# L'analyse en double licence: suggestions

10 mars 2020

## Table des matières

Prérequis : un chapitre sur les rudiments de logique (ensembles, fonctions, propositions logiques, ensembles de nombres) et un chapitre sur les nombres complexes, à faire en algèbre.

# 1 S1 : Analyse I

*Volume horaire :* 2h amphi + 3h TD / semaine

*Suggestion de programme :* Reprend le canevas de Math101 actuel, avec la contrainte de passer de 33h à 24h. Les deux derniers chapitres du Math101 actuel sont donc poussés au S2.

## 1.1 CHAP 1 : Fonctions réelles (2 semaines)

### Connaître et savoir appliquer

— La notion de fonction et de graphe de fonction ;
— Les fonctions usuelles et leurs domaines de définitions ;
— Les propriétés élémentaires (et axiomatiques) des fonctions exponentielles, logarithme, et trigonométriques ;
— La définition de composition de fonctions ;
— Les définitions de fonction injective, surjective, bijective, monotone, et de fonction réciproque.

### Savoir faire

— Tracer le graphe des fonctions usuelles ;
— Décomposer une fonction donnée à l'aide d'opérations élémentaires en fonctions usuelles, s'en servir pour justifier son domaine de définition ;
— Savoir résoudre des équations élémentaires à partir de fonctions usuelles pour discuter le caractère injectif/surjectif/bijectif ;
— Lire les propriétés d'injectivité, surjectivité, bijectivité, monotonie d'une fonction à partir de son graphe

### Ouvertures vers

— Notion de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ (courbes paramétrées) et leur représentation graphique

## 1.2 CHAP 2 : Propriétés axiomatiques de $\mathbb{R}$ (1 semaine)

Relation d'ordre, manipulation d'inégalités, borne supérieure

### Connaître et savoir appliquer

— La définition de valeur absolue d'un nombre réel, inégalité triangulaire ;
— La définition de partie majorée (minorée), de plus grand (petit) élément, de borne supérieure (inférieure) ;
— La propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ ;
— Caractérisation de la borne supérieure en quantificateurs ;
— Caractère archimédien de $\mathbb{R}$ ;
— Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ;

**Savoir faire**

- Manipuler des inégalités entre nombres réels (addition, multiplication) ;
- Déterminer la borne supérieure/inférieure d'une partie "explicite" de $\mathbb{R}$, déterminer si