}(t)$ , à l'instant  $t$ . On connaît donc la résultante des forces  $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$ . A l'aide du PDF, nous obtenons le vecteur accélération  $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m}$ , toujours à l'instant  $t$ . Or dans la limite où  $\Delta t$  est très petit, on peut écrire :

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\Delta t}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t)).$$

**Principe fondamental de la dynamique (PFD) :** Soit  $\vec{F}$  la somme des forces appliquées sur un point matériel de masse  $m$ , dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

où,  $\vec{p} = m\vec{v}$  est la quantité de mouvement du point matériel de vitesse  $\vec{v}$ . Si la masse  $m$  ne varie pas alors le PFD devient :

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

On obtient ainsi la vitesse à l'instant  $t + \Delta t$ . De la même façon on peut écrire pour le vecteur position  $\vec{r}$  :

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \vec{v}(t).$$

On a donc obtenu la vitesse et la position à l'instant  $t + \Delta t$ , ce qui permet d'en déduire la résultante des forces à l'instant  $t + \Delta t$  et donc l'accélération à l'instant  $t + \Delta t$ . On peut donc, en principe, itérer et obtenir ainsi l'équation horaire  $\vec{r}(t)$  pour tout instant  $t$ .

### 3.3.2 Cas particulier où la somme des forces est nulle

Lorsque la somme vectorielle des forces appliquées  $\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F}$  est nulle :

$$\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F} = \vec{0}, \quad (3.10)$$

alors en vertu du PFD, l'accélération du mobile est nulle  $\vec{a} = \vec{0}$ . On a vu dans le chapitre précédent (voir section 2.4.2, 22) que dans ce cas le mouvement est *rectiligne et uniforme*.

Un mobile isolé possède donc un mouvement rectiligne et uniforme. On retrouve ainsi la première loi de Newton.

### 3.3.3 Cas particulier de l'équilibre

Lorsque le corps est immobile, sa vitesse est nulle à tout instant et donc son accélération est nulle aussi. Dans ce cas particulier, la seconde loi de Newton implique que la somme vectorielle des forces appliquées  $\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F}$  est nulle :

$$\sum_{\vec{F} \text{ appliquées}} \vec{F} = \vec{0}. \quad (3.11)$$

## 3.4 Résoudre un problème de dynamique

Nous résumons dans cette section les différentes étapes à franchir pour résoudre un problème de dynamique du point matériel.

1. **Identification du système et du référentiel** : il faut dans un premier temps bien identifier le système qui nous intéresse. En général, il s'agira d'un point matériel qu'il faudra identifier. Puis, on choisit un référentiel galiléen muni de son système d'axes cartésiens  $Oxyz$ . Le plus souvent, il s'agira du référentiel terrestre qui sera considéré galiléen dans une bonne approximation.
2. **Bilan des forces** : on établit le bilan des forces qui s'appliquent sur le point matériel de masse  $m$  dont on cherche à prédire le mouvement.

3. **Composantes dans un repère cartésien** : on détermine les composantes de chacune des forces, ou si c'est possible directement, de la somme  $\vec{F}$  vectorielle des forces, sur une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  bien adaptée au problème. Ces composantes sont en général des fonctions de la position et de la vitesse du point matériel considéré. On obtiendra donc une relation du type :

$$\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$$

où les trois composantes  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont en fait des fonctions des trois composantes du vecteur vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et des trois composantes du vecteur position  $(x, y, z)$ , dans la même base.

4. **PFD** : On pose alors le PFD, qui est une relation vectorielle, mais qui peut aussi s'écrire composante par composante dans la base orthonormée. En effet :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \end{cases} \quad (3.12)$$

On obtient donc en général trois équations différentielles du second ordre, c'est à dire trois équations reliant les composantes de la position, de ses dérivées et de ses dérivées secondes. C'est ce qu'on appelle les *équations différentielles du mouvement*.

5. **Solution des équations différentielles du mouvement** : le mouvement du point matériel est décrit par les trois composantes  $(x(t), y(t), z(t))$  du vecteur position  $\vec{OM}(t)$  à chaque instant  $t$ . Ce sont les *équations horaires* (ou équations paramétriques) du mouvement. Les trois fonctions du temps  $(x(t), y(t), z(t))$  sont une solution des équations différentielles Eq. 3.12, qui satisfait aux conditions initiales. En effet, comme en général les équations différentielles du mouvement sont du second ordre, pour obtenir une solution unique, il faut connaître la position et la vitesse du point matériel à un instant donné, pris souvent comme l'origine des temps, d'où l'appellation *conditions initiales*. Il faut donc savoir résoudre les équations différentielles du mouvement, obtenir les solutions possibles de ces équations. Puis choisir, parmi ces solutions, celle qui correspond aux conditions initiales de notre problème.

Tel est le programme que nous allons appliquer dans la suite de ce chapitre sur plusieurs exemples simples.

### 3.5 Exemples d'application

Dans cette section, la dynamique est décrite dans le référentiel terrestre que l'on considère galiléen.

**Equations différentielles du mouvement** : le PFD consiste en trois équations différentielles, appelées les équations différentielles du mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = F_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \end{cases}$$

où  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  sont les trois composantes de la résultante des forces et  $x, y, z$  les composantes du vecteur position  $\vec{OM}$  du point matériel, dans une base orthonormée.

### 3.5.1 Chute d'un corps proche de la surface de la Terre

#### 1. Rectiligne sans frottement :

On lâche d'une hauteur  $h$  sans vitesse initiale une bille, de masse  $m$ , que l'on considère comme ponctuelle. On néglige les frottements de la bille sur l'air. On veut connaître sa hauteur à chaque instant  $t$ . On applique le programme de la section précédente :

- (a) **Identification du système :** Le système est la bille de masse  $m$ . Les conditions initiales sont bien spécifiées : la position est donnée par la hauteur  $h$  de la bille et la vitesse initiale est nulle.
- (b) **Bilan des forces :** au cours de sa chute, la bille n'est soumise qu'à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
- (c) **Composantes dans un repère cartésien :** on choisit un repère cartésien, où l'axe  $Oz$  est vertical orienté vers le haut et porté par un vecteur unitaire  $\vec{k}$ . On aura donc  $\vec{P} = -mg\vec{k}$ , où  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ .
- (d) **PFD :** on applique le PFD :  $m\vec{a} = -mg\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{k}$ . Or  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ , donc :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g\end{aligned}$$

Ce sont les trois équations différentielles du mouvement.

- (e) **Solution des équations différentielles du mouvement :** la solution des équations différentielles du mouvement est ici très simple, en effet il suffit d'intégrer (de prendre la primitive) ces équations pour obtenir les composantes du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \text{Cte} \\ \dot{y} &= \text{Cte}' \\ \dot{z} &= -gt + \text{Cte}''\end{aligned}$$

où  $\text{Cte}$ ,  $\text{Cte}'$  et  $\text{Cte}''$  sont des constantes. Comme à l'instant initial ( $t = 0$ ), la vitesse est nulle, on doit choisir ces 3 constantes égales à zéro. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \\ \dot{z} &= -gt\end{aligned}$$

Pour obtenir les équations paramétriques du mouvement, il suffit d'intégrer les composantes du vecteur vitesse pour obtenir les

composantes  $(x, y, z)$  :

$$\begin{aligned}x &= \text{Cte} \\y &= \text{Cte}' \\z &= -\frac{1}{2}gt^2 + \text{Cte}''\end{aligned}$$

où Cte, Cte' et Cte'' sont de nouvelles constantes. Or à l'instant  $t = 0$ , on sait que  $z = h$  et on peut choisir  $x(t = 0) = y(t = 0) = 0$ , donc Cte = 0, Cte' = 0 et Cte'' = h. Donc, les équations horaires du mouvement sont :

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= 0 \\z &= h - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

2. **Lancé d'un projectile** : On lance un ballon de masse  $m$ , avec une vitesse initiale qui fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On note  $v_0 \equiv \|\vec{v}_0\|$  la norme de  $\vec{v}_0$ . On néglige les frottements ainsi que la poussée d'Archimède que l'air exerce sur le ballon. On considère le ballon comme une masse ponctuelle.

- (a) **Identification du système** : Le système est le ballon de masse  $m$ .
- (b) **Bilan des forces** : Au cours de sa trajectoire, le ballon n'est soumis qu'à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ .
- (c) **Composantes dans un repère cartésien** : Le repère cartésien  $Oxyz$  est choisi de telle sorte que le plan  $Oxz$  soit vertical et contienne le vecteur vitesse initial  $\vec{v}_0$ ; l'axe  $Oz$  étant vertical, orienté vers le haut et l'axe  $Ox$  horizontal. On choisit la position initiale du ballon pour origine  $O$ . Dans ce repère le poids du ballon s'écrit simplement :  $\vec{P} = -mg\vec{k}$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire porté par l'axe  $Oz$ .
- (d) **PFD** : Le PFD s'écrit simplement  $m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ . Comme  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ , le PFD est équivalent à :

$$m\vec{a} = \vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

- (e) **Solution des équations différentielles du mouvement** : Les trois équations différentielles du mouvement sont simples et indépendantes les unes des autres. On obtient les composantes de la vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  en intégrant par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= C_1 \\ \dot{y}(t) &= C_2 \\ \dot{z}(t) &= -gt + C_3,\end{aligned}$$



où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes qu'il faut choisir pour que les composantes de la vitesse soient conformes aux conditions initiales. Or à l'instant  $t = 0$ ,

$$\vec{v}(t = 0) = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{k}$$

donc  $C_1 = v_0 \cos \alpha$ ,  $C_2 = 0$  et  $C_3 = v_0 \sin \alpha$ . Les composantes de la vitesse sont donc :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(t) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= -gt + v_0 \sin \alpha\end{aligned}$$

Pour obtenir les composantes  $(x(t), y(t), z(t))$  du vecteur position  $\overrightarrow{OM}(t)$ , il suffit d'intégrer par rapport au temps les composantes de la vitesse. On obtient :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \alpha t + D_1 \\ y(t) &= D_2 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + D_3,\end{aligned}$$

où les constantes  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont des constantes qu'il faut déterminer pour que  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  soient conformes aux conditions initiales. Comme, on a choisi l'origine  $O$  de notre repère comme la position initiale du ballon,  $x(t = 0) = y(t = 0) = z(t = 0) = 0$ . On en déduit que  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$  et  $D_3 = 0$ . Les équations paramétriques de la trajectoire sont donc :

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t\end{aligned}$$

#### Remarques

- La composante horizontale du mouvement (sur l'axe  $Ox$ ) est uniforme. En effet,  $\dot{x}$  est constant (ne dépend pas du temps). La composante verticale est uniformément variée.
- On peut obtenir l'équation de la trajectoire sous la forme  $z = f(x)$ . En effet, à l'aide de la première équation, on obtient  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ . En utilisant cette expression dans la troisième équation, on

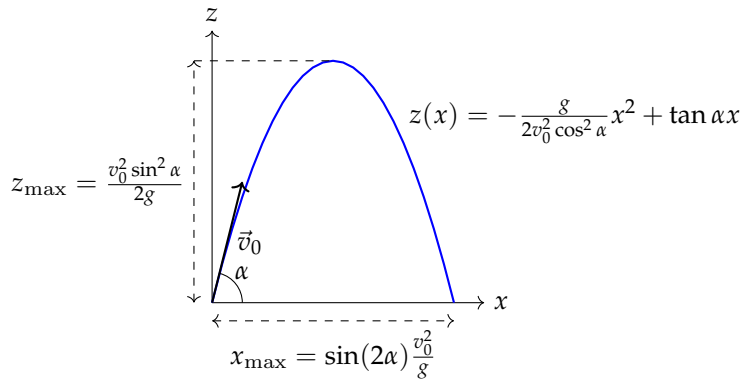


FIGURE 3.3: Lancé d'un projectile. La portée notée  $x_{\max}$ , et le sommet de la trajectoire noté  $z_{\max}$ .

obtient :

$$\begin{aligned}
 z(x) &= -\frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \\
 &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x \\
 &= x \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right).
 \end{aligned}$$

C'est une parabole dans le plan  $Oxz$  qui passe par le point  $(x = 0, z = 0)$  et par le point  $(x = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{v_0^2}{g}, z = 0)$ . On en déduit que la portée  $x_{\max}$  du projectile, c'est à dire la distance horizontale, maximale atteinte par le projectile est :

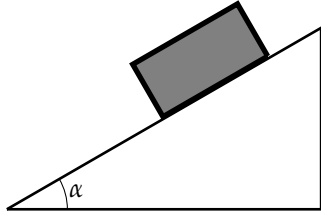
$$x_{\max} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{v_0^2}{g} = \sin(2\alpha) \frac{v_0^2}{g},$$

où on a utilisé la relation trigonométrique :  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ . On en déduit que pour une norme  $v_0$  donnée, la portée maximale est atteinte quand  $\sin(2\alpha)$  est maximum, c'est à dire quand  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ , soit  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , c'est à dire  $\alpha = 45^\circ$ .

La parabole étant une courbe symétrique par rapport à son maximum, la hauteur maximale atteinte par le ballon, se produit lorsque  $x = \frac{x_{\max}}{2}$ . En remplaçant  $x = \frac{x_{\max}}{2} = \sin(2\alpha) \frac{v_0^2}{2g}$  dans l'expression de  $z(x)$ , on obtient la hauteur maximale  $z_{\max}$  atteinte par le ballon :

$$z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

3. **Rectiligne avec frottement solide :** On considère un mobile de masse  $m$  qui glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Dans un premier temps nous allons nous intéresser aux conditions pour que le corps de masse  $m$  soit à l'équilibre. Il est clair que si l'angle d'inclinaison  $\alpha$  n'est pas trop grand, le corps restera immobile.

FIGURE 3.4: Corps de masse  $m$  sur un plan incliné.

Si on augmente progressivement l'angle  $\alpha$ , il existera une valeur de  $\alpha = \alpha_s$  à partir de laquelle le mobile commencera à glisser sur le plan incliné. C'est à dire que pour  $\alpha < \alpha_s$  le corps restera immobile. La question que nous nous posons est quelle est la valeur de cet angle  $\alpha_s$  ou plus précisément comment dépend-il du coefficient de frottement  $k_s$  et de la masse  $m$  du mobile.

Supposons donc que le corps de masse  $m$  est à l'équilibre sur le plan incliné. Sa vitesse est nulle à tout instant et donc son accélération est aussi nulle à tout instant. La seconde loi de Newton permet donc d'écrire que

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0},$$

où  $\vec{P} = m\vec{g}$  est le poids de  $A$  et  $\vec{R}$  est la force exercée par le plan incliné (c'est à dire le support), sur le mobile. On peut décomposer  $\vec{R}$  comme la somme de deux vecteurs orthogonaux :  $\vec{R}_n$  et  $\vec{f}_s$ .  $\vec{R}_n$  est orthogonale au support et  $\vec{f}_s$  est parallèle au support. Cette dernière correspond à la force de frottement solide statique (voir section 3.2.2, page 34).

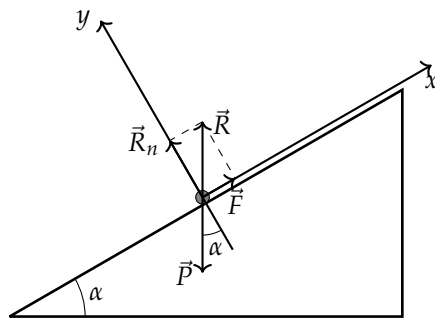


FIGURE 3.5: Contact avec frottement sur un plan incliné.

Il est avantageux de choisir un système d'axe  $Oxy$ , avec  $Ox$  parallèle et  $Oy$  perpendiculaire au support. On note  $(\vec{i}, \vec{j})$  la base orthonormée associée. En décomposant les vecteurs forces dans cette base, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= f_s \vec{i} + R_n \vec{j} \\ \vec{P} &= -mg (\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}).\end{aligned}$$

Ce qu'on peut aussi écrire :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} f_s \\ R_n \end{pmatrix}; \quad \vec{P} = -mg \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

La relation vectorielle  $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$  donne donc deux équations :

$$\begin{aligned} f_s - mg \sin \alpha &= 0 \\ R_n - mg \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} f_s &= mg \sin \alpha \\ R_n &= mg \cos \alpha \end{aligned}$$

En effectuant le rapport entre les deux équations, on obtient :

$$\tan \alpha = \frac{f_s}{R_n}. \quad (3.13)$$

L'expérience montre que la norme de la force de frottement exercée par le support sur  $A$  vérifie l'inégalité (voir Eq. 3.6, page 35) :

$$\|\vec{f}_s\| < k_s \|\vec{R}_n\|, \quad (3.14)$$

où  $k_s$  est le coefficient de frottement solide statique que nous avons défini précédemment (voir Eq. (3.6), page 35). En utilisant l'Eq. (3.13), on en déduit que pour que  $A$  reste à l'équilibre, il faut que l'angle d'inclinaison vérifie :

$$\tan \alpha < k_s.$$

Si on définit l'angle critique  $\alpha_s$  tel que  $\tan \alpha_s = k_s$ , alors  $A$  sera en équilibre tant que  $\alpha < \alpha_s$ . Lorsque  $\alpha \geq \alpha_s$ , le support ne peut plus fournir une force de frottement suffisante pour s'opposer à la composante du poids le long de la pente.

On peut maintenant s'intéresser au cas où il y a mouvement. Dans ce cas la force de frottement que nous noterons  $\vec{f}_c$  n'est plus exactement la même. On a vu que lorsqu'il y a un mouvement relatif entre le solide et son support, l'intensité de force de frottement parallèle au support  $\|\vec{f}_c\|$  est proportionnelle à la composante orthogonale de la réaction du support  $\|\vec{R}_n\|$  (voir équation 3.7, page 35) :

$$\|\vec{F}\| = k_c \|\vec{R}_n\|$$

et  $k_c$  est le coefficient de frottement cinétique qui vérifie  $k_c < k_s$ . La résolution complète de cet exemple sera traité en TD. Il suffit de décomposer le principe fondamental de la dynamique sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  que nous avons défini plus haut.

4. **Rectiligne avec frottement visqueux :** On reprend le problème de la chute rectiligne de la bille de la section 1, mais on considère que la bille est dans un fluide visqueux. On lâche donc une bille de masse  $m$  d'une hauteur  $h$  sans vitesse initiale.

- (a) **Bilan des forces :** en plus du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  on ajoute dans notre modélisation la force de frottement visqueux (voir Eq. (3.5), page 34)  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse de la bille à chaque instant.
- (b) **Composantes dans un repère cartésien :** dans le même repère, en plus de  $\vec{P} = -mg\vec{k}$ , on aura  $\vec{F} = -\lambda(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$ , où  $(v_x, v_y, v_z)$  sont les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$  et  $\lambda$  est une constante.
- (c) **PFD :** Comme  $\vec{a} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}$  le PFD est équivalent aux trois équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} m\dot{v}_x = -\lambda v_x \\ m\dot{v}_y = -\lambda v_y \\ m\dot{v}_z = -\lambda v_z - mg \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{v}_x + \frac{\lambda}{m}v_x = 0 \\ \dot{v}_y + \frac{\lambda}{m}v_y = 0 \\ \dot{v}_z + \frac{\lambda}{m}v_z = -g \end{array}$$

Les composantes de la vitesse vérifient donc trois équations différentielles indépendantes.

**Attention :** Il faut bien comprendre que lorsqu'on écrit  $\dot{v}_x + \frac{\lambda}{m}v_x = 0$ , il s'agit d'une relation entre la fonction  $v_x(t)$  et sa dérivée par rapport au temps  $\dot{v}_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$  qui doit être vérifiée à chaque instant  $t$ . C'est ce qu'on appelle une équation différentielle. Elle est du premier ordre les dérivées d'ordre plus élevé n'interviennent pas.

(d) **Solution des équations différentielles du mouvement :**

i. **Solution pour la composantes  $x$  et  $y$  :** Les équations différentielles satisfaites par  $v_x(t)$  et par  $v_y(t)$  sont identiques. Il s'agit de trouver l'ensemble des fonctions  $f(t)$  qui vérifie la relation

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0, \quad (3.15)$$

où  $f(t)$  représente  $v_x(t)$  ou  $v_y(t)$  et on a défini  $\tau$  de telle sorte que la constante  $\frac{\lambda}{m}$  soit égale à  $\frac{1}{\tau}$  soit

$$\tau = \frac{m}{\lambda}.$$

On remarque que  $\tau$  a la dimension d'un temps. Montrer le. On peut aussi mettre l'équation (3.15) sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = -\frac{1}{\tau}f(t).$$

On cherche donc l'ensemble des fonction  $f(t)$  qui est proportionnelle à sa dérivée et dont le facteur de proportionnalité est  $-\frac{1}{\tau}$ .

La fonction qui est proportionnelle à sa dérivée est la fonction exponentielle (c'est une des définition de la fonction exponentielle). En effet, soit

$$f(t) = Ce^{Kt},$$

où  $C$  et  $K$  sont des constantes réelles. La dérivée de  $f(t)$  est :

$$\frac{df}{dt} = KCe^{Kt} = Kf(t).$$

La dérivée de  $f(t)$  est bien proportionnelle à  $f(t)$  et la constante de proportionnalité est  $K$ . En prenant  $K = -\frac{1}{\tau}$ , on obtient l'ensemble des fonctions  $f(t)$  qui vérifie l'équation différentielle Eq. (3.15).

On en conclut que :

L'ensemble des fonctions  $f(t)$  solution de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0,$$

est

$$f(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

**Remarque :** l'équation différentielle, Eq. (3.15) possède une infinité de solutions. En effet, il y a une solution pour chaque valeur de la constante  $C$ . Déterminer la valeur de la constante  $C$ , c'est déterminer une des solutions de l'équation différentielle. C'est parce que l'équation différentielle est du premier ordre que chaque solution n'est déterminée que par une seule constante  $C$ .

On en déduit que les composantes  $x$  et  $y$  de la vitesse sont de la forme  $v_x(t) = C_x e^{-\frac{t}{\tau}}$  et  $v_y(t) = C_y e^{-\frac{t}{\tau}}$ , où  $C_x$  et  $C_y$  sont des constantes, que l'on choisi pour que  $v_x(t)$  et  $v_y(t)$  se conforment aux conditions initiales.

Comme ici,  $v_x(t=0) = v_y(t=0) = 0$ , on en déduit que  $C_x = C_y = 0$ . Bien sûr, ce résultat était prévisible, le mouvement de la bille reste le long de la verticale. Le frottement visqueux ne va pas dévier la trajectoire de la bille, il va juste la freiner. Mais en passant, nous avons appris à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre.

- ii. **Solution pour la composantes  $z$  :** L'équation différentielle vérifiée par  $v_z(t)$  est un peu différente

$$\dot{v}_z(t) + \frac{\lambda}{m}v_z(t) = -g.$$

En effet le membre de gauche est identique au cas précédent, mais le membre de droite n'est pas nul, mais égale à une constante,

**Solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre :** L'ensemble des fonctions  $f(t)$  solution de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0,$$

est

$$f(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

$-g$ . On dit que l'équation n'est pas *homogène*, ou qu'elle a un *second membre*.

On cherche donc l'ensemble des fonctions  $f(t)$  qui vérifie :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = a_0 \quad (3.16)$$

où  $a_0$  est une constante connue (ici  $a_0 = -g$ ) et  $\tau = \frac{m}{\lambda}$  comme précédemment. Montrons que cette équation différentielle, Eq. (3.16), peut se ramener à l'équation différentielle précédente, Eq. (3.15).

En effet, on peut écrire l'Eq. (3.16) de la façon suivante :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) - a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}(f(t) - \tau a_0) = 0.$$

On définit une nouvelle fonction  $u(t)$  telle que :

$$u(t) = f(t) - \tau a_0. \quad (3.17)$$

Or, on remarque que

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dt}'$$

puisque  $\tau a_0$  est une constante et que donc sa dérivée est nulle.

On en déduit que l'équation différentielle Eq. (3.16) peut s'écrire en fonction de  $u(t)$  de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = 0,$$

ce qui est bien identique à l'équation différentielle précédente, Eq. (3.15). L'ensemble des solution est donc :

$$u(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}},$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque. En se rappelant la définition de  $u(t)$  donné par l'Eq. (3.17), on obtient l'ensemble des solutions de l'équation différentielle Eq. (3.16) :

$$f(t) = u(t) + \tau a_0 = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \tau a_0.$$

On en déduit que la composante  $z$  de la vitesse est donnée par la relation suivante :

$$v_z(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g,$$

où on a simplement remplacé  $a_0$  par  $-g$  et  $C$  est une constante réelle quelconque que nous allons déterminer pour que  $v_z(t)$  soit bien conforme aux conditions initiale.

La bille étant lâchée sans vitesse initiale, on en déduit que  $v_z(t = 0) = 0$ , et comme  $e^0 = 1$ , on obtient :

$$v_z(t = 0) = 0 = C - \tau g$$

**Equation différentielle du premier ordre avec second membre :** L'ensemble des solutions  $f(t)$  de l'équation différentielle du premier ordre, avec second membre :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = a_0$$

est :

$$f(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \tau a_0$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

et donc,

$$C = \tau g.$$

On en déduit la vitesse de la bille à chaque instant  $t$

$$v_z(t) = \tau g e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau g,$$

ou encore :

$$v_z(t) = -g\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \quad \text{avec } \tau \equiv \frac{m}{\lambda}.$$

Comme le terme  $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  est toujours positif  $v_z(t)$  est négatif. Ce qui était attendu, puisque le mouvement de la bille est vertical vers le bas, et que nous avons choisi l'orientation de l'axe  $Oz$  vers le haut. Le vecteur vitesse est donc orienté vers le bas et est opposé au vecteur unitaire  $\vec{k}$ . Autrement dit,  $\vec{v}(t) = v_z(t)\vec{k}$ , avec  $v_z < 0$ .

Le graphe de la fonction  $v_z(t)$  en fonction du temps  $t$  est présenté sur la figure 3.6.

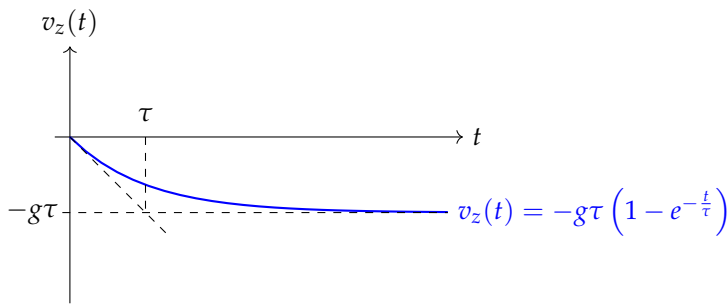


FIGURE 3.6: Composante verticale de la vitesse en fonction du temps. Quand  $t \gg \tau$ ,  $v_z(t) \simeq -g\tau$ . La droite tangente au graphe de la fonction  $v_z(t)$ , au point  $t = 0$ , intersecte l'asymptote  $v_z = -g\tau$ , au point de coordonnées  $(\tau, -g\tau)$

On en déduit la position de la bille en prenant une primitive de  $v_z(t)$  pour obtenir  $z(t)$ . On obtient :

$$z(t) = -g\tau \left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + C \Rightarrow z(t) = -g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + C.$$

où  $C$  est une constante qu'il faut choisir pour que  $z(t)$  vérifie bien la condition initiale  $z(t = 0) = h$  ce qui donne :

$$h = -g\tau^2 + C \Rightarrow C = h + g\tau^2.$$

On obtient donc la cote  $z(t)$  de la bille en fonction du temps  $t$  :

$$z(t) = h - g\tau^2 \left(\frac{t}{\tau} + e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right).$$

### Remarques

- On vérifie simplement que  $\tau$  possède bien la dimension d'un temps  $[\tau] = T$  et que donc les expressions donnant  $v_z(t)$  et  $z(t)$  sont correctement dimensionnées.



— Lorsque  $t \gg \tau$  alors  $e^{-\frac{t}{\tau}} \ll 1$ . On peut donc négliger le terme exponentiel dans l'expression qui donne  $v_z(t)$  ainsi que dans celle donnant  $z(t)$ . On a donc :

$$t \gg \tau \Rightarrow \begin{cases} v_z \simeq -g\tau = -\frac{mg}{\lambda} \\ z(t) \simeq h - g\tau t = h - \frac{mg}{\lambda}t \end{cases}$$

C'est à dire que la vitesse est constante et le mouvement devient uniforme (voir figure 3.6). On dit que la bille possède une *vitesse limite* dont la norme  $v_{\text{lim}}$  est donnée par

$$v_{\text{lim}} = g\tau = \frac{mg}{\lambda}.$$

### 3.5.2 Oscillateur harmonique

On considère une bille de masse  $m$ , considérée comme ponctuelle qui est accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . L'autre extrémité du ressort est fixée en un point C. A l'instant initial que l'on prendra  $t = 0$ , on étire le ressort d'une quantité  $x_0$ , par rapport à sa position au repos, et on lance la bille avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ . Le mouvement de la bille et du ressort est horizontal et reste le long d'un axe  $Ox$ , porté par le vecteur unitaire  $\vec{i}$ , et dont l'origine  $O$  correspond à la position au repos. On néglige la masse du ressort ainsi que tous les frottements possibles. Le mouvement de la masse est un mouvement périodique d'oscillations, qui se répètera infiniment puisqu'on a négligé les forces de frottement.

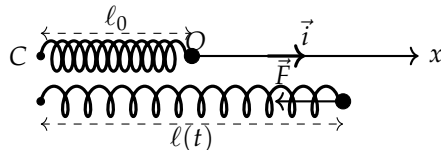


FIGURE 3.7: Bille de masse  $m$  accrochée à un ressort.

1. **Identification du système :** Le système étudié est la bille de masse  $m$  qui est accrochée au ressort. Le ressort ne fait pas partie du système étudié, il est extérieur au système et exerce une force sur la bille.
2. **Bilan des forces :** Les forces qui s'appliquent sur la bille sont : le poids de la bille  $\vec{P}$  qui est complètement compensé par la réaction  $\vec{R}$  du support horizontal sur lequel la bille est posée. Le ressort exerce une force de rappel  $\vec{F}$  sur la bille qui est proportionnelle à l'allongement du ressort  $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{i}$  (voir section 3.2.2, Eq. 3.4, page 33), où  $\ell(t)$  est la longueur du ressort à un instant  $t$  quelconque, au cours du mouvement de la bille.

**Vitesse limite :**

$$v_{\text{lim}} = g\tau = \frac{mg}{\lambda}.$$

3. **Composantes dans un repère cartésien** : Le mouvement est rectiligne. Il a lieu le long de l'axe  $Ox$ . Il est avantageux de prendre la position de la bille à l'équilibre pour l'origine  $O$  des coordonnées sur l'axe  $Ox$ . En effet dans ce cas la force de rappel du ressort s'écrit :  $\vec{F} = -kx(t)\vec{i}$ , où  $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ . Comme le mouvement reste rectiligne sur l'axe  $Ox$ , la somme des composantes des forces orthogonales à  $Ox$  doit être nulle. On a donc  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ .
4. **PFD** : La résultante des forces est donc la force de rappel du ressort  $\vec{F} = -kx(t)\vec{i}$ , on a donc :

$$m\vec{a} = \vec{F} = -kx(t)\vec{i}$$

Comme  $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{i}$ , le PFD devient :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

On obtient une équation différentielle du second ordre, homogène (le second membre est nul), linéaire et à coefficients constants.

5. **Solution des équations différentielles du mouvement** : L'équation différentielle du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.18)$$

où  $\omega$  à la dimension de l'inverse d'un temps  $[\omega] = T^{-1}$ . En effet, on montre facilement que  $[\frac{k}{m}] = T^{-2}$ , pour que l'équation différentielle soit homogène.

On montre que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle peut s'écrire de la façon suivante :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.19)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes réelles quelconques.

Vérifions que  $x(t)$  donnée par l'Eq. (3.19) est bien solution de l'équation différentielle (3.18) et ceci quelques soient les valeurs prises par les constantes  $A$  et  $B$ . Pour cela dérivons deux fois  $x(t)$  par rapport au temps.

La dérivée première  $\dot{x}(t)$  qui est aussi la vitesse  $v(t)$  de la bille :

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (3.20)$$

et donc la dérivée seconde  $\ddot{x}(t)$  qui est aussi l'accélération  $a(t)$  de la bille est :

$$\begin{aligned} a(t) = \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]. \end{aligned}$$

**Oscillateur harmonique** : masse  $m$  accrochée à un ressort horizontal de raideur  $k$ . Equation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solution correspondant aux conditions initiales :

$$x_0 = x(t=0), \quad v_0 = \dot{x}(t=0)$$

est

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Le mouvement est périodique de période  $T$ , avec :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

On obtient donc bien :

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t).$$

Les constantes  $A$  et  $B$  doivent être choisies de telle sorte que le mouvement soit conforme aux conditions initiales. Notons  $x_0$  et  $v_0$ , la position et la vitesse de la bille à l'instant  $t = 0$ , c'est à dire que :

$$x_0 \equiv x(t = 0); \quad v_0 \equiv \dot{x}(t = 0). \quad (3.21)$$

En évaluant l'équation (3.19) en  $t = 0$ , on obtient  $x(t = 0) = A$ . De la même façon, l'équation (3.20) nous donne  $\dot{x}(t = 0) = \omega B$ . Donc :

$$A = x_0 \text{ et } B = \frac{v_0}{\omega}.$$

L'équation horaire de l'oscillateur harmonique, avec les conditions initiales données par l'Eq. (3.21) est donc :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t); \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.22)$$

*Remarques* On trouve bien un mouvement périodique. Par définition, la période est donnée par la plus petite valeur de  $T$  telle que  $x(t + T) = x(t)$ . C'est à dire que  $T$  est telle que  $x_0 \cos(\omega t + \omega T) = x_0 \cos(\omega t)$ . Comme la période de la fonction  $\cos$  est égale à  $2\pi$ , on a  $\omega T = 2\pi$  et donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

On remarque que la période du mouvement ne dépend pas des conditions initiales  $x_0$  et  $v_0$ . C'est ce qu'on appelle l'isochronie des oscillations. Cette propriété n'est pas très intuitive et elle est liée au fait que la force de rappel  $\vec{F}$  est proportionnelle à l'allongement du ressort. Dans la réalité, cette isochronie n'est vraie que pour une faible amplitude d'oscillation. Si on étire trop le ressort, la période deviendra une fonction de l'amplitude. Elle augmentera quand l'amplitude augmentera.

### 3.6 Dynamique dans un référentiel non-galiléen

On considère un référentiel non-galiléen  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . On note  $\vec{V}$  et  $\vec{A}$  la vitesse et l'accélération du référentiel  $\mathcal{R}'$  mesurées dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

On s'intéresse à la dynamique d'un point matériel  $P$  de masse  $m$  et soumis à une résultante des forces  $\vec{F}$ . La question que nous nous posons est quelle est l'équation différentielle du mouvement du point  $P$  observé dans le référentiel non-galiléen  $\mathcal{R}'$ ? On ne peut pas écrire le PFD dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  car le PFD n'est vrai que dans un référentiel galiléen.

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement du point  $P$  observé dans le référentiel non-galiléen  $\mathcal{R}'$ , on pose le PFD dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  puis on utilise la composition des accélérations donnée par l'Eq. (2.23) (page 25, du chapitre 2). Voyons ce que cela nous donne.

Le PFD s'écrit comme suit :

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération du point matériel mesurée par un observateur fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . La composition des accélérations (voir (2.23)) nous donne :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A},$$

où  $\vec{a}'$  est l'accélération du point matériel mesurée par un observateur fixe dans le référentiel non-galiléen  $\mathcal{R}'$ . En introduisant cette dernière relation dans le PFD, on obtient :

$$\vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{A}),$$

ce qui peut encore s'écrire comme suit :

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e, \text{ avec } \vec{f}_e = -m\vec{A}. \quad (3.23)$$

Cette relation ressemble au PFD, la seule différence est qu'à la résultante des forces  $\vec{F}$ , il faut ajouter le terme  $\vec{f}_e = -m\vec{A}$ . Ce terme a la dimension d'une force, puisqu'il est le produit d'une masse par une accélération.  $\vec{f}_e$  est une force d'inertie, appelée la force d'entraînement.

En conclusion, dans un référentiel non-galiléen, l'équation différentielle du mouvement s'obtient en écrivant une sorte de PFD mais où il faut ajouter la force d'entraînement  $\vec{f}_e = -m\vec{A}$  à la résultante des forces  $\vec{F}$ .

#### Remarques :

- La force d'inertie  $\vec{f}_e = -m\vec{A}$  n'est présente que parce que le référentiel  $\mathcal{R}'$  dans lequel on étudie la dynamique est non-galiléen. En effet, elle est proportionnelle à l'accélération  $\vec{A}$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  mesurée dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Si  $\vec{A} = \vec{0}$ , on retrouve le PFD habituel et dans ce cas  $\mathcal{R}'$  est bien galiléen puisqu'il est en translation rectiligne et uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ .
- Nous avons considéré que  $\mathcal{R}'$  était en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  et n'avons pas étudié les cas où  $\mathcal{R}'$  pouvait avoir un mouvement de rotation. Dans ce dernier cas, en plus de la force d'entraînement il faut tenir compte d'une autre force d'inertie : la force de Coriolis. Les effets d'inertie dans les référentiels en rotation par rapport à un référentiel galiléen seront étudiés au semestre prochain.

**Équation de mouvement dans un référentiel non-galiléen :** l'équation du mouvement d'un point matériel de masse  $m$  soumis à une résultante des forces  $\vec{F}$ , dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  non-galiléen, en translation par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , peut s'obtenir de la façon suivante :

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e; \text{ avec } \vec{f}_e = -m\vec{A},$$

où  $\vec{A}$  est l'accélération du référentiel  $\mathcal{R}'$  mesurée dans  $\mathcal{R}$ .

$\vec{f}_e = -m\vec{A}$  est une force d'inertie, appelée force d'entraînement.

# 4

## *Energie*

### 4.1 *Introduction*

#### 4.1.1 *Énergie et lois de conservation*

La notion « d'énergie » est rentrée dans l'usage courant depuis bien longtemps, mais de quoi parle-t-on précisément ? Considérons quelques petits exemples pour en cerner les contours.

*Exemple 1 : moteur de voiture.*— Afin de faire avancer une voiture thermique, on brûle de l'essence dans un moteur. L'énergie est stockée dans les liaisons chimiques. Le phénomène de combustion des hydrocarbures convertit l'*énergie chimique* en énergie thermique qui elle-même sera convertie en *énergie mécanique* (mouvement des pistons et rotation des roues) :

énergie chimique  $\longrightarrow$  énergie thermique  $\longrightarrow$  énergie mécanique

*Exemple 2 : freinage de la voiture.*— La voiture est lancée avec une certaine vitesse, on peut l'arrêter en appuyant sur la pédale de frein. On induit ainsi une force de frottement. L'énergie mécanique est convertie en énergie thermique (les plaques de frein chauffent) :

mécanique  $\longrightarrow$  thermique

*Exemple 3 : barrage hydro-électrique.*— Le principe de la production d'électricité à l'aide d'un barrage consiste à accumuler un stock d'eau dans un réservoir puis à canaliser l'écoulement de manière à faire tourner une turbine. Un alternateur génère un courant électrique à partir du mouvement de la turbine. La chaîne de conversion de l'énergie est donc

gravitationnelle  $\longrightarrow$  mécanique  $\longrightarrow$  électrique

*Exemple 4 : centrale nucléaire.*— En France, l'électricité est majoritairement produite par les centrales nucléaires. On dispose d'un combus-

tible fissile (Uranium,...) : on casse le noyau atomique afin de récupérer une partie de l'énergie de liaison entre nucléons (c'est l'analogie d'une combustion qui casse une liaison chimique entre atomes). Cette énergie chauffe un fluide dont le mouvement fait tourner une turbine :

nucléaire  $\longrightarrow$  thermique  $\longrightarrow$  mécanique  $\longrightarrow$  électrique

*Lois de conservation* : Ces quelques exemples illustrent l'un des aspects les plus importants liés à l'énergie, à savoir sa **conservation**, et éventuellement sa conversion d'une forme en une autre forme. L'idée de dégager des lois de conservation est une idée extrêmement féconde en physique, qui en traverse tous les domaines. Cette idée fondamentale fournit également des moyens pratiques pour aider à la résolution de certains problèmes. Quelques remarques :

- La notion d'énergie permet de *penser globalement* plutôt que localement. C'est à dire qu'on ne s'intéresse pas forcément à ce qui se passe à chaque instant, mais on fait un bilan global de ce qu'on a gagné ou perdu entre deux instants. La notion d'énergie fournit ainsi des outils pour raisonner en termes de **gains et pertes** (ou de définir un « coût »).
- Finalement notons que les lois de conservation permettent de faire des découvertes.

Par exemple, c'est l'analyse énergétique de la désintégration  $\beta$  des noyaux de Bismuth en Polonium qui a conduit à postuler l'existence d'une nouvelle particule, appelée neutrino (Pauli, 1931), de telle sorte que la conservation de l'énergie soit satisfaite.

*Remarque* : Au niveau *élémentaire*, n'existent que deux formes d'énergie : l'énergie *cinétique* et l'énergie *potentielle*. L'énergie chimique (énergie de liaison des atomes pour former des molécules) combine énergie cinétique des électrons et énergie potentielle électrostatique à l'échelle atomique. L'énergie nucléaire est essentiellement l'énergie potentielle associée à l'interaction forte assurant la liaison des nucléons pour former des noyaux. L'énergie électrique est soit de l'énergie cinétique (mouvement des électrons), soit de l'énergie potentielle électrique. L'énergie thermique traduit l'agitation thermique au niveau microscopique (énergie cinétique des atomes), etc.

#### 4.1.2 L'énergie en mécanique du point

Dans un système mécanique l'énergie peut se présenter sous deux formes différentes : l'énergie cinétique  $E_c$  et le travail des forces qui s'appliquent au système. L'énergie cinétique représente l'état du système. Elle dépend de la masse et de la norme de la vitesse du système physique

étudié. Le travail des forces est l'énergie apportée ou retirée au système, par les forces qui s'appliquent au système. Ce travail des forces, lorsqu'il existe, fait varier l'énergie cinétique du système et change donc l'état du système. La relation entre la variation de l'énergie cinétique et le travail des forces appliquées est appelé le *théorème de l'énergie cinétique*.

Les forces qui s'appliquent peuvent être conservatives ou non conservatives. Aux forces conservatives, on peut associer une énergie potentielle  $E_p$ . On introduit alors l'énergie mécanique  $E_m$  du système :

$$E_m = E_c + E_p.$$

Si les forces qui travaillent sont conservatives, alors l'énergie mécanique  $E_m$  est une quantité conservée. C'est à dire que  $E_m$  ne dépend pas du temps. On dit que le *système est conservatif*. Si des forces non conservatives (et dont le travail est non nul) s'appliquent, alors  $E_m$  ne sera pas constant. La relation entre le travail des forces non conservatives et la variation de  $E_m$  est appelée le *théorème de l'énergie mécanique*. Souvent, les forces non conservatives sont des forces de frottements qui transforment l'énergie cinétique du système en chaleur. Autrement dit, l'énergie est transformée en énergie cinétique des atomes ou molécules du support ou de l'environnement (solide, liquide ou gaz) responsable du frottement. En effet, la chaleur est l'énergie cinétique d'agitation désordonnée des atomes ou molécules.

Les théorèmes sur l'énergie sont très puissants. Ils permettent de répondre à des questions globales, sans avoir à calculer les positions et vitesses du système à chaque instant. Comme cela serait le cas si on utilisait le PFD.

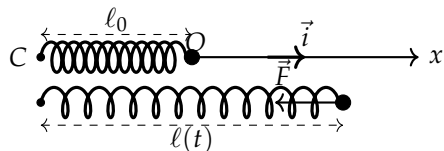
Dans le cas où le système est conservatif, la donnée de l'énergie mécanique pour toutes les positions du système est suffisante pour obtenir la dynamique complète du système. Dans ce cas, le concept de force n'est plus nécessaire. C'est cette façon de faire qui a prévalu et qui a permis de formuler des théories plus générales comme la mécanique quantique par exemple.

Pour donner un sens précis à toutes ces affirmations, nous devons dans un premier temps définir ce qu'est le *travail d'une force*. Nous démontrerons ensuite le *théorème de l'énergie cinétique*. Puis, nous définirons *l'énergie potentielle* et démontrerons le *théorème de l'énergie mécanique*. Dans ce cours, nous ne traiterons pas de ces questions dans toute leur généralité. Nous nous restreindrons au cas où la trajectoire du point matériel est rectiligne. Le cas d'une trajectoire quelconque, demande l'introduction de techniques mathématiques un peu plus complexes (intégrale de circulation d'un champs de vecteur).

Avant de commencer, traitons un exemple simple, que nous connaissons bien : l'oscillateur harmonique.

## 4.1.3 Exemple : l'oscillateur harmonique

On considère le système de la section 3.5.2 (voir page 49) et représenté sur la figure 4.1. Il s'agit d'une bille de masse  $m$  accrochée à un ressort horizontal, de raideur  $k$ . On repère la position de la masse  $m$  par son abscisse  $x$ ; l'origine  $x = 0$  étant choisie comme la position d'équilibre.

FIGURE 4.1: Bille de masse  $m$  accrochée à un ressort.

L'équation différentielle du mouvement que nous avons obtenue à l'aide du PFD est :

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Multiplions cette équation par  $\dot{x}$ , pour obtenir :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0. \quad (4.1)$$

Or  $\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\dot{x}]^2$  et  $\dot{x}x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2$ . L'Eq. (4.1) peut donc être écrite de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right\} = 0.$$

On en déduit que la quantité entre accolade est une *constante indépendante du temps*. Cette constante est l'énergie mécanique  $E_m$  de la bille :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

On reconnaît l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

Le deuxième terme est l'énergie potentielle  $E_p$  associée à la force de rappel  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  du ressort, qui s'applique sur la bille :

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2.$$

Au cours de son mouvement d'oscillation, chacun des deux termes varie au cours du temps mais leur somme est une constante. Lorsque  $x$  est à son maximum  $E_p$  sera maximum, et  $E_c$  sera nulle (vitesse nulle). Au point où la norme de la vitesse  $|\dot{x}|$  est maximum,  $E_c$  sera aussi maximum mais  $E_p$  sera minimum.

La force de rappel du ressort (qui est la résultante des forces appliquées) est une force conservative. L'énergie mécanique  $E_m$  de la bille est donc conservée.

**Energie mécanique d'un oscillateur harmonique**

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right\} = 0.$$

L'énergie mécanique  $E_m$  :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

est une constante indépendante du temps. On dit que c'est une constante du mouvement.



Prenons maintenant en compte la force de frottement fluide qui s'applique sur la bille (frottement sur l'air par exemple) :

$$\vec{f} = -\lambda\vec{v},$$

où  $\lambda$  est une constante positive. A l'aide du PFD, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

En effectuant le même "truc" que précédemment, on multiplie par  $\dot{x}$  cette équation et on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = -\lambda\dot{x}^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right\} = -\lambda\dot{x}^2,$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\lambda\dot{x}^2 < 0. \quad (4.2)$$

On voit donc que l'énergie mécanique  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$  de la bille n'est plus conservée.  $E_m$  diminue (sa dérivée étant négative) au cours du temps. La force de frottement n'est pas conservative. On dit que la force est dissipative. Elle dissipe l'énergie de la bille. Le mouvement de la bille sera amorti. L'Eq.(4.2) constitue le théorème de l'énergie mécanique pour notre système amorti.

En fait, l'énergie de la bille est transférée à l'énergie cinétique des molécules constituant l'air qui frotte sur la bille. L'air s'échauffe donc. L'énergie totale de la bille et de l'air se conserve.

Nous avons obtenu l'énergie mécanique de la bille à partir de son équation différentielle du mouvement elle même déduite du PFD. Le but de ce chapitre est de définir l'énergie mécanique et de prévoir si elle se conserve ou non, sans avoir recours au PFD. Nous obtiendrons l'équation différentielle du mouvement à partir du théorème de l'énergie mécanique.

## 4.2 Travail d'une force

Dans cette section on définit le travail d'une force le long d'un chemin rectiligne. Dans ce cours, on se restreint au cas du chemin rectiligne.

### 4.2.1 Définitions

*Cas d'une force constante :* Le travail  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  d'une force constante  $\vec{F}$  sur un segment rectiligne du point  $A$  au point  $B$  est défini par :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (4.3)$$

Il s'agit du produit scalaire du vecteur force avec le vecteur déplacement. On peut aussi écrire  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \|\vec{AB}\| \vec{F} \cdot \vec{i}$ , où  $\vec{i}$ , le vecteur unitaire dans le sens du déplacement, soit  $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{AB}\|} \vec{AB}$ .  $\vec{F} \cdot \vec{i}$  représente la projection de la force  $\vec{F}$  sur le déplacement  $\vec{AB}$  (voir figure 4.2).

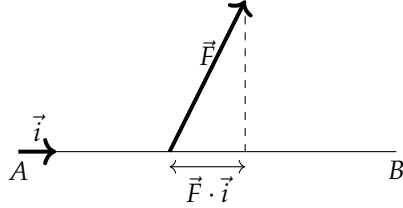


FIGURE 4.2: Travail d'une force sur un déplacement

Cette expression n'est valable que si la force est constante, c'est à dire qu'elle ne varie pas lorsque le système emprunte le chemin  $AB$ .

On remarque que si le chemin  $AB$  est emprunté dans l'autre sens (de  $B$  vers  $A$ ), alors le travail de la force change de signe :

$$W_{B \rightarrow A}(\vec{F}) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \quad (4.4)$$

Il est donc important de bien préciser l'orientation du chemin.

*Cas d'une force quelconque :* On considère que la force est quelconque. Elle peut varier en direction, sens ou norme au cours de déplacement sur le chemin  $AB$ , qui lui reste rectiligne.

Pour définir le travail dans ce cas plus général, on divise le chemin  $AB$  en  $N$  segments plus petits, de même longueur égale à  $\Delta x = \frac{AB}{N}$ . On peut choisir  $N$  aussi grand que l'on veut. On le choisit assez grand pour que sur chacun des  $N$  segments on puisse considérer que la force ne varie pas. On pourra alors se ramener à la définition précédente sur chacun des  $N$  petits segments. Le travail de la force sur le chemin  $AB$  sera égal à la somme des  $N$  travaux sur chacun des  $N$  segments. En fait, mathématiquement, on prendra la limite quand  $N \rightarrow \infty$  et la longueur de chacun des  $N$  segments tendra vers zéro,  $\Delta x = \frac{AB}{N} \rightarrow 0$ .

Construisons formellement ce que nous venons d'énoncer. Sur le segment  $AB$ , on introduit donc  $N + 1$  points équidistants,  $M_k (k = 0, 1, \dots, N)$ , de telle sorte que  $M_0 = A$ ,  $M_N = B$  et tel que

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \Delta x \vec{i}; \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

où  $\vec{i}$  est un vecteur unitaire (de norme égale à 1) dans la direction et le sens de  $\vec{AB}$ . ( $\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ ).

On définit le travail élémentaire  $\delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k))$  sur le  $k^{\text{eme}}$  segment, en considérant que la force est constante sur ce segment :

$$\delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k)) = \vec{F}(M_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{F}(M_k) \cdot \vec{i} \Delta x$$

**Travail d'une force constante sur un chemin rectiligne :** Le travail  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  de la force  $\vec{F}$  constante, sur le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}.$$

On définit le travail de la force  $\vec{F}$  sur le segment  $AB$  comme la somme des travaux élémentaires, dans la limite où le nombre  $N$  de segments tend vers l'infini :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \delta W_{M_{k-1}M_k}(\vec{F}(M_k)),$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^N \vec{F}(M_k) \cdot \vec{i} \Delta x.$$

La limite de cette somme peut être interprétée comme la définition de l'intégrale de Riemann (voir annexe D, page 113), sur l'intervalle  $[x_A, x_B]$  de la fonction  $f(x) \equiv \vec{F}(x) \cdot \vec{i}$ , qui représente la composante de la force (calculée au point  $M$  d'abscisse  $x$ ) sur l'axe  $AB$ . On notera :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx.$$

**Travail d'une force quelconque sur un chemin rectiligne :** Le travail de la force  $\vec{F}$  sur le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx$$

où  $\vec{AM} = x\vec{i}$ .

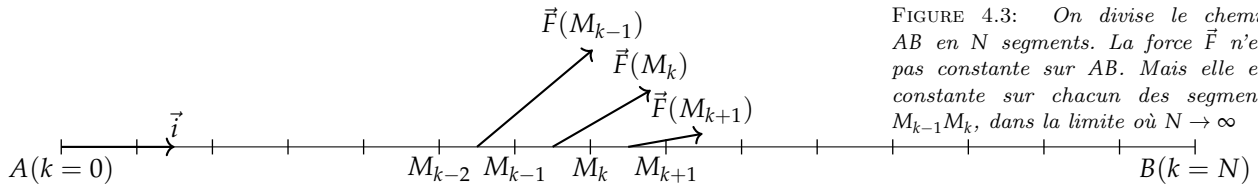


FIGURE 4.3: On divise le chemin  $AB$  en  $N$  segments. La force  $\vec{F}$  n'est pas constante sur  $AB$ . Mais elle est constante sur chacun des segments  $M_{k-1}M_k$ , dans la limite où  $N \rightarrow \infty$

### 4.2.2 Propriétés

*Dimension et unité* La dimension d'un travail est la dimension d'une longueur multipliée par celle d'une force, soit :

$$[W_{A \rightarrow B}(\vec{F})] = [\vec{F}] L = ML^2T^{-2}.$$

Le travail a donc la même dimension que celle d'une énergie. Le travail d'une force qui s'applique sur un système est l'énergie apportée (si le travail est positif) ou retirée (s'il est négatif) au système, par la force. Lorsqu'il est positif, on dira que le travail est *moteur* et lorsqu'il est négatif on dira que le travail est *résistant*.

Le travail d'une force étant une énergie, son unité dans le système international est donc le joule.

*Orthogonalité :* Lorsque en tout point du chemin, la direction de la force est orthogonale au chemin, le travail de la force sur le chemin est nul. En effet, le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

*Relation de Chasle :* Soit  $C$  un point du segment  $AB$ . En partant de la définition du travail, il n'est pas difficile de montrer la relation suivante :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \quad (4.5)$$

*Linéarité :* Soit  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , deux forces qui s'appliquent au même point du système lorsqu'il parcourt le segment  $AB$ . A partir de la définition du travail, on montre simplement que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_2)$$

### 4.2.3 Calculs de travaux

*Recette :* Pour calculer le travail d'une force  $\vec{F}$  sur un segment  $AB$ , il faudra réaliser les étapes suivantes :

1. **Paramétrisation du chemin  $AB$  :** On choisit un axe  $Ox$  contenant le segment  $AB$ . La position d'un point  $M$  quelconque sur le segment  $AB$  est repérée par son abscisse  $x$ . On note  $x_A$  l'abscisse du point  $A$  et  $x_B$  l'abscisse sur point  $B$ .
2. En un point  $M$  quelconque du chemin, d'abscisse  $x$ , on calcule le produit scalaire  $f(x) \equiv \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$ , qui est la composante de la force  $\vec{F}(M)$  sur l'axe  $Ox$ . C'est une fonction de l'abscisse  $x$  du point  $M$  sur l'axe  $Ox$ .
3. Le travail est donné par l'intégrale :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx.$$

Finalement, le calcul du travail d'une force revient à calculer une intégrale ordinaire.

*Exemples :*

1. **Travail du poids à la surface de la Terre :** On considère le travail du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  qui s'applique sur un corps de masse  $m$  à la surface de la Terre, sur le segment  $AB$ . L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est verticale et orientée vers le bas.  $AB$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (voir figure 4.4).

Comme le poids est une force constante, le travail du poids sur le segment  $AB$  est simplement :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = mg \|\vec{AB}\| \cos \left( \widehat{\vec{P}, \vec{AB}} \right) = -mg \|\vec{AB}\| \sin \alpha.$$

On remarque que  $\|\vec{AB}\| \sin \alpha$  est la hauteur  $h$  du point  $B$  par rapport à celle de  $A$ . On en déduit que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

**Propriétés :**

— **Dimension :**

$$\left[ W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \right] = ML^2T^{-2}.$$

Le travail est une énergie.

— **Unité :** unité internationale d'énergie : le joule.

— **Orthogonalité :** Si  $\forall M \in AB$ ,  $\vec{F}(M) \perp \vec{AB}$  alors  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = 0$ .

— **Chasle :**

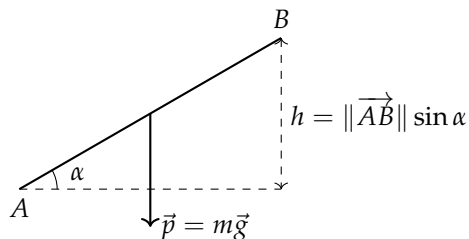
$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

.

— **Linéarité :**

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_1) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_2),$$

si  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  s'appliquent au même point du système.

FIGURE 4.4: Travail du poids sur le segment  $AB$ .

où  $z_A$  et  $z_B$  sont les hauteurs respectives des points  $A$  et  $B$ . On aurait pu trouver ce résultat d'une autre façon. On écrit les composantes des vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{AB}$  sur la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , où  $\vec{k}$  est vertical orienté vers le haut. On obtient :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -mg\vec{k} \\ \vec{AB} &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.\end{aligned}$$

On en déduit donc le travail en calculant produit scalaire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = -mg(z_B - z_A).$$

On remarque que le travail du poids ne dépend que de la position du point initial  $A$  et final  $B$ . Plus précisément, il ne dépend que de la hauteur de  $A$  et  $B$ . Il ne dépend pas de la trajectoire empruntée pour aller de  $A$  à  $B$ .

2. **Travail de la force de rappel d'un ressort :** Revenons à l'exemple que nous avons traité au début de ce chapitre (voir section 4.1.3, 56). Considérons le travail de la force de rappel  $\vec{F} = -kx\vec{i}$ , qui s'applique sur la bille attachée au ressort horizontal, quand elle se déplace sur l'axe  $Ox$  d'un point  $A$  d'abscisse  $x_A$  à un point  $B$  d'abscisse  $x_B$ .

La paramétrisation du chemin est ici évidente et  $f(x) = \vec{F} \cdot \vec{i} = -kx$ , donc

$$\begin{aligned}W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) &= \int_{A \rightarrow B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} -kx dx = \left[ -\frac{1}{2}kx^2 \right]_{x_A}^{x_B} \\ &= \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).\end{aligned}$$

On remarque que le travail de la force de rappel du ressort d'un point  $A$  à un point  $B$ , ne dépend que de la position du point de départ  $A$  et du point d'arrivée  $B$ . Il ne dépend pas de la trajectoire parcourue pour aller de  $A$  à  $B$ .

### 4.3 Théorème de l'énergie cinétique

#### 4.3.1 Énoncé du théorème

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux points de la trajectoire d'un mobile est égale à la somme des travaux

**Travail du poids :** Le travail du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , sur le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A).$$

où  $z_{A(B)}$  est la hauteur du point  $A(B)$ .

**Travail de la force de rappel élastique :** Le travail de la force de rappel élastique  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  le segment  $AB$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

des forces qui s'appliquent sur le mobile, calculés sur la trajectoire du mobile entre ces deux mêmes points.

Formalisons cet énoncé. Pour cela, considérons un point matériel de masse  $m$ , passant par le point  $A$  au temps  $t_A$  et par le point  $B$  au temps  $t_B$  ( $t_B > t_A$ ). Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit de la façon suivante :

$$E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

où  $E_c(t) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t)\|^2$  est l'énergie cinétique du mobile au temps  $t$  et  $\sum_{\vec{F}}$  désigne la somme sur toutes les forces qui s'appliquent au mobile. Le travail  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  est calculé sur la trajectoire effectivement empruntée par le mobile.

#### 4.3.2 Démonstration du théorème

Nous allons démontrer le théorème de l'énergie cinétique dans le cas particulier où la trajectoire est rectiligne, puisque nous avons défini le travail d'une force uniquement sur un chemin rectiligne. Mais, le théorème est général et est vrai quelle que soit la forme de la trajectoire.

Puisque nous sommes dans un référentiel galiléen, le long de sa trajectoire, l'accélération du mobile satisfait le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$m\vec{a} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}.$$

On considère que la trajectoire est rectiligne. On repère la position du mobile par son abscisse  $x(t)$  à chaque instant  $t$  sur l'axe  $Ox$  support de sa trajectoire. On pourra donc écrire le PFD de la façon suivante :

$$m\ddot{x}\vec{i} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}.$$

Effectuons le produit scalaire de cette équation avec le vecteur vitesse  $\vec{v} = \dot{x}\vec{i}$  du mobile, on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{i}\dot{x}. \quad (4.6)$$

Or  $\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2)$ , donc en intégrant par rapport au temps le membre de gauche de l'égalité Eq. (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} m\dot{x}\ddot{x} dt &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2) dt = \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right]_{t_A}^{t_B} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t_B) - \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t_A) \\ &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_A\|^2 \\ &= E_c(t_B) - E_c(t_A). \end{aligned}$$

**Théorème de l'énergie cinétique :** Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un mobile entre deux points  $A$  et  $B$  de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le mobile, calculés sur la trajectoire empruntée par le mobile.

$$E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

maintenant, intégrons, par rapport au temps  $t$ , le membre de droite de l'Eq. (4.6), on obtient :

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{i} \dot{x} dt = \sum_{\vec{F}} \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{i} \frac{dx}{dt} dt = \sum_{\vec{F}} \int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot \vec{i} dx = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Dans la seconde égalité nous avons effectué le changement de variable  $t \rightarrow x$  (donné par l'équation horaire  $x = x(t)$ ) dans l'intégrale (voir annexe D, Eq. D.16, page 118). Finalement, nous avons bien démontré, qu'en intégrant l'équation Eq. (4.6) par rapport au temps, on obtient ;

$$\int_{t_A}^{t_B} m \ddot{x} \dot{x} dt = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{i} \dot{x} dt \Leftrightarrow E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

qui est bien le théorème de l'énergie cinétique.

### 4.3.3 Exemple

Un mobile de masse  $m$  est posé sur une table en un point  $O$ . Il est lancé avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  horizontale. Il glisse sur la table horizontale et subit une force de frottement solide que l'on notera  $\vec{f}$ . On notera  $k_c$  le coefficient de frottement cinétique. Quelle est la distance  $\ell$  parcourue par le mobile jusqu'à son immobilisation complète ?

Le mobile est soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , vertical et orienté vers le bas, qui est complètement compensé par la force de réaction  $\vec{R}$  de la table, verticale et orientée vers le haut :  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ , puisqu'il n'y a pas d'accélération dans la direction verticale.

Le mobile est aussi soumis à la force de frottement solide  $\vec{f}$  dont la norme est donnée par :

$$\|\vec{f}\| = k_c \|\vec{R}\| = k_c mg,$$

et qui est opposée à la vitesse du mobile.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique, entre l'instant initial  $t = 0$  et l'instant final  $t_f$  auquel le mobile s'arrête.

$$E_c(t_f) - E_c(t = 0) = W_{O \rightarrow A}(\vec{P}) + W_{O \rightarrow A}(\vec{R}) + W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

où on a noté  $A$  le point atteint par le mobile à la fin de sa trajectoire. Comme  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  sont en tout point de la trajectoire orthogonaux au déplacement, leur travail respectif est nul. Il reste donc :

$$E_c(t_f) - E_c(t = 0) = W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

Or,  $E_c(t_f) = 0$  puisque le mobile est à l'arrêt à l'instant  $t_f$ , et  $E_c(t = 0) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_0\|^2$ , donc :

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}_0\|^2 = -W_{O \rightarrow A}(\vec{f}).$$

Calculons le travail de la force de frottement. Comme la force est constante, on a simplement :

$$W_{O \rightarrow A}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{OA} = -k_c mg \|\overrightarrow{OA}\|.$$

On a donc obtenu :

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}_0\|^2 = k_c mg \|\overrightarrow{OA}\|.$$

La distance  $\ell = \|\overrightarrow{OA}\|$  cherchée est donc :

$$\ell = \frac{\|\vec{v}_0\|^2}{2k_c g}$$

*Remarque :* Nous avons obtenu directement la distance parcourue sans avoir utilisé le PFD. Nous n'avons pas eu besoin de résoudre une équation différentielle. En contrepartie, nous n'avons pas d'information sur le temps mis par le mobile pour parcourir la distance  $\ell$ . Nous avons une réponse à une question globale temporellement, mais nous n'avons pas d'information locale en temps sur la cinématique du mobile tout au long de sa trajectoire du point  $O$  au point  $A$ .

#### 4.3.4 Version locale du théorème de l'énergie cinétique

*Énoncé du théorème :* La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances développées par les forces qui s'appliquent au système.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme  $\sum_{\vec{F}}$  est effectuée sur les forces  $\vec{F}$  qui s'appliquent sur le système et  $\vec{v}$  est la vitesse du point d'application de la force.

*Puissance développée par une force :* Le produit scalaire  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  est appelé puissance développée par la force sur le système.  $\mathcal{P}$  représente le travail exercé par la force par unité de temps. La dimension d'une puissance est donc celle d'une énergie divisée par un temps :

$$[\mathcal{P}] = [E]T^{-1} = ML^2T^{-3}.$$

Son unité dans le système international est le watt, noté W.

*Démonstration du théorème :* Considérons deux instants très proches l'un de l'autre,  $t_A$  et  $t_B = t_A + \Delta t$ . Les deux points correspondant  $A$  et  $B$  de la trajectoire du mobile, sont alors très proches l'un de l'autre,  $x_A$  et  $x_B = x_A + \Delta x$ . On choisit  $\Delta t$  assez petit pour que les deux points  $A$  et  $B$  soient assez proches l'un de l'autre de telle sorte qu'on

**Théorème de l'énergie cinétique local :**

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme  $\sum_{\vec{F}}$  est effectuée sur les forces  $\vec{F}$  qui s'appliquent sur le système et  $\vec{v}$  est la vitesse du point d'application de la force.

**Puissance développée par une force :** la puissance  $\mathcal{P}$  développée par une force  $\vec{F}$  est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

$\mathcal{P}$  représente le travail exercé par la force par unité de temps.

$$[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}.$$

Son unité dans le S.I. est le watt, symbolisé par W.



puisse approcher le travail par  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})(x_A) \simeq \vec{F} \cdot \vec{i} \Delta x$ . C'est à dire que la force ne varie pratiquement pas pendant le temps  $\Delta t$  où le mobile se déplace de  $\Delta x$ . Mathématiquement, on prendra la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  et donc aussi  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Le théorème de l'énergie cinétique entre ces deux instants infiniment proches prend la forme suivante :

$$E_c(t_A + \Delta t) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} \vec{F}(x_A) \cdot \vec{i} \Delta x.$$

En divisant cette équation par  $\Delta t$  et en prenant la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient l'expression :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_c(t_A + \Delta t) - E_c(t_A)}{\Delta t} = \sum_{\vec{F}} \vec{F}(x_A) \cdot \vec{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

On reconnaît dans le membre de gauche de cette égalité la limite du taux d'accroissement de la fonction  $E_c(t)$ , c'est à dire la dérivée  $\frac{dE_c}{dt}$  et dans le membre de droite  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ . Or, comme on a considéré que la trajectoire était rectiligne (dans le sens du vecteur unitaire  $\vec{i}$ ), la vitesse du mobile est  $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i}$ . On obtient donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{\vec{F}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

où la somme est effectuée sur l'ensemble des forces qui s'appliquent sur le système.

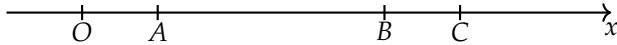
## 4.4 Forces conservatives – Energie potentielle

### 4.4.1 Forces conservatives

*Définition :* On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point  $A$  au point  $B$  ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les points  $A$  et  $B$ . Dans ce cas le travail  $W(\vec{F})_{A \rightarrow B}$  de la force  $\vec{F}$  du point  $A$  au point  $B$  ne dépend que des positions des points  $A$  et  $B$ . Cette définition est totalement générale, mais nous n'avons pas défini le travail sur des chemins quelconques. Dans le cas où l'on ne s'autorise que des chemins rectilignes pour le calcul des travaux des forces, quel est le sens de cette définition ? Quel est le sens de "ne dépend pas du chemin suivi" lorsque le travail est défini sur un segment rectiligne  $AB$  ? En fait, il est possible de définir une infinité de trajectoires rectilignes qui vont du point  $A$  au point  $B$  tout en restant sur la droite  $Ox$  qui passe par  $A$  et  $B$ . En effet, soit un point  $C$  situé sur la droite  $Ox$  mais en dehors du segment  $AB$ . Le chemin  $AC \cup CB$  est rectiligne, il part de  $A$  et arrive en  $B$ .

Si la force est conservative alors son travail de  $A$  à  $B$  en passant par un point  $C$  quelconque de la droite  $Ox$  ne dépend pas du point  $C$ , mais uniquement des abscisses  $x_A$  et  $x_B$  des points  $A$  et  $B$ .

**Force conservative :** On dira qu'une force est conservative si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point  $A$  au point  $B$  ne dépend pas du chemin suivi, ceci quels que soient les points  $A$  et  $B$ . Dans ce cas le travail  $W(\vec{F})_{A \rightarrow B}$  de la force  $\vec{F}$  du point  $A$  au point  $B$  ne dépend que des positions des points  $A$  et  $B$ .



*Exemples :*

1. **Force de rappel élastique :** Considérons l'oscillateur harmonique. Nous avons vu que le travail de la force de rappel élastique  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  d'un point  $A$  à un point  $B$  était donné par l'expression suivante :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

Nous avons fait ce calcul en supposant que le chemin allait du point  $A$  au point  $B$  directement. On peut faire le même calcul en supposant que le chemin de  $A$  à  $B$  passe par un point  $C$  de l'axe  $Ox$  et qui n'appartient pas forcément au segment  $AB$ . En effet, le travail de  $A$  à  $B$  en passant par le point  $C$  peut s'écrire comme la somme :

$$W_{A \rightarrow C}(\vec{F}) + W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_C^2) + \frac{1}{2}k(x_C^2 - x_B^2) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2).$$

On en déduit donc que la force de rappel élastique est une force conservative.

2. **Force de frottement visqueux :** toujours dans le cas de l'oscillateur harmonique considérons la force de frottement visqueux, opposée à la vitesse  $\vec{f} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$ . Le travail de cette force de  $A$  à  $B$  est :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{f} \cdot \vec{i} dx = -\lambda \int_{x_A}^{x_B} \dot{x} dx.$$

En effectuant le changement de variable  $x \rightarrow t$  (donné par la loi horaire  $x = x(t)$ ), on obtient :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -\lambda \int_{t_A}^{t_B} \dot{x}^2 dt$$

Il est clair que le travail de cette force dépend du chemin suivi. Il ne dépend pas uniquement de la position de  $A$  et de  $B$  mais des instants  $t_A$  et  $t_B$  auxquels le mobile est en ces points et du carré de la vitesse tout le long de la trajectoire.

3. **Le poids à la surface de la Terre :** On montre simplement que le poids à la surface de Terre est une force conservative. Cela est vrai pour toute force constante.

#### 4.4.2 *Energie potentielle associée à une force*

*Définition :* Lorsqu'une force  $\vec{F}$  est conservative, on peut lui associer une énergie potentielle  $E_p(M)$  qui est une fonction de la position  $M$ . L'énergie potentielle est une fonction telle que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B), \quad (4.7)$$

pour tout couple de points  $A$  et  $B$  de l'espace. En fait, on montre que si pour tous les points  $A$  et  $B$  de l'espace, il existe une fonction  $E_p(M)$ , qui permet d'écrire le travail de  $\vec{F}$  de cette façon, alors la force est conservative.

Dans le cas particulier, considéré ici, où le chemin est rectiligne sur la droite  $Ox$ ,  $E_p(x)$  sera une fonction de l'abscisse  $x$  du mobile sur l'axe  $Ox$  et on pourra écrire :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

En effet, dans le cas d'une force conservative, le travail ne peut dépendre des positions que par la différence  $E_p(x_A) - E_p(x_B)$ . C'est une conséquence de la relation de Chasles (Eq. (4.5)). En effet, si on note  $f_{x_C}(x_A) \equiv W_{C \rightarrow A}(\vec{F})$  alors on aura :

$$\begin{aligned} W_{C \rightarrow A}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) &\Leftrightarrow W_{C \rightarrow A}(\vec{F}) - W_{C \rightarrow B}(\vec{F}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) \\ &\Leftrightarrow f_{x_C}(x_A) - f_{x_C}(x_B) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}). \end{aligned}$$

On peut donc choisir l'énergie potentielle  $E_p(x) = f_{x_C}(x)$ . C'est l'énergie potentielle associée à  $\vec{F}$  qui s'annule pour  $x = x_C$ . En effet,  $E_p(x_C) = f_{x_C}(x_C) = W_{C \rightarrow C}(\vec{F}) = 0$ .

*Force et énergie potentielle :* On cherche une relation plus directe entre le vecteur force et la fonction énergie potentielle associée. Pour cela, partons de la définition et explicitons le travail de la force dans le cas où le chemin est rectiligne :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

Si on note  $f(x)$  la composante de la force en chaque point d'abscisse  $x$  du chemin rectiligne :

$$f(x) = \vec{F}(x) \cdot \vec{i},$$

alors :

$$\int_{x_A}^{x_B} \vec{F}(x) \cdot \vec{i} dx = \int_{x_A}^{x_B} f(x) dx = E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

Cette dernière égalité étant vraie pour tout couple de point  $A$  et  $B$ , on en déduit que  $E_p(x)$  est une primitive de  $-f(x)$ . Ce qui peut s'écrire :

$$\frac{dE_p}{dx} = -f(x) = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

On dit que *la force dérive de l'énergie potentielle*. En fait ici, il ne s'agit que de la composante de la force sur l'axe  $Ox$ . On peut aussi écrire :

$$E_p(x) = - \int_0^x \vec{F}(s) \cdot \vec{i} ds + C$$

**Energie potentielle associée à  $\vec{F}$  :** L'énergie potentielle associée à une force  $\vec{F}$  conservative, est une fonction  $E_p(M)$  de la position  $M$ , telle que :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B); \forall A, B \in \mathbb{R}^3.$$

Si le chemin est rectiligne, alors :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_p(x_A) - E_p(x_B),$$

où  $x_A$  et  $x_B$  sont les abscisses respectives de  $A$  et  $B$ .

**La force dérive de l'énergie potentielle :** L'énergie potentielle est une primitive de la composante de la force sur le chemin rectiligne :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}. \quad (4.8)$$

ou encore :

$$E_p(x) = - \int_0^x \vec{F}(s) \cdot \vec{i} ds + C$$

*Origine de l'énergie potentielle* L'énergie potentielle n'est pas unique, elle est définie à une constante près. En effet, Si  $E_p(x)$  est l'énergie potentielle associée à la force  $\vec{F}$  alors  $U_p(x) = E_p(x) + C$ , où  $C$  est une constante, est aussi une énergie potentielle associée à  $\vec{F}$ , puisque  $\frac{dE_p}{dx} = \frac{dU_p}{dx} = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}$ . Choisir une énergie potentielle (choisir  $C$ ) c'est choisir l'origine de l'énergie potentielle, c'est à dire le point  $x$  pour lequel  $E_p(x) = 0$ . Le choix de l'origine de l'énergie potentielle est arbitraire et n'a aucune incidence sur la physique du système, puisque la force (sa composante en fait) s'obtient en dérivant l'énergie potentielle.

#### 4.5 Energie potentielle et énergie mécanique d'un système

##### 4.5.1 Définitions

*Energie potentielle d'un système* : L'énergie potentielle  $E_p$  d'un système est la somme des énergies potentielles, associées aux forces conservatives qui s'exercent sur le système.

On aura donc :

$$E_p(A) - E_p(B) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

et aussi :

$$-\frac{dE_p}{dx} = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} \vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

*Energie mécanique d'un système* : L'énergie mécanique  $E_m$  du système est la somme de son énergie cinétique  $E_c$  et de son énergie potentielle  $E_p$ . Pour un point matériel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$ , on aura donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + E_p.$$

##### 4.5.2 Théorème de l'énergie mécanique

Le théorème de l'énergie mécanique est une conséquence directe du théorème de l'énergie cinétique.

*Enoncé du théorème* : La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces *non conservatives* qui s'appliquent sur le système, le long de sa trajectoire.

Comme pour le théorème de l'énergie cinétique on considère un point matériel de masse  $m$ , passant par le point  $A$  au temps  $t_A$  et par le point  $B$  au temps  $t_B$  ( $t_B > t_A$ ) :

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

**Origine de l'énergie potentielle** : L'énergie potentielle n'est pas unique, elle est définie à une constante près. Si  $E_p(x)$  est une énergie potentielle, alors  $E_p(x) + C$ , où  $C$  est une constante est aussi une énergie potentielle. Choisir une énergie potentielle c'est aussi choisir l'origine de l'énergie potentielle.

**Energie potentielle d'un système** : L'énergie potentielle  $E_p$  d'un système est la somme des énergies potentielles, associées aux forces conservatives qui s'exercent sur le système.

**Energie mécanique** : l'énergie mécanique  $E_m$  d'un système est la somme de son énergie cinétique  $E_c$  et de son énergie potentielle  $E_p$ .

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + E_p.$$

où le travail est calculé le long de la trajectoire empruntée par le mobile et où on a bien spécifié que la somme ne concernait que les forces non-conservatives.

*Démonstration :* On exprime le théorème de l'énergie cinétique, en séparant les forces conservatives des forces non conservatives :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Or, par définition de l'énergie potentielle  $E_p$  du système,

$$E_p(A) - E_p(B) = \sum_{\vec{F} \text{ conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}),$$

Donc :

$$E_c(B) - E_c(A) = E_p(A) - E_p(B) + \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

Ce qui peut s'écrire :

$$[E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

#### 4.5.3 Version locale du théorème de l'énergie mécanique

Comme pour le théorème de l'énergie cinétique, on a une version locale du théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

La dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est égale à la somme des puissances des forces non-conservatives qui s'appliquent au système.

#### 4.5.4 Conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas particulier d'un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives, l'énergie mécanique du système est une constante, elle ne dépend pas du temps. On dit dans ce cas que *l'énergie mécanique est conservée* où que l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

En effet, si le système n'est pas soumis à des forces non conservatives, alors le théorème de l'énergie mécanique devient :

$$E_m(B) - E_m(A) = 0 \Leftrightarrow E_m(A) = E_m(B).$$

Cette égalité étant vraie pour tout couple de points  $A$  et  $B$  de la trajectoire du mobile, l'énergie mécanique est une constante.

**Théorème de l'énergie mécanique :** La variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces non conservatives qui s'appliquent sur le système, le long de sa trajectoire.

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F}).$$

où le travail est calculé le long de la trajectoire empruntée par le mobile et  $A$  et  $B$  sont deux points de cette trajectoire.

**Théorème de l'énergie mécanique local :**

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F} \text{ non-conservatives}} \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

**Conservation de l'énergie mécanique :** Dans le cas particulier d'un système qui n'est soumis qu'à des forces conservatives, l'énergie mécanique du système est une constante, elle ne dépend pas du temps.

## 4.5.5 Exemple

*Oscillateur harmonique amorti* : Déterminons l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique amorti que nous avons considéré tout au début de ce chapitre. La bille de masse  $m$  accrochée au ressort est soumise à son poids  $\vec{P}$  et à la réaction du support  $\vec{R}$  qui compense complètement le poids :  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ , puisque le mouvement est horizontal. Il reste donc la force de rappel du ressort  $\vec{F} = -kx\vec{i}$  qui est conservative et la force de frottement  $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$  qui elle n'est pas conservative.

L'énergie potentielle de la bille est donc l'énergie potentielle associée à  $\vec{F}$  puisque c'est la seule force conservative (qui travaille) qui s'applique au système. Comme  $\vec{F} \cdot \vec{i} = -kx$ , l'énergie potentielle est déterminée par :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F} \cdot \vec{i} = kx.$$

Donc,

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C,$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

Si on choisit l'origine de l'énergie mécanique à la position d'équilibre de la bille qui correspond à  $x = 0$ , il faudra prendre  $C = 0$ . Avec ce choix de l'origine, l'énergie mécanique de la bille est donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Si on néglige les frottements,  $E_m$  est une constante, l'énergie mécanique se conserve. Si on considère la force de frottement visqueux, alors le théorème de l'énergie mécanique, dans sa version locale, donne :

$$\frac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = -\lambda\|\vec{v}\|^2 = -\lambda\dot{x}^2.$$

Comme on l'avait déjà fait remarquer, l'énergie mécanique de la bille n'est pas une constante, elle diminue. Le travail de la force de frottement retire de l'énergie à la bille. La variation par unité de temps de l'énergie mécanique est donnée par la puissance  $\mathcal{P} = -\lambda\|\vec{v}\|^2$  de la force de frottement. Comme cette dernière est négative, il s'agit bien d'une diminution.

En dérivant par rapport au temps l'expression de  $E_m$  :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -\lambda\dot{x}^2,$$

on obtient :

$$m\ddot{x} + kx = -\lambda\dot{x}^2 \Leftrightarrow m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0.$$

La version locale du théorème de l'énergie mécanique est équivalente à l'équation différentielle du mouvement que l'on aurait obtenue en appliquant le PFD.

**Énergie potentielle élastique** : l'énergie potentielle  $E_p(\ell)$  associée à la force de rappel élastique

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}$$

d'un ressort de longueur  $\ell$ , de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  est donnée par :

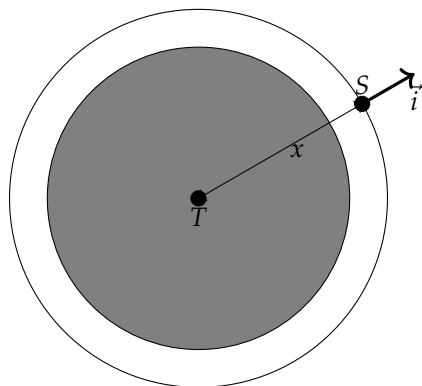
$$E_p(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C,$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

*Satellite autour de la Terre* : Déterminons l'énergie mécanique d'un satellite en orbite autour de la Terre. Le satellite de masse  $m$  en un point  $S$  de sa trajectoire n'est soumis qu'à la force de gravitation :

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{\|\vec{OS}\|^3}\vec{OS} = -\frac{GmM}{x^2}\vec{i},$$

où  $G$  est la constante universelle de la gravitation,  $M$  est la masse de la Terre et  $x$  est la distance entre le centre de la Terre  $O$  et le satellite  $S$ .  $\vec{i} = \frac{\vec{OS}}{\|\vec{OS}\|}$  est un vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $\vec{OS}$ .



L'énergie potentielle  $E_p$  du satellite est l'énergie potentielle associée à la force  $\vec{F}$ , elle est déterminée par :

$$\frac{dE_p}{dx} = -\vec{F} \cdot \vec{i} = \frac{GmM}{x^2}.$$

Donc :

$$E_p(x) = -\frac{GmM}{x} + C,$$

où  $C$  est une constante. Par convention, on prend l'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle quand  $x \rightarrow \infty$ . C'est à dire que  $\lim_{x \rightarrow \infty} E_p(x) = 0$ . Pour cela on choisit  $C = 0$ .

Avec ce choix pour l'origine de l'énergie potentielle, l'énergie mécanique du satellite est :

$$E_m = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \frac{GmM}{\|\vec{OS}\|}.$$

Si on néglige les frottements du satellite sur l'atmosphère résiduelle, la force de gravitation est la seule force qui s'applique sur le satellite. Cette force étant conservative,  $E_m$  est conservée au cours du mouvement du satellite.

*Vitesse de libération* : La vitesse de libération est la vitesse minimale que doit avoir un projectile à la surface d'une planète pour qu'il ne

**Energie potentielle de gravitation** : L'énergie potentielle associée à la force de gravitation

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{i},$$

qui s'applique sur une masse  $m$  située en  $S$  à une distance  $r$  d'une masse  $M$  située en  $O$ ,  $\vec{OS} = r\vec{i}$  est donnée par :

$$E_p = -\frac{GmM}{r}.$$

L'origine de l'énergie potentielle a été prise en l'infini ( $r \rightarrow \infty$ ).

retombe jamais sur la planète. On dit que le projectile est libéré de l'attraction gravitationnelle de la planète. On ne tient pas compte du frottement sur l'atmosphère, si atmosphère il y a.

Supposons donc que je suis sur la Terre et que je lance un projectile avec une vitesse initiale verticale vers le haut  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{k}$  ( $\vec{k}$  étant un vecteur unitaire vertical et orienté vers le haut). A cause de l'attraction gravitationnelle de la Terre la vitesse du projectile va diminuer. Si la norme de la vitesse initiale  $v_0$  n'est pas assez grande, au bout d'un certain temps la vitesse du projectile va s'annuler et il va retomber sur la Terre. Si la norme de la vitesse initiale est suffisamment grande, la vitesse du projectile diminuera mais ne s'annulera jamais. Le projectile s'éloignera infiniment de la Terre.

Nous allons donc déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{v} = v \vec{k}$  du projectile en un point quelconque de sa trajectoire et examiner quelle est la condition sur la vitesse initiale  $v_0$  pour que la vitesse  $v$  ne s'annule jamais. Pour cela nous allons utiliser la conservation de l'énergie mécanique. En effet, le projectile n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est une force conservative et dont l'énergie potentielle associée est

$$E_p = -\frac{mMG}{r},$$

où  $m$  est la masse du projectile,  $M$  la masse de la planète,  $r$  la distance du projectile au centre de la planète et  $G$  est la constante universelle de la gravitation. On a choisi l'origine de l'énergie potentielle à l'infini (c'est à dire  $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$ ).

A l'instant initial, la norme de la vitesse du projectile est  $v_0$ , donc son énergie cinétique est  $\frac{1}{2}mv_0^2$ . Le projectile est lancé de la surface de la planète dont on notera  $R$  le rayon. L'énergie potentielle du projectile est donc  $-\frac{mMG}{R}$ . L'énergie mécanique initiale  $E_i$  du projectile est donc :

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R}.$$

A un instant quelconque après son lancement, on notera  $v$  la norme de la vitesse du projectile et  $r \geq R$  sa distance au centre de la planète. Son énergie mécanique pourra donc s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}.$$

La conservation de l'énergie mécanique du projectile :

$$E_i = E_m \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r},$$

permet d'obtenir l'expression de la norme de la vitesse  $v$  en chaque point de la trajectoire :

$$v^2 = v_0^2 - 2MG \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (4.9)$$



On souhaite que le projectile ne retombe jamais et s'éloigne infiniment de la planète, c'est à dire que lorsque  $r \rightarrow \infty$  alors  $v > 0$ . Or en utilisant l'Eq. (4.9), on obtient :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v^2 = v_0^2 - \frac{2MG}{R},$$

puisque  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0$ . Pour que  $v^2$  reste positif, il faut donc que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v^2 > 0 \Leftrightarrow v_0^2 - \frac{2MG}{R} > 0 \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2MG}{R}} \equiv v_\ell.$$

En conclusion, pour que le projectile ne retombe jamais sur la planète de masse  $M$  et de rayon  $R$ , il faut que la norme de sa vitesse initiale  $v_0$  soit supérieure à la vitesse de libération  $v_\ell$  dont l'expression est :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR},$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète  $g = \frac{GM}{R^2}$ .

## 4.6 Energie, équilibre et stabilité

Dans cette section on ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs, c'est à dire aux systèmes qui ne sont soumis qu'à des forces conservatives. Dans ce cas, la donnée de l'énergie potentielle  $E_p(M)$  en fonction de la position  $M$  du système permet de déterminer les positions où le système est à l'équilibre et d'étudier la stabilité des positions d'équilibre.

### 4.6.1 Définitions

*Position d'équilibre* On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle. La position  $M_e$  du point correspondante est appelée position d'équilibre.

*Equilibre stable* On dira que la position d'équilibre  $M_e$  est une position d'équilibre stable, si lorsqu'on écarte le système de  $M_e$ , les forces tendent à le rapprocher de  $M_e$ .

*Equilibre instable* On dira que la position d'équilibre  $M_e$  est instable, si lorsqu'on écarte le système de sa position d'équilibre, les forces tendent à l'éloigner de  $M_e$ .

### 4.6.2 Extrema de l'énergie potentielle

Nous allons montrer qu'une position d'équilibre  $M_e$  est un extremum de l'énergie potentielle. La position d'équilibre est stable si  $M_e$  est un

**vitesse de libération :** La vitesse de libération  $v_\ell$  est la vitesse minimale que doit avoir un projectile à la surface d'une planète pour qu'il ne retombe jamais sur la planète. On dit que le projectile est libéré de l'attraction gravitationnelle de la planète. On montre que :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2MG}{R}} = \sqrt{2gR},$$

où  $M$  est la masse et  $R$  le rayon de la planète et  $G$  est la constante universelle de la gravitation.  $g$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète  $g = \frac{GM}{R^2}$ .

**Une position d'équilibre** d'un point matériel est un point  $M_e$  tel que

$$\sum_{\vec{F}} \vec{F}(M_e) = \vec{0}.$$

minimum local et l'équilibre est instable si  $M_e$  est un maximum local de l'énergie potentielle.

Cette propriété de l'énergie potentielle est générale, nous la démontrons ici uniquement dans le cas où  $E_p(x)$  est une fonction d'une variable  $x$ , représentant l'abscisse de  $M$  sur un axe.

*Démonstration* La résultante  $\vec{F}$  des forces qui s'appliquent sur le système dérive d'une énergie potentielle, puisqu'elle est conservative. On a donc :

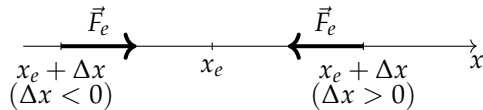
$$\frac{dE_p}{dx} = -f(x) = -\vec{F}(x) \cdot \vec{i}.$$

Considérons une position d'équilibre  $x = x_e$ . Par définition  $\vec{F}(x_e) = \vec{0}$  et donc

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} = 0; \quad x_e \text{ une position d'équilibre.}$$

C'est la définition d'un extremum. La tangente à la courbe d'équation  $y = E_p(x)$  au point  $x_e$  est horizontale. En  $x_e$ , la fonction  $E_p(x)$  possède soit un minimum, soit un maximum soit un point d'inflexion.

Supposons que le système est à l'équilibre, en  $x_e$ . Ecartons le d'une petite quantité  $\Delta x$  de sa position d'équilibre. Si l'équilibre est stable, la résultante des forces au point  $x_e + \Delta x$  tend à rapprocher le système de  $x = x_e$ , c'est à dire que la composante de la force sur le déplacement  $\Delta x \vec{i}$  est opposée au déplacement.



Cela peut s'écrire de la façon suivante (voir Fig. 4.5) :

$$\vec{F}(x_e + \Delta x) \cdot \vec{i} \Delta x < 0; \quad x_e \text{ équilibre stable.}$$

Soit :

$$-\Delta x \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} < 0 \Leftrightarrow \Delta x \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} > 0,$$

où on a précisé le point  $x_e + \Delta x$  ou la dérivée de  $E_p$  devait être calculée.

On en déduit que si  $\Delta x$  est positif la dérivée  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x}$  est positive, donc la fonction  $E_p(x)$  augmente, alors que si  $\Delta x$  est négatif, la dérivée  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x}$  est négative et donc la fonction  $E_p(x)$  diminue.  $x_e$  est donc bien un minimum.

Une autre façon de le montrer est d'écrire que :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} \simeq \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e} + \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} \Delta x = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} \Delta x,$$

**Equilibre stable :**  $M_e$  est une position d'équilibre stable si dans un voisinage de  $M_e$  la résultante des force tend à rapprocher le système de  $M_e$ . Une position d'équilibre  $M_e$  est stable si et seulement si  $M_e$  est un minimum de l'énergie potentielle.

FIGURE 4.5:  $x_e$  est un équilibre stable si lorsqu'on éloigne le système de  $x_e$  la résultante des forces  $\vec{F}_e$  tend à le rapprocher à nouveau vers  $x_e$ . Ceux qui peut se résumer par  $\vec{F}_e \cdot \vec{i} \Delta x < 0$ .

où on a utilisé le fait qu'en  $x = x_e$ ,  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e} = 0$ . On obtient donc :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_e + \Delta x} \Delta x > 0 \Leftrightarrow \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} (\Delta x)^2 > 0 \Leftrightarrow \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_e} > 0$$

Ce qui est la définition d'un minimum.

*Exemple* Considérons l'oscillateur harmonique :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + C$$

Le minimum de l'énergie potentielle est  $x = x_e$ , il correspond bien à la position d'équilibre stable de l'oscillateur.

#### 4.6.3 Dynamique dans le voisinage d'une position d'équilibre stable

On considère toujours que le système est conservatif, c'est à dire que les forces appliquées (qui travaillent) sont conservatives. En vertu du théorème de l'énergie mécanique, cette dernière est conservée, c'est à dire qu'elle est constante au cours du temps. Supposons de plus que la dynamique du système a lieu proche d'un point d'équilibre stable  $x_e$ . C'est à dire que l'on suppose que  $x(t)$  reste assez proche de  $x_e$  de telle sorte qu'on puisse approcher l'énergie potentielle  $E_p(x)$  par son développement limité au voisinage de  $x_e$ . On pourra écrire donc :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_e) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} (x - x_e)^2.$$

Le deuxième terme  $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e}$  est nul puisque  $x_e$  est une position d'équilibre. Donc :

$$E_p(x) \simeq \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + E_p(x_e)$$

où on a défini

$$k = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}.$$

On reconnaît que l'énergie potentielle  $E_p(x)$  a exactement la même forme que celle de l'oscillateur harmonique. Le paramètre  $k$  ne représente plus la raideur du ressort mais est la dérivée seconde de l'énergie potentielle calculée au point  $x_e$ . On en déduit que la dynamique dans le voisinage d'une position d'équilibre stable est approximativement la même que celle d'un oscillateur harmonique. C'est à dire que la loi horaire est sinusoïdale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où la pulsation  $\omega$  est :

$$\omega = \left[ \frac{1}{m} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e} \right]^{1/2}.$$

Dans le voisinage d'une position d'équilibre la dynamique d'un système conservatif est approximativement la même que celle d'un oscillateur harmonique. C'est à dire que la loi horaire est sinusoïdale :

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

où la pulsation est  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , soit

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_e}}$$

et  $E_p$  est l'énergie potentielle du système.



A

*Trigonométrie*

Nous résumons brièvement les définitions et quelques propriétés relatives aux fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente. Ces notions seront considérées comme acquises.

### A.1 Le triangle rectangle

Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ , on note  $R$  l'hypothénuse  $AC$  et  $\theta$  l'angle en  $A$  et  $\alpha$  l'angle en  $C$ . Le cosinus et le sinus de l'angle  $\theta$  sont définis par les rapports suivants :

$$\cos \theta = \frac{AB}{R}; \quad \sin \theta = \frac{BC}{R}.$$

On se rappellera que pour obtenir le cosinus il faut considérer le coté

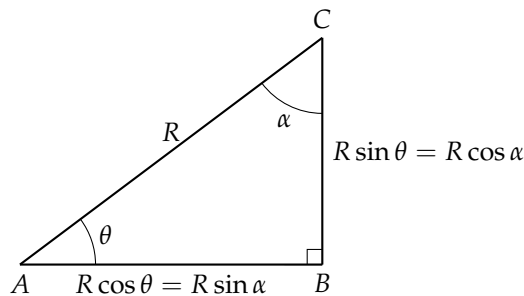


FIGURE A.1: *Le triangle rectangle.*

*adjacent* (du même coté) à l'angle, alors que pour le sinus il faut considérer le coté opposé à l'angle. On aura donc pour l'angle  $\alpha$  les relations suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{AB}{R}; \quad \cos \alpha = \frac{BC}{R}.$$

Comme la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$  ( $180^\circ$ ), les angles  $\theta$  et  $\alpha$  sont complémentaires, c'est à dire que :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

On a donc la propriété :

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta; \quad \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta.$$

Le théorème de Pythagore :  $R^2 = (AB)^2 + (BC)^2$  implique que :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

On introduit aussi la fonction tangente de l'angle  $\theta$  notée  $\tan \theta$ . Elle est définie comme le rapport du sinus sur le cosinus de l'angle  $\theta$  :

$$\tan \theta \equiv \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

#### Définition de cosinus et sinus

$$\cos = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}; \quad \sin = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}};$$

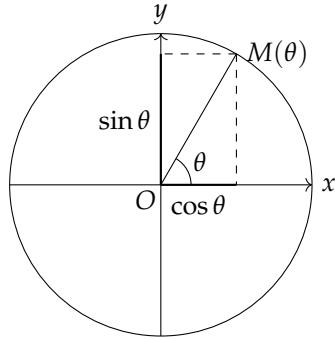


FIGURE A.2: Le cercle trigonométrique.

## A.2 Cercle trigonométrique

Il est commode de visualiser les cosinus et sinus en utilisant le cercle trigonométrique. Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1. Les coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point  $M$  situé sur le cercle sont les cosinus et le sinus de l'angle  $\theta$  que fait le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  avec l'axe  $Ox$  (voir figure A.2).

## A.3 Propriétés des sinus et cosinus et tangente

### A.3.1 Valeurs remarquables

Dans le tableau ci-dessous nous résumons les valeurs remarquables des sinus et cosinus pour des angles dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Les valeurs des sinus et cosinus dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  s'obtiennent en utilisant les propriétés de périodicité et de symétrie données dans la section suivante.

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

TABLE A.1: Valeurs particulières des fonctions cosinus et sinus.

### A.3.2 Périodicité et symétries

En utilisant le cercle trigonométrique, il n'est pas très difficile de vérifier les propriétés suivantes :

— Périodicité :

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

— Parité ou symétrie par rapport à  $Ox$  :

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta\end{aligned}$$

— Symétrie par rapport à  $Oy$  :

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

— Inversion par rapport à  $O$  :

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta\end{aligned}$$

— Complémentarité

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{\tan \theta}\end{aligned}$$

### A.3.3 *Pythagore*

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

### A.3.4 *Somme des angles*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

### A.3.5 *Angle double*

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

qui est un cas particulier des équations précédentes.



## A.3.6 dérivée

$$\frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta$$

donc les fonctions sinus et cosinus vérifient :

$$\frac{d^2 \cos \theta}{d\theta^2} = -\cos \theta \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2 \sin \theta}{d\theta^2} = -\sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

Elles sont donc, toutes les deux, solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} f(\theta) + f(\theta) = 0.$$

La dérivée de la fonction tangente peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{d \tan \theta}{d\theta} = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (\text{A.3})$$



*B*

*Vecteurs*

### B.1 Définition

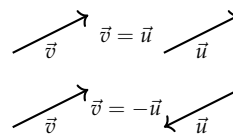
Un vecteur  $\vec{v}$  est déterminé par 3 quantités, sa direction, son sens et sa norme qui est un nombre réel positif et sera notée  $\|\vec{v}\|$ . On représente un vecteur par une flèche dont la longueur représente sa norme et la direction et sens de la flèche représentent la direction et le sens du vecteur. On pourra aussi représenter un vecteur par un couple de points  $A$  et  $B$ , c'est à dire la flèche qui va de  $A$  vers  $B$  que l'on notera  $\overrightarrow{AB}$ . On dit alors que le vecteur est représenté par le bipoint  $AB$ .

**Vecteur**  $\vec{v}$  : direction, sens et norme  
 $\|\vec{v}\| \geq 0$ .



### B.2 Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux, si les flèches qui les représentent sont parallèles, de même sens et de même longueur. Deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  sont opposés :  $\vec{v} = -\vec{u}$ , s'ils ont même norme, même direction mais sont de sens opposés.

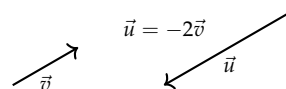


### B.3 Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont même direction. Ils peuvent avoir des normes ou des sens différents.

### B.4 Multiplication par un nombre réel :

Soit  $a$  un nombre réel alors  $\vec{u} = a\vec{v}$  est colinéaire à  $\vec{v}$  et  $\|\vec{u}\| = |a|\|\vec{v}\|$ . Multiplier un vecteur par un nombre réel positif revient simplement à multiplier la longueur de la flèche par ce nombre sans rien changer d'autre. Si de plus le nombre est négatif, le sens est inversé.

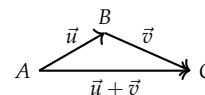


### B.5 Addition de deux vecteurs

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  représentés par leurs bipoints respectifs :  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

c'est la relation de Chasles.

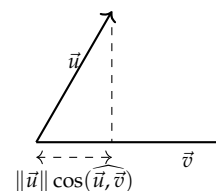


### B.6 Produit scalaire

Le résultat du produit scalaire entre deux vecteurs est un nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

On remarque que  $\|\vec{u}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  est la projection de  $\vec{u}$  sur la direction de  $\vec{v}$ . Donc si la norme de  $\vec{v}$  est égale à 1 alors  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est égale à la projection de  $\vec{u}$  sur la direction de  $\vec{v}$ .



### B.7 Norme

La norme d'un vecteur  $\vec{v}$  est donnée par son carré scalaire :

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2.$$

### B.8 Orthogonalité :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs orthogonaux, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

### B.9 Base du plan :

Tous les vecteurs du plan peuvent être obtenus en faisant des combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires. Choisissons deux vecteurs du plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et soit  $\vec{v}$  un vecteur quelconque du plan, alors, il existe deux nombres réels  $v_1$  et  $v_2$  tels que :

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est appelée, base du plan. Les nombres réels  $v_1$  et  $v_2$  sont appelés composantes du vecteur  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

### B.10 Base orthonormée du plan :

Si on choisit deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  de norme égale à 1 et orthogonaux. C'est à dire que  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  vérifient les relations suivantes :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \tag{B.1}$$

alors la base est dite orthonormée. Dans ce cas, il est très simple de déterminer les composantes  $v_x$  et  $v_y$  d'un vecteur quelconque du plan  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}.$$

En effet, pour obtenir  $v_x$ , il suffit de prendre le produit scalaire de cette équation avec le vecteur  $\vec{i}$ , et on obtient :

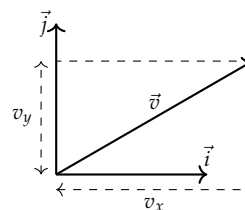
$$\vec{v} \cdot \vec{i} = v_x(\vec{i} \cdot \vec{i}) + v_y(\vec{j} \cdot \vec{i}) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{i} = v_x \tag{B.2}$$

où on a utilisé les relations d'orthonormalisation données par l'Eq. B.1. De même pour obtenir  $v_y$ , on effectue le produit scalaire du vecteur  $\vec{v}$  avec le vecteur  $\vec{j}$ , et on obtient :

$$v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}.$$

Dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ v_x &= \vec{v} \cdot \vec{i}; \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$



### B.10.1 Produit scalaire et norme en fonctions des composantes

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  donnés par leurs composantes dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \\ \vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j}\end{aligned}$$

alors le produit scalaire des deux vecteurs peut s'écrire de la façon suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y \quad (\text{B.3})$$

et donc en particulier la norme d'un vecteur :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad (\text{B.4})$$

### B.11 Base orthonormée de l'espace

Tous les vecteurs de l'espace peuvent être obtenus en faisant des combinaisons linéaires de trois vecteurs de base, à condition que ces trois vecteurs ne soient pas dans le même plan. Si les trois vecteurs de base sont de norme 1 et sont orthogonaux entre eux alors la base est dite orthonormée. Par convention, on notera  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base orthonormée de l'espace, où  $\vec{i}, \vec{j}$  engendrent le plan horizontal et  $\vec{k}$  est vertical vers le haut.

### B.12 Produit scalaire dans une base orthonormée :

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , dont on connaît les composantes dans une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \\ \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},\end{aligned}$$

alors le produit scalaire entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'exprime en fonction des composantes de la façon suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Dans le cas particulier où  $\vec{u} = \vec{v}$ , on obtient l'expression de la norme du vecteur :

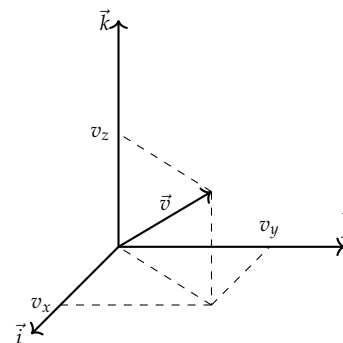
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

### B.13 Dimension d'un vecteur :

Lorsqu'un vecteur est utilisé pour représenter une quantité physique, le vecteur possédera une dimension. La dimension du vecteur sera la même que celle de ses composantes. Cela implique d'une part que les trois

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée de l'espace :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ v_x &= \vec{v} \cdot \vec{i}; \quad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}; \quad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}\end{aligned}$$



composantes du vecteur doivent avoir la même dimension, et d'autre part que les vecteurs de la base orthonormée sont sans dimension. Par exemple :

- Si un point  $M$  de l'espace est repéré par le vecteur  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , alors la dimension du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est la dimension de  $x$ ,  $y$  et  $z$  ; c'est à dire une longueur  $L$ .
- Si une force  $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ , alors la dimension du vecteur  $\vec{F}$  et des composantes  $F_x, F_y, F_z$  est  $MLT^{-2}$ .





*C*

*Etude de fonctions d'une variable réelle*

LES FONCTIONS sont des outils mathématiques utilisés comme une brique de base pour décrire des relations entre des quantités physiques. Dans ce chapitre nous rappelons essentiellement les notions de graphes d'une fonction et de dérivée d'une fonction. Nous étudierons quelques fonctions élémentaires qui permettront de modéliser une variété de phénomènes physiques.

### C.1 Fonction et son graphe

Une fonction réelle à variable réelle est une application d'un sous ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$  vers l'ensemble  $\mathbb{R}$ , qui à chaque  $x \in D$  associe un seul  $y \in \mathbb{R}$ . Si on note  $f$  la fonction, on écrira :

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

Dans cette écriture,  $f$  représente la fonction alors que  $f(x)$  est le nombre réel que la fonction  $f$  associe à  $x$ . Mais souvent on dira aussi "la fonction  $f(x)$ ".  $D$  est l'ensemble de définition de la fonction  $f$ . L'élément  $y$  qui est associé à  $x$  par la fonction  $f$  est appelé image de  $x$  et  $x$  est appelé l'antécédent de  $y$ . Chaque  $x$  a une seule image  $y$ , mais une image  $y$  peut avoir plusieurs antécédents. On appelle image de la fonction  $f$ , le sous ensemble de  $\mathbb{R}$ , constitué de toutes les images des  $x \in D$ .

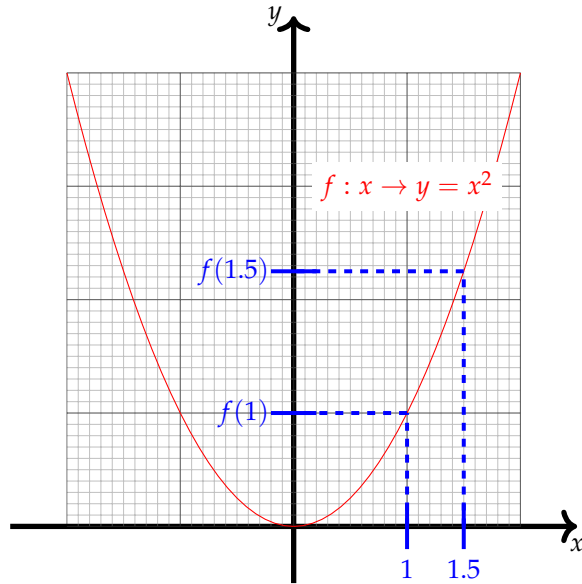
Le graphe de la fonction  $f$  est l'ensemble des points qui ont pour coordonnées  $(x, f(x))$ , dans un repère orthonormé  $Oxy$ , lorsque  $x$  prend toutes ses valeurs sur l'ensemble de définition  $D$ . Le graphe de la fonction  $f(x)$  est donc la courbe (ou une succession de courbes, lorsque l'ensemble de définition est composé de plusieurs intervalles), dont les points  $(x, y)$ , vérifient la relation  $y = f(x)$ . On dit que l'équation de la courbe est  $y = f(x)$ .

**Exemple**  $f(x) = x^2$  : La fonction  $f$  qui à chaque nombre réel  $x$  associe son carré  $x^2$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . C'est à dire que l'ensemble de définition  $D$  est  $\mathbb{R}$  tout entier. Dans un repère  $Oxy$ , on peut tracer les points  $(x, x^2)$  et on obtient le graphe de la fonction  $f$  que l'on a représenté sur la figure C.1 qui est la courbe d'équation  $y = x^2$ .

Ce graphe a été construit point par point en prenant 25 valeurs de  $x$  dans l'intervalle  $[-2, 2]$ , et en calculant  $x^2$  pour chacune de ces 25 valeurs.

On voit que la fonction est décroissante sur l'intervalle  $[-2, 0]$  et croissante sur l'intervalle  $[0, 2]$ . La fonction possède un minimum au point  $(0, 0)$  ( $x = 0, f(0) = 0$ ). On souhaiterait savoir si pour  $x > 2$  la fonction est toujours croissante (et si pour  $x < -2$  elle est toujours décroissante). C'est à dire savoir si la fonction n'a pas d'autres minima ou maxima.

Le but de ce chapitre est d'introduire (de rappeler) les méthodes qui permettent d'obtenir ces informations : minima, maxima, croissance et


 FIGURE C.1: Graphe de la fonction  $f : x \rightarrow y = x^2$ 

décroissance de la fonction, sans avoir à la tracer point par point.

**Remarques :**

1. Chaque  $x \in \mathbb{R}$  a une seule image  $y = x^2$ , mais chaque  $y \neq 0$  a deux antécédents  $+\sqrt{y}$  et  $-\sqrt{y}$ . L'image de  $\mathbb{R}$  par la fonction  $f(x) = x^2$  est  $\mathbb{R}^+$ .
2. Dans l'exemple ci dessous nous avons appelé  $x$  la variable. Mais nous aurions pu l'appeler d'une autre façon. Par exemple, on aurait pu écrire  $f(t) = t^2$ . La fonction  $f$  aurait été la même. C'est toujours l'application qui à chaque réel associe son carré. Le symbole utilisé pour représenter la variable ( $x$ , ou  $t$ ) n'est pas important ce qui est important est le calcul qu'il faut effectuer pour obtenir le nombre réel ( $f(x)$  ou  $f(t)$ ) qui lui est associé par la fonction  $f$ .

---

**Exercices**

1. Tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3x; \quad g(x) = -2x + 1$$

2. Quel est le nom donné à ces fonctions ?
  3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des graphes de ces deux fonctions avec les axes  $Ox$  et  $Oy$ .
-

## C.2 Dérivée, variation et extrema d'une fonction

### C.2.1 Définition de la dérivée

Une fonction  $f$  est dite dérivable en un point  $x_0$  si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{C.1})$$

Cette limite est appelée la dérivée de la fonction  $f$  au point  $x_0$  et sera noté  $f'(x_0)$  ou  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$ . Nous utiliserons souvent la seconde notation, qui précise que c'est la dérivée par rapport à  $x$  que l'on calcule.

Le numérateur,  $f(x_0 + h) - f(x_0)$ , et le dénominateur  $h$  du taux d'accroissement tendent vers zéro quand  $h$  tend vers zéro. Dire que la fonction est dérivable en  $x_0$  c'est dire que le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro de la même façon de telle sorte que leur rapport tend vers une limite finie. La quantité  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  est appelée *taux d'accroissement* de la fonction  $f$  en  $x_0$ . En général, en plus de dépendre de  $x_0$ , le taux d'accroissement dépend de  $h$ .

La fonction  $f$  est dite dérivable sur un intervalle (ouvert)  $I$  de  $\mathbb{R}$  si elle est dérivable en chaque point de l'intervalle. On peut alors définir la fonction  $f'(x)$ , dont la valeur en chaque point  $x \in I$  est égale à la dérivée de  $f$ .  $f'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_x ; \forall x \in I$ .

**Exemple :** Nous avons vu en cinématique que la position d'un mobile qui a une trajectoire rectiligne était repérée par son abscisse  $x$  qui est une fonction du temps  $t$ . Ici le nom de la fonction est  $x$  (et non pas  $f$ ) et la variable est le temps  $t$  (et non pas  $x$ ). Pour chaque instant  $t$ , la fonction position donne l'abscisse du mobile à cet instant. C'est à dire que l'on écrit :

$$\begin{aligned} x &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow x(t) \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement de la position  $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$  est la vitesse moyenne du mobile pendant la durée  $h$ , entre les instants  $t$  et  $t+h$ . C'est bien la distance parcourue pendant la durée  $h$  divisée par cette même durée.

La vitesse instantanée  $v(t)$  est la limite du taux de variation lorsque  $h$  tend vers zéro.  $v(t)$  est donc la fonction dérivée de la fonction position  $x(t)$ .

**Remarque** En physique, si  $f$  a une dimension que l'on note  $[f]$  et  $x$  a une dimension noté  $[x]$ , alors la dimension de la dérivée  $[f'(x)]$  est  $[f'(x)] = \frac{[f]}{[x]}$ . Par exemple si on considère que  $f(t)$  est une distance parcourue pendant le temps  $t$ , alors la dérivée  $f'(t)$  aura la dimension d'une distance que divise un temps, ce qui est la dimension d'une vitesse, comme il se doit.

#### Dérivée en un point

La dérivée  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$  de la fonction  $f(x)$  en  $x_0$  est définie par la limite du taux d'accroissement :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

#### Fonction dérivée

La fonction  $f'(x) = \left. \frac{df}{dx} \right|_x$  obtenue en calculant la dérivée en chaque point  $x$  (où elle est définie) est la fonction  $f'$  dérivée de  $f$ .

#### Dimension de la dérivée :

$$[f'(x)] = \frac{[f]}{[x]}$$

### Exercices

En utilisant la définition de l'Eq. (C.1), calculer la dérivée des fonctions suivantes aux point indiqués.

1.  $f(x) = 3x$ . en  $x_0 = 0$ , en  $x = 1$ . En un  $x$  quelconque.
2. Même question pour les fonctions  $g(t) = t^2$  et  $h(t) = t^3$ .
3. Généraliser à la fonction  $f(x) = x^n$ , où  $n \in \mathbb{N}$ .

#### C.2.2 Signification géométrique de la dérivée

*Signification géométrique du taux d'accroissement* Le taux d'accroissement  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  de la fonction  $f(x)$  en  $x_0$  est en fait la pente de la droite qui passe par les deux points  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ .

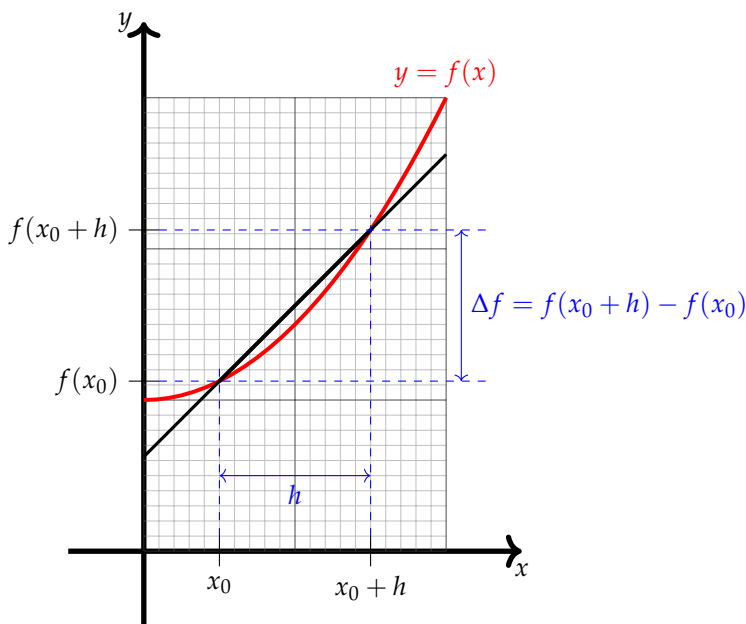


FIGURE C.2: La pente de la droite qui passe par les deux points  $(x_0, f(x_0))$  et  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f(x)$  en  $x_0$ .

En effet, en partant du point  $(x_0, f(x_0))$  si on se déplace horizontalement d'une distance  $h$  parallèlement à l'axe  $Ox$ , il faut monter verticalement de  $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$  pour se retrouver sur la droite au point  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  (voir figure C.2). La pente de la droite est donc bien  $\frac{\Delta f}{h}$ . Cette droite est appelée la droite sécante, car elle coupe le graphe de la fonction  $f(x)$  en deux points.

*Signification géométrique de la dérivée* Lorsque  $h$  diminue, la droite sécante se rapproche de la droite qui est tangente au graphe de la fonction  $f$  au point  $(x_0, f(x_0))$ . On en déduit que la dérivée de  $f$  au point  $x_0$  est

la pente de la droite tangente à au graphe de la fonction  $f$ , au point  $(x_0, f(x_0))$ .

L'équation de la droite  $D$  tangente à la courbe  $y = f(x)$ , au point  $(x_0, f(x_0))$  est donc :

$$y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + f(x_0).$$

Vérifions : il s'agit bien de l'équation d'une droite  $y = a(x - x_0) + c \Leftrightarrow y = ax + b$  où la pente  $a$  est  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$  et  $c = f(x_0)$  (et donc  $b = -ax_0 + c$ ). De plus lorsque  $x = x_0$  on a bien que  $y = f(x_0)$ , donc la droite passe bien par le point  $(x_0, f(x_0))$ .

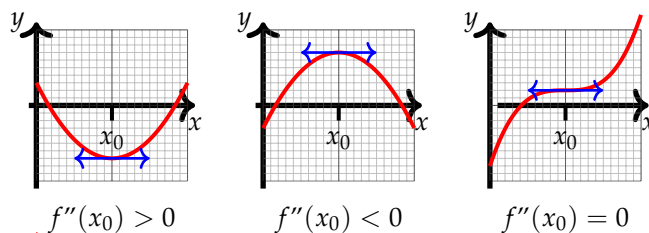
### C.2.3 Variation et extremas

Le signe de la dérivée de la fonction nous donne le sens de la variation de la fonction. En effet, la dérivée au point  $x$  étant la pente de la tangente en ce point, on en déduit que :

- $f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow f$  est croissante au point  $x_0$ .
- $f'(x_0) < 0 \Leftrightarrow f$  est décroissante au point  $x_0$ .
- $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$  le point  $x$  est un extremum de la fonction. La tangente au point  $x_0$  est horizontale et  $x_0$  est soit un minimum soit un maximum soit un point d'inflexion.

Pour distinguer entre ces 3 cas et déterminer la nature de l'extremum, on peut calculer la dérivée seconde  $f''(x_0) = \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0}$  (dérivée de la dérivée) de la fonction au point  $x_0$  considéré. En effet, Si  $x_0$  est un extremum de  $f$ , c'est à dire que  $f'(x_0) = 0$  et si

- $f''(x_0) > 0$  alors  $x_0$  est un minimum.
- $f''(x_0) < 0$  alors  $x_0$  est un maximum.
- $f''(x_0) = 0$  alors  $x_0$  est un point d'inflexion.



La dérivée de  $f$  au point  $x_0$  est la pente de la droite tangente au graphe de la fonction  $f$ , au point  $(x_0, f(x_0))$ .

#### Variation et dérivée

- $f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow f$  est croissante au point  $x_0$ .
- $f'(x_0) < 0 \Leftrightarrow f$  est décroissante au point  $x_0$ .
- $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$  le point  $x_0$  est un extremum de la fonction.

#### Dérivée seconde et extrema

Si  $f'(x_0) = 0$  et si

- $f''(x_0) > 0$  alors  $x_0$  est un minimum.
- $f''(x_0) < 0$  alors  $x_0$  est un maximum.
- $f''(x_0) = 0$  alors  $x_0$  est un point d'inflexion.

FIGURE C.3: Dérivée seconde  $f''(x_0)$  d'une fonction  $f$  dans le voisinage d'un extremum  $x_0$  de la fonction,  $f'(x_0) = 0$ .

Cela se montre facilement. Considérons le premier cas : comme  $f''(x_0) > 0$ , la dérivée  $f'(x)$  est une fonction croissante en  $x_0$ . Comme elle s'annule en  $x_0$ ,  $f'(x)$  est négative à gauche de  $x_0$  ( $x < x_0$ ) et positive à droite

de  $x_0$  ( $x > x_0$ ). La fonction  $f(x)$  est donc décroissante à gauche de  $x_0$  et croissante à droite de  $x_0$ . le point  $x_0$  est donc bien un minimum. Le raisonnement est le même pour les autres cas.

#### C.2.4 Propriétés de la dérivée

**Linéarité** L'opération de dérivation est une opération linéaire :

$$\frac{d}{dx} (af(x) + bg(x)) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}$$

où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivable au point  $x$ .

#### Dérivée d'un produit – Formule de Leibniz

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}.$$

**Multiplication par une constante** De la relation précédente, on en déduit que si  $g(x)$  est une constante que l'on note  $a$ , alors

$$\frac{d}{dx} [af(x)] = a \frac{df}{dx}$$

puisque la dérivée d'une constante est nulle.

**Dérivée d'une fonction composée** On considère une fonction  $g$  qui dépend de  $x$  par l'intermédiaire d'une autre fonction  $u(x)$ , c'est à dire que  $g(x) = f(u(x))$ . Alors :

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_x = \left. \frac{d}{dx} f(u(x)) \right|_x = \left. \frac{du}{dx} \right|_x \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}.$$

*Exemple :* Considérons la fonction  $g(x) = \sin(x^2)$ . On peut considérer que cette fonction est la composée de la fonction  $u(x) = x^2$  par la fonction  $f(u) = \sin(u)$ . On aura bien :  $g(x) = f(u(x)) = \sin(u(x)) = \sin(x^2)$ . La dérivée de  $\sin(x^2)$  en chaque point  $x$  se calculera de la façon suivante :

— On calcule  $\left. \frac{du}{dx} \right|_x$  :

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \left. \frac{dx^2}{dx} \right|_x = 2x.$$

— On calcule  $\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}$  :

$$\frac{df}{du} = \cos(u) \Rightarrow \left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)} = \cos(x^2).$$

— On en déduit la dérivée de  $\sin(x^2)$ , en effectuant le produit de  $\left. \frac{du}{dx} \right|_x$  par  $\left. \frac{df}{du} \right|_{u=u(x)}$  :

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2) = 2x \cos(x^2).$$

C.2.5 *Dérivée de la fonction réciproque*

La fonction réciproque de  $f(x)$  est la fonction  $f^{(-1)}(x)$  telle que

$$f^{(-1)}(f(x)) = x \quad (\text{C.2})$$

Elle est définie sur l'image de  $f(x)$ , et donne l'antécédant  $x$  de  $f(x)$  lorsqu'elle est appliquée à  $f(x)$ . C'est à dire que si  $y = f(x)$  alors  $f^{(-1)}(y) = x$ . Ou encore :

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow y = f(x) \\ f^{(-1)}(y) &= x \longleftarrow y \end{aligned}$$

En utilisant la dérivée des fonctions composées, on obtient la dérivée de la fonction réciproque en dérivant l'Eq. (C.2). En dérivant le membre de gauche de l'Eq. (C.2), on obtient :

$$\frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] = \left. \frac{df}{dx} \right|_x \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)}.$$

Par ailleurs, en dérivant le membre de droite de l'Eq. (C.2), on obtient  $\frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] = \frac{dx}{dx} = 1$ , donc :

$$\frac{d}{dx} [f^{(-1)}(f(x))] = \left. \frac{df}{dx} \right|_x \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)} = 1 \Rightarrow \left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_{y=f(x)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_x},$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\left. \frac{df^{(-1)}}{dy} \right|_y = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=f^{(-1)}(y)}}.$$

*Exemple :* Calculons la dérivée de la fonction logarithme népérien  $f(x) = \ln(x)$ , sachant que  $\ln(x)$  est la fonction réciproque de la fonction exponentielle  $\exp(x)$ . La dérivée de la fonction exponentielle étant la fonction exponentielle elle-même.

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\left. \frac{d \exp(u)}{du} \right|_{u=\ln(x)}} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$



### C.2.6 Dérivées de fonctions usuelles

Fonctions	Dérivées
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$

*Remarques :* Les deux premières lignes de ce tableau sont en fait des cas particuliers de la troisième ligne avec  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = -1$ , respectivement.

En utilisant la dérivée des fonctions composées, on obtient les règles utiles suivantes :

$$\frac{d}{dx} f(ax) = a \frac{df}{du} \Big|_{u=ax}; \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-2} \frac{df}{dx}; \quad \frac{d}{dx} [f(x)]^\alpha = \alpha [f(x)]^{\alpha-1} \frac{df}{dx}. \quad (\text{C.3})$$

---

#### Exercices

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$x(t) = a \cos(\omega t); \quad f(x) = x \sin(ax); \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad u(t) = \exp(-t^2/a^2)$$

où  $a$  et  $\omega$  sont des nombre réels non nuls.

2. Déterminer la position des extréma de la fonction  $f(x) = x^3 - 3x$ .  
Déterminer la nature de chaque extremum : maximum, minimum ou point d'inflexion.
- 

### C.3 Etude des fonctions "usuelles"

#### C.3.1 Méthode

Pour étudier une fonction et obtenir l'allure de son graphe, nous allons systématiquement appliquer une série d'étapes.

1. **Symétrie ou périodicité :** Il s'agit de vérifier si la fonction a des propriétés de symétrie qui permet de restreindre l'intervalle d'étude de la variable. Si la fonction est périodique, c'est à dire qu'il existe un réel  $T$  tel que  $f(x+T) = f(x)$ ,  $\forall x \in D$ , alors, il suffit d'étudier la fonction pour  $x \in [0, T]$ . Si la fonction est paire  $f(-x) = f(x)$  ou impaire  $f(-x) = -f(x)$  alors il suffit d'étudier la fonction sur l'intervalle  $x \in [0, +\infty[$ .

2. **Domaine de définition** : On détermine le domaine de définition  $D$  de la fonction si celui-ci n'a pas été explicité. Par exemple la fonction  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ , n'est pas définie au point  $x = -1$ , puisque le dénominateur s'annule. Ou encore la fonction  $g(t) = \sqrt{1+t}$  n'est pas définie lorsque  $t < -1$ , car la racine d'un nombre négatif n'est pas un nombre réel.
3. **Points particuliers** : Il s'agit de déterminer le comportement de la fonction en des points particuliers. Par exemple, on détermine le comportement de la fonction aux limites de son ensemble de définition. On peut aussi déterminer en quels points  $x$  la fonction  $f(x)$  s'annule-t-elle.
4. **Sens de variation** : On détermine sur quels intervalles la fonction est-elle croissante ou décroissante. On détermine où sont situés les maxima et les minima de la fonction. Pour cela le calcul de la fonction dérivée est souvent utile. Cela revient alors à déterminer les intervalles où la dérivée est positive, négative et à déterminer les points où la dérivée s'annule.
5. **Tableau de variation** : On peut alors synthétiser toutes ces informations dans un tableau, appelé tableau de variation de  $f$ .
6. **Graphe** : A l'aide de toutes ces informations, on trace le graphe de  $f$ .

### C.3.2 Etude d'une fonction affine $f(x) = ax + b$

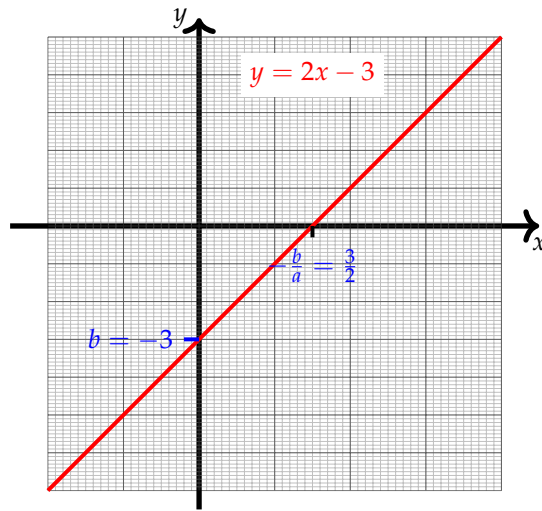
La fonction  $f(x) = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont des réels quelconques, fixés, est appelée fonction affine. Le graphe de  $f$  est une droite. La pente de la droite est  $a$ .  $b$  est appelé l'ordonnée à l'origine, c'est à dire la valeur que prend l'ordonnée  $y = f(x)$  lorsque  $x = 0$ . Si  $a = 0$ , la droite est parallèle à l'axe  $Ox$  et croise l'axe  $Oy$  en  $y = b$ . Si  $b = 0$ , la droite passe par l'origine ( $x = 0, y = 0$ ).

**Symétrie** Pas de symétrie.

**Domaine de définition** La fonction est définie pour tout  $x$  réel.

**Points particuliers**  $f(0) = b$  et  $f(-\frac{b}{a}) = 0$ .

**Variations** Si  $a > 0$  la fonction est croissante et si  $a < 0$  la fonction est décroissante. En effet la dérivée est  $f'(x) = a$ .

**Graphe**

 FIGURE C.4: *Graphe de la fonction*  
 $f(x) = 2x - 3$ .

**Remarques**

1. Il faut savoir tracer rapidement la droite à partir de son équation  $y = ax + b$ . On peut le faire, en traçant la droite qui passe par les deux points  $(0, b)$  et  $(-\frac{b}{a}, 0)$ . On peut aussi le faire en traçant la droite de pente  $a$  et qui passe par le point  $(0, b)$ .
2. Il faut aussi savoir écrire rapidement l'équation de la droite sachant qu'elle passe par le point  $(x_0, y_0)$  et que sa pente est  $a$ . L'équation de la droite s'écrit alors :  $y - y_0 = a(x - x_0)$ . En effet, la pente de la droite est bien  $a$  et lorsque  $x = x_0$  on a bien  $y = y_0$ . Ensuite si on veut, on peut écrire l'équation sous la forme  $y = ax + y_0 - ax_0$  et on identifie  $b = y_0 - ax_0$ . Mais cette dernière écriture n'est pas forcément nécessaire.
3. Il faut aussi savoir écrire l'équation de la droite qui passe par les deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ . Pour cela on peut calculer la pente de la droite :  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  et se ramener au cas précédent.

**C.3.3 Etude de la fonction  $f(x) = x^2$  - Parabole**

**Symétrie** La fonction est paire, en effet  $(-x)^2 = x^2$ . Il suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle  $x \in [0, +\infty[$ .

**Domaine de définition** La fonction est définie pour tout  $x$  réel.

**Points particuliers** La fonction s'annule en  $x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ .

**Variations** La dérivée de la fonction  $f(x) = x^2$  est  $f'(x) = 2x$ . La dérivée est négative pour  $x < 0$  et donc la fonction est décroissante si  $x < 0$ . La dérivée est positive pour  $x > 0$  et donc la fonction est croissante pour  $x > 0$ . On en déduit que le point  $x = 0$  est un minimum de la fonction  $f(x) = x^2$ .

**Tableau de variation**

$x$	$-\infty$		$0$		$+\infty$	
$f'(x) = 2x$	$+$	$-$	$0$	$+$	$+$	
$f(x) = x^2$	$+\infty$	↘		$0$	↗	
						$+\infty$

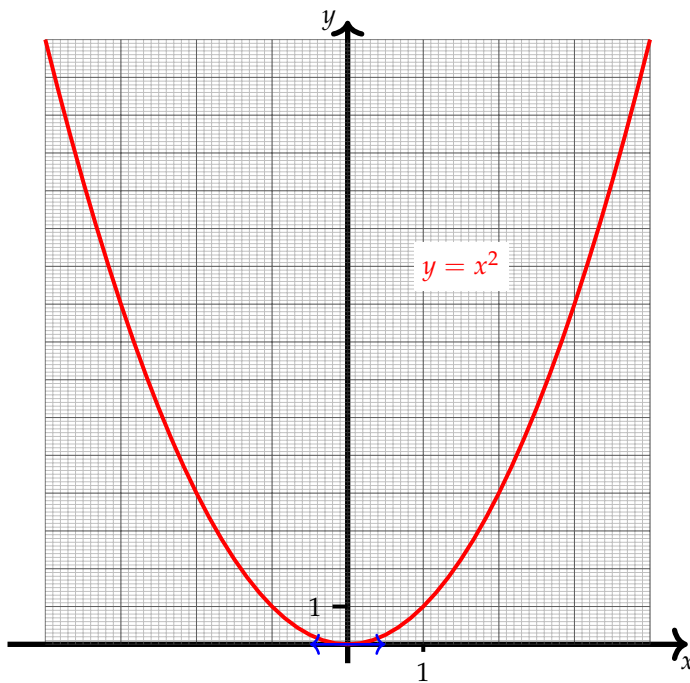
**Graphe**

FIGURE C.5: *Graphe de la fonction  $f(x) = x^2$ .*

**Remarques**

- Graphe de  $g(x) = ax^2$**  : A partir du graphe de la fonction  $f(x) = x^2$ , il est simple d'obtenir le graphe de la fonction  $g(x) = ax^2$ . C'est encore une parabole dont l'extremum est situé en  $x = 0, y = 0$ . Si  $a$

est positif l'allure générale du graphe de la fonction est le même que celui de  $f(x) = x^2$ , mais la parabole est plus resserrée si  $a > 1$  et plus évasée si  $0 < a < 1$ . Si  $a < 0$ , l'allure générale du graphe de la fonction  $g(x) = ax^2$  s'obtient à partir de celui de la fonction  $f(x) = x^2$  en effectuant la symétrique par rapport à l'axe  $Ox$ . L'extremum est alors un maximum.

2. **Graphe de  $h(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$**  : A partir du graphe de la fonction  $g(x) = ax^2$ , il n'est pas difficile d'obtenir le graphe de la fonction  $h(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$  où  $a, x_0$  et  $y_0$  sont des réels quelconques fixés. En effet, on remarque que  $h(x) - y_0 = a(x - x_0)^2$ . Donc, en définissant la nouvelle variable  $X = x - x_0$  et la nouvelle fonction  $H(X) = h(X + x_0) - y_0$ , on peut écrire  $H(X) = aX^2$ . Avec ces nouvelles variables, le graphe de la fonction  $h(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$  devient le graphe de la fonction  $H(X) = aX^2$ . Il s'agit donc d'une parabole dont l'extremum (maximum si  $a < 0$  et minimum si  $a > 0$ ) est situé en  $X = 0, Y = H(0) = 0$ . Or la relation entre les nouvelles et les anciennes variables :  $X = x - x_0$  et  $H = h - y_0$  est une simple translation de vecteur  $(x_0, y_0)$ . On en déduit que le graphe de la fonction  $h(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ , s'obtient à partir du graphe de la fonction  $y = ax^2$ , par la translation de vecteur  $(x_0, y_0)$ . En particulier l'extremum de la fonction  $h(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$  est situé au point  $(x_0, h(x_0)) = (x_0, y_0)$ .
3. **Graphe de  $p(x) = ax^2 + bx + c$**  : Cette dernière remarque permet d'obtenir le graphe d'un polynôme du second degré quelconque,  $p(x) = ax^2 + bx + c$ . En effet, il suffit de mettre le polynôme sous sa forme canonique :

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

et d'identifier  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$ . On en déduit que le graphe de  $p(x) = ax^2 + bx + c$  s'obtient à partir du graphe de la fonction  $g(x) = ax^2$  par une translation de vecteur  $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$ .

### C.3.4 Etude de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ - Hyperbole

**Symétrie** La fonction est impaire, en effet  $f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ . Il suffit donc d'étudier la fonction sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Domaine de définition** La fonction n'est pas définie en  $x = 0$ . Son domaine de définition est donc  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Points particuliers** On s'intéresse au comportement de la fonction lorsque  $x$  se rapproche des points qui limitent l'ensemble de définition, soit 0 et  $+\infty$ . On pourrait aussi étudier le comportement de la fonction en

$-\infty$ , mais comme la fonction est impaire, son comportement en  $-\infty$  se déduit de son comportement en  $+\infty$ . Les limites sont les suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ , où  $0^+$  indique que la limite est vers 0 tout en restant positive (limite vers 0 en restant à droite).

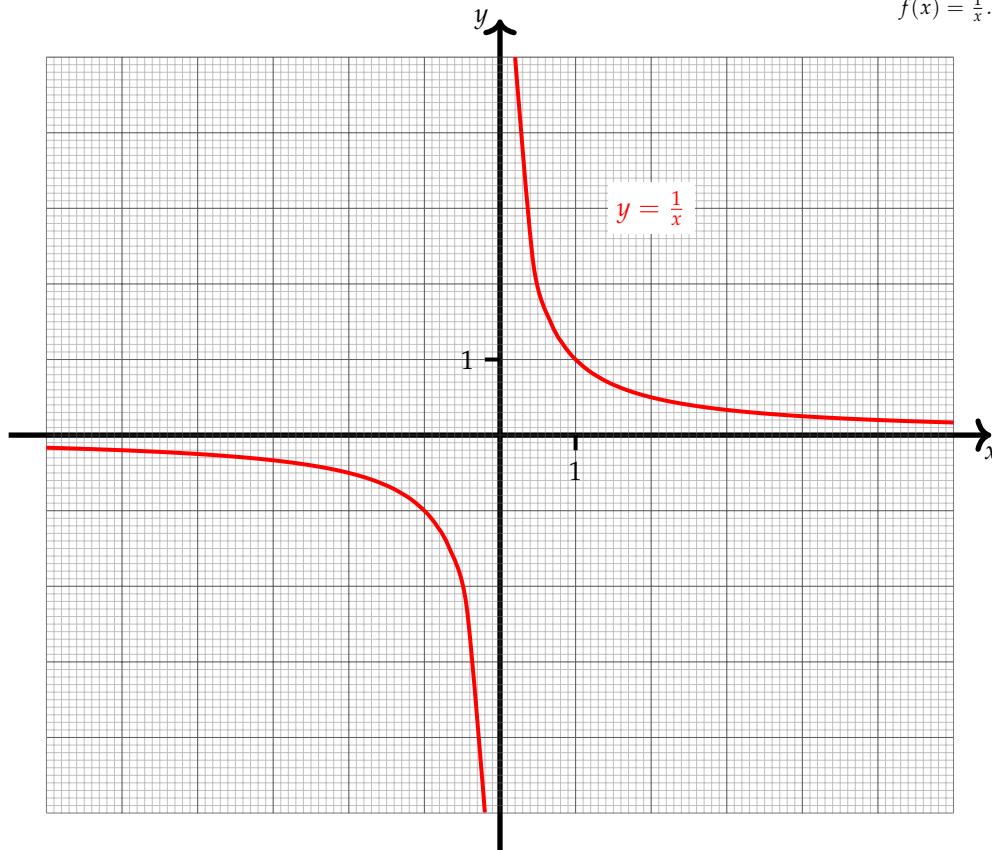
**Variations** la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  est décroissante  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ . En effet,  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$  si  $x_2 > x_1$  alors  $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ . On aurait pu aussi calculer la dérivée  $f'(x)$  de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$ . On obtient  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . La dérivée est donc toujours négative (puisque  $x^2 \geq 0$ ) et donc la fonction est décroissante. L'axe  $Ox$  (la droite d'équation  $y = 0$ ) est une asymptote.

**Tableau de variation**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$0^-$	$-$	$0^-$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$0^- \longrightarrow$	$-\infty$	$+\infty \longrightarrow 0^+$

**Graphes** A l'aide du tableau de variation, on trace le graphe de la fonction, voir figure C.6.

**Remarques** Nous avons étudié la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $x \in ]0, +\infty]$ . Pour obtenir le graphe de la fonction sur l'intervalle  $x \in ]-\infty, 0]$ , nous avons utilisé le fait que la fonction est impaire. La portion du graphe sur l'intervalle  $x \in ]-\infty, 0]$  s'obtient donc à partir de la portion du graphe sur l'intervalle  $x \in ]0, +\infty]$  en effectuant la symétrie par rapport à l'origine  $(0, 0)$ .

FIGURE C.6: Graphe de la fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$ .


### C.3.5 Etude de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

**Symétrie** Pas de propriété de symétrie. la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est toujours positive (ou nulle).

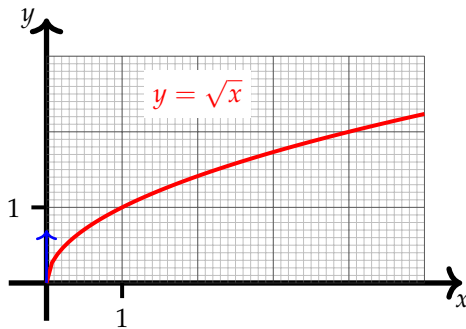
**Domaine de définition** La fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  uniquement. La racine d'un nombre négatif n'est pas un nombre réel.

**Points particuliers** Aux points qui limitent le domaine de définition, nous avons  $f(0) = \sqrt{0} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ .

**Variations** La fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est croissante. On peut calculer sa dérivée et on obtient  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Elle est positive, mais elle n'est pas définie en  $x = 0$ . En effet,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$ , donc la tangente au graphe de la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  au point  $x = 0$  est verticale.

**Tableau de variation**

$x$	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	+	0
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$+\infty$

FIGURE C.7: *Graphe de la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$ .***Graphe****C.3.6 Etude des fonctions  $f(x) = \sin(x)$  et  $f(x) = \cos(x)$** 

Nous allons étudier la fonction  $f(x) = \sin(x)$ , la fonction  $\cos(x)$  peut s'obtenir à partir de la fonction  $\cos(x)$  à l'aide de la relation  $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ . On trouvera des rappels de trigonométrie dans l'annexe A.

**Symétrie** La fonction  $\sin(x)$  est périodique de période  $2\pi$ . On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur  $2\pi$ , par exemple  $x \in ]-\pi, \pi]$ . De plus,  $\sin(x)$  est impaire,  $\sin(-x) = -\sin(x)$ . Il suffit donc d'étudier la fonction sur l'intervalle  $x \in [0, \pi]$ . La fonction  $\sin(x)$  est aussi symétrique par rapport  $x = \frac{\pi}{2}$ . En effet,  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ . Donc finalement, il suffira donc d'étudier la fonction sur l'intervalle  $x \in [0, \pi/2]$

**Domaine de définition** la fonction  $\sin(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Points particuliers** On connaît les valeurs remarquables de  $\sin(x)$  :  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\pi/6) = 1/2$ ,  $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ,  $\sin(\pi/2) = \sqrt{3}/2$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ .



**Variations** Sur l'intervalle  $x \in [0, \pi/2]$ , la fonction  $f(x) = \sin(x)$  est croissante. En effet, sa dérivée  $f'(x) = \cos(x)$  est positive quand  $x \in [0, \pi/2]$ . On remarque que  $f'(0) = \cos(0) = 1$ , donc la pente de la tangente au graphe de la fonction  $f(x) = \sin(x)$  en  $x = 0$  est égale à 1, c'est à dire que la tangente en ce point est la première bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ ). D'autre part  $f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ . Ce qui était attendu, puisque  $x = \pi/2$  est le maximum de la fonction  $\sin(x)$ . on en déduit son tableau de variation.

**Tableau de variation**

$x$	0		$\pi/2$
$f'(x) = \cos(x)$	1	+	0
$f(x) = \sin(x)$	0	1	

**Graphe**

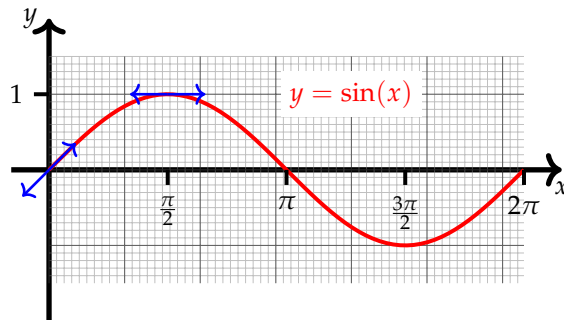


FIGURE C.8: Graphe de la fonction  $f(x) = \sin(x)$ .

**Remarques**

1. Nous avons étudié la fonction  $\sin(x)$  sur l'intervalle  $[0, \pi/2]$  mais nous avons tracer le graphe sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . En effet, nous avons déduit le graphe sur l'intervalle  $[\pi/2, \pi]$  en effectuant le symétrique par rapport à l'axe vertical passant par  $x = \pi/2$ , puisque  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ . Comme la fonction est impaire on aurait pu tracer le graphe sur l'intervalle  $x \in [-\pi, \pi]$ . Mais comme la fonction est périodique de période  $2\pi$ , la portion du graphe correspondant à  $x \in [-\pi, 0]$  est identique à celle correspondant à  $x \in [\pi, 2\pi]$ .
2. Le graphe de la fonction  $\cos(x)$  peut s'obtenir à partir de la relation  $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x) = -\sin(x - \pi/2)$ . On obtient donc le

graphe de la fonction  $\cos(x)$  à partir de celui de la fonction  $\sin(x)$  en effectuant une translation de  $\pi/2$  de la courbe  $y = \sin(x)$  parallèlement à l'axe  $Ox$  puis en effectuant la symétrie par rapport à l'axe  $Oy$ . On obtient le graphe suivant :

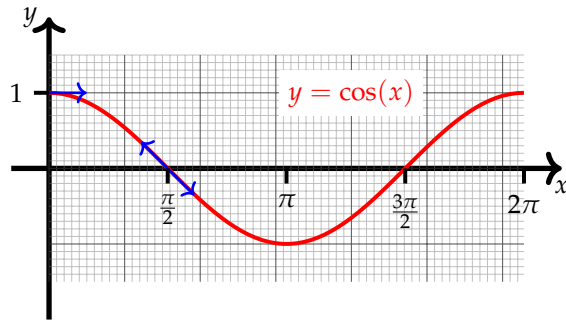


FIGURE C.9: Graphe de la fonction  $f(x) = \cos(x)$ .

### C.3.7 Etude de la fonction $f(x) = \exp(x)$

**Symétrie** Pas de symétrie particulière. La fonction  $f(x) = \exp(x)$  aussi notée  $f(x) = e^x$  est strictement positive :  $e^x > 0$ .

**Domaine de définition** La fonction  $f(x) = \exp(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Points particuliers**  $f(0) = \exp(0) = 1$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ .

**Comportement à l'infini** La fonction  $e^x$  croît à l'infini plus rapidement que toute fonction puissance  $x^n$ . C'est dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

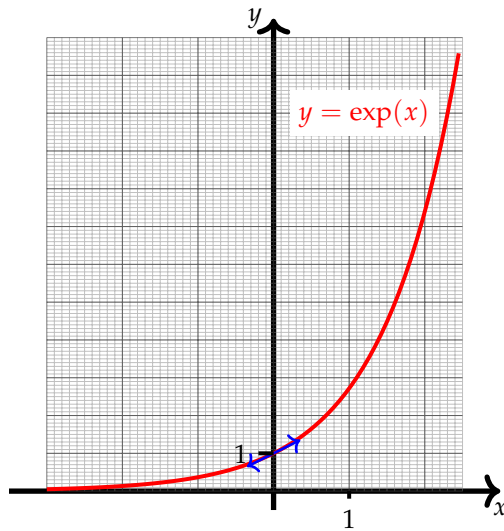
ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

**Variations** La fonction  $\exp(x)$  est croissante. En effet, sa dérivée est égale à elle-même :  $f'(x) = f(x) = \exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . On remarque que  $f'(0) = e^0 = 1$  et donc la tangente au graphe de la fonction  $e^x$  au point  $x = 0$  est parallèle à la droite  $y = x$ .

**Tableau de variation**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x) = e^x$	$0$	$+$	$+\infty$
$f(x) = e^x$	$0$	$1$	$+\infty$

**Graphe**

 FIGURE C.10: Graphe de la fonction  $f(x) = \exp(x)$ .

**C.3.8 Etude de la fonction  $f(x) = \ln(x)$** 

La fonction  $f(x) = \ln(x)$  appelée logarithme népérien, ou logarithme à base  $e$ , (parfois notée  $\log(x)$ ) peut être définie comme la fonction réciproque de la fonction  $\exp(x)$ . C'est à dire que  $\ln(\exp(x)) = x$ .

$$x \longrightarrow y = \ln(x)$$

$$x = \exp(y) \longleftarrow y$$

**Symétrie** Pas de symétrie particulière.

**Domaine de définition** La fonction  $\ln(x)$  n'est définie que pour  $x \in ]0, +\infty[$ . En effet, étant définie comme la fonction réciproque de  $\exp(x)$ , son ensemble de définition est l'image de la fonction  $\exp(x)$  qui est  $\mathbb{R}^+ / \{0\}$ .

**Points particuliers** Comme  $\exp(0) = 1$ , on en déduit que  $\ln(1) = 0$ . On a aussi aux limites de l'ensemble de définition :  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .

**Comportement à l'infini** La fonction  $\ln(x)$  croît à l'infini plus lentement que toute puissance  $x^n$  de  $x$ . C'est dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

**Comportement en zéro** La fonction  $\ln(x)$  tend vers  $-\infty$ , lorsque  $x$  tend vers zéro. Mais cette limite est atteinte assez lentement, en effet on a la propriété suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0.$$

**Variations** La fonction  $f(x) = \ln(x)$  est croissante. En effet sa dérivée  $f'(x) = \frac{1}{x}$  est positive sur l'ensemble de définition de  $f : x \in ]0, +\infty[$ . On remarque que  $f'(1) = 1$  et donc la tangente au graphe de  $\ln(x)$ , au point  $x = 1$  est parallèle à la droite  $y = x$ .

#### Tableau de variation

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+	0
$f(x) = \ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

#### Graphe

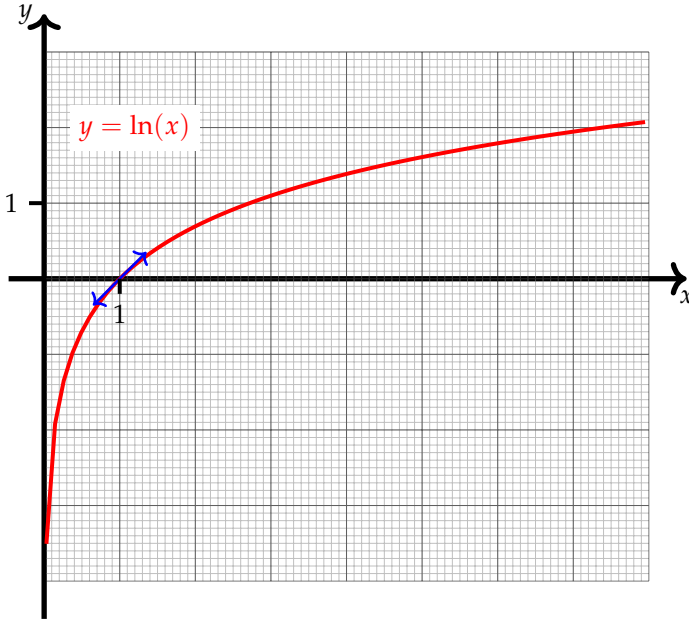
**Remarques** Le graphe de la fonction  $f(x) = \ln(x)$ , s'obtient en prenant le symétrique du graphe de la fonction  $\exp(x)$ , par rapport à la droite  $y = x$ . Il en est ainsi pour le graphe de toute fonction et de sa réciproque. Voyez vous pourquoi ? On aurait pu ainsi déduire le graphe de la fonction  $\sqrt{x}$  à partir du graphe de la fonction  $x^2$  (pour  $x \geq 0$ ).

### C.4 Primitives d'une fonction

La primitive d'une fonction est "l'anti-dérivée" de la fonction. On précise cette notion dans la définition suivante.

#### C.4.1 Définition

On peut énoncer la définition de la primitive  $F(x)$  d'une fonction  $f(x)$  de plusieurs façon :


 FIGURE C.11: Graphe de la fonction  $f(x) = \ln(x)$ .

- $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  si la dérivée de  $F(x)$  est égale à  $f(x)$ .
- $f(x)$  est la dérivée de  $F(x) \Leftrightarrow F(x)$  est une primitive de  $f(x)$
- $F(x)$  est une primitive de  $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Si  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ , alors la fonction  $G(x) = F(x) + C$  est aussi une primitive de  $f(x)$ . En effet,  $G'(x) = F'(x) = f(x)$ , puisque le dérivée d'une constante est nulle. On en déduit qu'une fonction  $f(x)$  a une infinité de primitives, ou encore que les primitives de  $f(x)$  sont définies à une constante près.

L'ensemble de toutes les primitives de  $f(x)$  seront notées de la façon suivante :

$$\text{primitives de } f(x) = \int^x f(u)du = F(x) + C \quad (\text{C.4})$$

Comme une primitive de  $f(x)$  n'est définie qu'à une constante près, on s'intéressera souvent à la variation  $F(b) - F(a)$  d'une primitive de  $f(x)$  entre deux points  $x = a$  et  $x = b$ . Pour une fonction  $f(x)$  donnée, cette variation est unique ; autrement dit, toutes les primitives de  $f(x)$  donneront la même variation. En effet, si  $G(x) = F(x) + C$  alors  $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ . Cette variation sera notée de la façon suivante

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(u)du. \quad (\text{C.5})$$

Dans les Eqs.(C.4) et (C.5), la variable  $u$  est muette, c'est à dire que

$$\int^x f(u)du = \int^x f(y)dy = F(x) + C$$

**Primitive :**

$f(x)$  est la dérivée de  $F(x) \Leftrightarrow F(x)$  est une primitive de  $f(x)$ .

On notera l'ensemble des primitives de  $f(x)$  :

$$\int^x f(u)du = F(x) + C$$

**Variation de la primitive :**

Soit  $F(x)$  une primitive de  $f(x)$ , on notera

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(u)du.$$

Par contre la variable  $x$  sur le signe  $\int^x$  est importante, c'est celle qui apparait dans l'argument de  $F(x)$ . Ces notions seront approfondies au chapitre ?? qui traite de l'intégration.

#### C.4.2 Propriétés

— **Linéarité :**

$$\int^x [f(u) + g(u)] du = \int^x f(u) du + \int^x g(u) du = F(x) + G(x) + C \quad (\text{C.6})$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

— **Multiplication par une constante :** Soit  $K$  une constante et  $f(x)$  une fonction,

$$\int^x [Kf(u)] du = K \int^x f(u) du = KF(x) + C$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

— **Translation** soit  $a$  une constante et  $f(x)$  une fonction :

$$\int^x f(u + a) dx = F(x + a) + C \quad (\text{C.7})$$

— **Dilatation :** Soit  $a$  une constante et  $f(x)$  une fonction :

$$\int^x f(au) du = \frac{1}{a} F(ax) + C \quad (\text{C.8})$$

où  $F(x)$  est une primitive de  $f(x)$  et  $C$  une constante réelle quelconque. En effet, en vertu de la première relation de l'Eq. (C.3) (voir page 97), on peut calculer la dérivée du membre de droite, de la façon suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{a} F(ax) \right] = \frac{1}{a} a \frac{dF}{du} \Big|_{u=ax} = f(ax)$$

#### C.4.3 Exemples

Trouver une primitive  $F(x)$  d'une fonction  $f(x)$  est le processus inverse de la dérivation. On appelle ce processus *intégration* de la fonction  $f(x)$ . C'est un exercice mental qui est moins mécanique que celui de la dérivation et qui demande une peu de pratique. Voici un tableau résumant les primitives des fonction usuelles.

$f(x)$	$F(x) = \int dx f(x)$
$x^n$ pour $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$1/x$	$\ln  x $
$e^x$	$e^x$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln  \cos(x) $
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\ln \cosh(x)$

Vous pouvez vérifier ce tableau en dérivant les fonctions de la colonne de droite et vérifier que vous obtenez bien la fonction de la colonne de gauche.

Avec les deux propriétés de linéarité, de translation et de dilatation énoncées plus haut (voir Eq. (C.7), Eq. (C.6) et Eq. (C.8)), cela permet déjà d'obtenir une grande variété de primitives. Par exemple la primitive de la fonction  $x(t) = a \cos(\omega t + b)$  :

$$\int^t x(u) du = \int^t a \cos(\omega y + b) dy = \frac{a}{\omega} \sin(\omega t + b) + C.$$

Des méthodes qui permettent d'obtenir des primitives de combinaisons plus complexes de ces fonctions élémentaires seront introduites au chapitre ??.





*D*

*Intégration des fonctions*

### D.1 Définition de l'intégrale de Riemann

Soit  $f$  une fonction bornée définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . Riemann a proposé la définition suivante de « l'intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  » :

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon f(a + k\varepsilon) \quad \text{où } \varepsilon = \frac{b-a}{N}. \quad (\text{D.1})$$

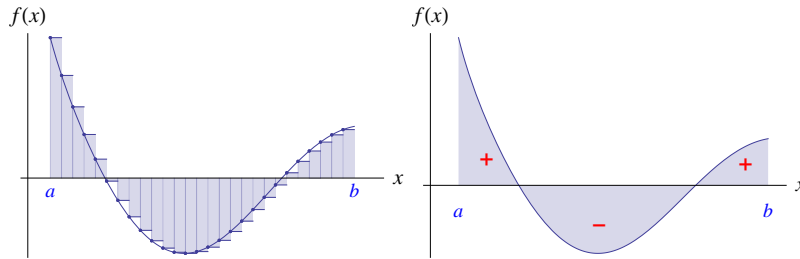


FIGURE D.1: À gauche : représentation graphique de la somme  $\varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\varepsilon)$ . À droite : à la limite  $N \rightarrow \infty$ , la somme devient l'intégrale qui représente donc l'aire algébrique entre la courbe et l'axe.

*Interprétation géométrique :* Le membre de droite de l'équation (D.1) (avant le passage à la limite  $N \rightarrow \infty$ ) représente l'aire algébrique des rectangles (Fig. D.1 à gauche). En considérant la limite  $N \rightarrow \infty$ , on obtient donc l'aire algébrique entre la courbe et l'axe (Fig. D.1 à droite). On dit que l'aire est "algébrique" car elle possède un signe. L'aire est comptée négativement lorsque la courbe est située sous l'axe  $Ox$  ( $f(x) < 0$ ).

*Vocabulaire :* Le symbole  $\int$  rappelle celui de la somme  $\sum$ , cependant, au lieu d'effectuer la somme d'un nombre fini de termes indicés par l'indice discret  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ , la somme est effectuée à l'aide de l'indice variant continûment  $x \in [a, b]$ .

- La fonction sous l'intégrale, ici  $f(x)$ , est appelée « l'intégrande ».
- $a$  et  $b$  sont les « bornes d'intégration ».
- $x$  est la *variable d'intégration*. C'est une « variable muette » (tout comme l'indice  $k$  de la somme), par opposition aux paramètres dont dépend la somme (comme  $a$  et  $b$ ). Son nom n'a pas d'importance :  $\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dt f(t)$ .
- Le symbole  $dx$  est un *accroissement infinitésimal*. Il joue le rôle analogue au  $\varepsilon$  (placé dans la somme pour souligner l'analogie) :  $dx f(x)$  représente l'aire d'un « rectangle » de largeur infinitésimale  $dx$  et de hauteur  $f(x)$ .

*Généralisation de la définition :* La définition (D.1) peut être étendue au cas où les intervalles n'ont pas la même largeur. Considérons une partition de l'intervalle  $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N]$ , où

$x_0 = a$  et  $x_N = b$ , telle que  $\delta x_n \stackrel{\text{def}}{=} x_{n+1} - x_n \rightarrow 0 \forall n$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ .  
On peut définir l'intégrale de Riemann comme

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k f(x_k), \quad (\text{D.2})$$

écriture qui souligne davantage l'analogie entre somme et intégrale.

*Extensions de la définition :* On peut étendre la définition de l'intégrale de Riemann au cas où :

- La fonction n'est pas bornée sur  $[a, b]$ . Par exemple elle diverge sur le bord  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ . Si la divergence n'est pas trop forte, l'intégrale est finie. Pour établir le lien avec la définition (D.1) on écrit

$$\text{si } f(b) = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b dx f(x) = \lim_{x_0 \rightarrow b^-} \underbrace{\int_a^{x_0} dx f(x)}_{\text{déf. (D.1)}} \quad (\text{D.3})$$

- De même on peut considérer un intervalle dont une borne est envoyée à l'infini :

$$\int_a^\infty dx f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x) \quad (\text{D.4})$$

- Lorsque le résultat d'une telle limite est fini, Éq. (D.3) ou Éq. (D.4), on dira que « l'intégrale est convergente », on écrira par exemple  $\int_a^\infty dx f(x) < \infty$ . À l'inverse, si la limite est infinie on dira que « l'intégrale est divergente » et on écrira  $\int_a^\infty dx f(x) = \infty$ .

## D.2 Propriétés :

Énonçons quelques propriétés élémentaires qui découlent de la définition (D.1).

- Inversion des bornes :

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) \quad (\text{D.5})$$

- Relation de Chasles

$$\int_a^c dx f(x) = \int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) \quad (\text{D.6})$$

- Linéarité : soient deux fonctions  $f$  et  $g$  bornées et deux nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\int_a^b dx [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \int_a^b dx f(x) + \mu \int_a^b dx g(x) \quad (\text{D.7})$$

- Analyse dimensionnelle (pour les physiciens)

$$\left[ \int dx f(x) \right] = [x] [f(x)] \quad (\text{D.8})$$

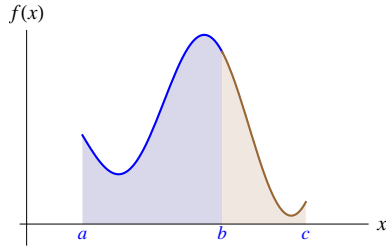


FIGURE D.2: Illustration de la relation de Chasles D.6.

### D.3 Relation avec la dérivation

Définissons la fonction  $F(x)$  suivante :

$$F(x) = \int_a^x dt f(t) \quad (\text{D.9})$$

appelée « une primitive de  $f$  » (notons qu'il faut faire bien attention à donner un nom différent à la variable « muette » d'intégration,  $t$ , et aux autres variables « parlantes », ici  $x$ , afin d'éviter les confusions).

On montre que que la dérivée de  $F(x)$  est la fonction  $f(x)$  :

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{D.10})$$

*Démonstration* Pour démontrer cette relation nous allons calculer le taux d'accroissement de la fonction  $F(x)$ , c'est dire,  $\frac{1}{\varepsilon} [F(x + \varepsilon) - F(x)]$  et montrer que sa limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  donne bien  $f(x)$ .

Calculons  $F(x + \varepsilon) - F(x)$  :

$$\begin{aligned} F(x + \varepsilon) - F(x) &= \int_a^{x+\varepsilon} dt f(t) - \int_a^x dt f(t) \\ &= \int_a^{x+\varepsilon} dt f(t) + \int_x^a dt f(t) \\ &= \int_x^{x+\varepsilon} dt f(t) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \varepsilon f(x); \end{aligned}$$

l'approximation découle de ce que  $f(x)$  est quasiment constante sur l'intervalle  $[x, x + \varepsilon]$  de largeur « petite ». On divise par  $\varepsilon$  :  $[F(x + \varepsilon) - F(x)]/\varepsilon$ . À la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  on retrouve la dérivée :

$$F'(x) = f(x). \quad (\text{D.11})$$

Autrement dit, les opérations de dérivation et d'intégration sont inverses :

$$\boxed{f(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \\ \xleftarrow{\int dx} \end{array} f'(x)} \quad (\text{D.12})$$

On pourra donc écrire :

$$\int_a^b dx F'(x) = F(b) - F(a) \quad (\text{D.13})$$

où  $F'(x)$  est la dérivée de  $F(x)$ .

#### Primitive et dérivée

Une primitive  $F(x)$  de  $f(x)$  est définie par

$$F(x) = \int_a^x dt f(t)$$

on a  $F'(x) = f(x)$ .

Les opérations de dérivation et d'intégration sont inverses

$$f(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \\ \xleftarrow{\int dx} \end{array} f'(x)$$

**Remarque** une primitive n'est pas unique. Soit  $F(x)$  une primitive de  $f(x)$ . Alors  $F_1(x) = F(x) + C$ , où  $C$  est une constante réelle quelconque, est aussi une primitive de  $f(x)$ . En effet,  $F'(x) = F_1'(x) = f(x)$ .

#### D.4 Calcul des intégrales

Dans cette partie, nous passons en revue les méthodes de base qui permettent de calculer des intégrales.

##### D.4.1 Identification d'une primitive

Le paragraphe précédent nous fournit un moyen *pratique* de calculer les intégrales. Si on connaît une primitive  $F$  de  $f$  (i.e. « deviner » une fonction  $F$  telle que  $F' = f$ ), alors

$$\int_a^b dt f(t) = F(b) - F(a). \quad (\text{D.14})$$

En effet, comme une primitive,  $F$  de  $f$  peut s'écrire comme  $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ , où  $c$  est une constante réelle quelconque, on obtient :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt \\ &= \int_c^b f(t)dt + \int_a^c f(t)dt = \int_a^b dt f(t). \end{aligned}$$

La différence  $F(b) - F(a)$  est aussi notée de la façon suivante :

$$F(b) - F(a) = \left[ F(t) \right]_{t=a}^{t=b}.$$

*Exemple :* Considérons  $I = \int_0^\pi dt \sin(t)$ . On se rappelle que la dérivée de la fonction  $\cos(x)$  est  $-\sin(x)$  et donc

$$I = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2.$$

*Quelques primitives de fonctions élémentaires :* Il faut donc garder en tête quelques primitives des fonctions élémentaires.

$f(x)$	$F(x) = \int dx f(x)$
$x^a$ pour $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$1/x$	$\ln x $
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln \cos(x) $
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$	$\ln \cosh(x)$

##### Intégrale et primitive

$$\int_a^b dt f(t) = \left[ F(t) \right]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$$

Où  $F$  est une primitive de  $f$ .

On a toutefois souvent à considérer des intégrales de fonctions plus compliquées. Dans ce cas, on doit essayer différentes techniques (i.e. des « trucs »). Nous en décrivons quelques uns.

#### D.4.2 Intégration par parties

Cette technique découle de la dérivée d'un produit de fonction. Partons de l'expression de la dérivée du produit  $(Fg)' = F'g + Fg'$  et passons un des termes dans l'autre membre :  $F'g = (Fg)' - Fg'$ . L'intégration de cette dernière équation sur  $[a, b]$  nous donne la formule très utile :

$$\boxed{\int_a^b dx f(x) g(x) = \left[ F(x) g(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b dx F(x) g'(x)} \quad (\text{D.15})$$

Cette technique permet donc de calculer l'intégrale d'un produit de fonction,  $f(x)g(x)$ , si on connaît la primitive  $F(x)$  de  $f(x)$  et la primitive du produit  $F(x)g'(x)$ .

*Exemple :*

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x = \left[ -e^{-x} x \right]_0^\infty - \int_0^\infty dx (-e^{-x}) = 1,$$

où on a considéré  $f(x) = e^{-x}$  et  $g(x) = x$ . Et donc,  $F(x) = -e^{-x}$  et  $g'(x) = 1$ .

#### D.4.3 Changement de variable

Cette technique découle de la dérivée des fonctions composées. On rappelle que si  $G(x)$  est la composée d'une fonction  $u(x)$  par une fonction  $F(u)$ , c'est à dire que  $G(x) = F(u(x))$  alors sa dérivée est :  $G'(x) = u'(x)F'(u(x))$ , où  $F'(u(x))$  est la dérivée de la fonction  $F$  calculée en  $u(x)$ , soit  $F'(u(x)) = \left. \frac{dF}{du} \right|_{u(x)}$ . La relation donnée par l'Eq. (D.13) permet d'écrire :

$$\int_a^b dx G'(x) = G(b) - G(a) = F(u(b)) - F(u(a))$$

En notant  $f$  la dérivée de  $F$ , cette dernière relation peut s'écrire :

$$\int_a^b dx u'(x) f(u(x)) = \int_{u(a)}^{u(b)} du f(u) \quad (\text{D.16})$$

Parfois ce que l'on cherche est d'évaluer l'intégrale

$$\int_{u_a}^{u_b} du f(u).$$

On dit qu'on effectue le changement de variable  $u \rightarrow x$ , à l'aide d'une fonction  $u(x)$  ou plus précisément la l'aide de la fonction réciproque

$u^{(-1)}$  (en effet  $u : x \rightarrow u = u(x)$ . alors que  $u^{(-1)} : u \rightarrow x = u^{(-1)}(u)$ ).  
On écrit que  $du = u'(x)dx$  et donc

$$\int_{u_a}^{u_b} du f(u) = \int_a^b dx u'(x) f(u(x)),$$

où  $a = u^{(-1)}(u_a)$  et  $b = u^{(-1)}(u_b)$ .

*Exemple 1 :*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} d\theta \tan \theta &= \int_0^{\pi/4} d\theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \int_0^{\pi/4} \frac{-d(\cos \theta)}{\cos \theta} \\ &= - \int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \left[ \ln |u| \right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

On a effectué le changement de variable  $\theta \rightarrow u = u(\theta) = \cos(\theta)$ .

*Exemple 2 :* Avec de l'usage on peut deviner quel changement de variable est naturel. Par exemple

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Où on a fait le changement de variable  $x \rightarrow \theta$  à l'aide de la fonction réciproque de  $x(\theta) = \sin \theta$ .

#### D.4.4 Dérivation par rapport à un paramètre sous le signe $\int$

Il est parfois utile d'utiliser

$$\int_a^b dx \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_a^b dx f(x, \lambda) \quad (\text{D.17})$$

(l'inversion de la dérivation et de l'intégration est licite dans la plupart des cas, sauf cas pathologique). Ce type de formule permet parfois de simplifier l'intégrande.

*Exemple :*

$$J(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt t^n e^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \int_0^\infty dt e^{-at} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

où  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ .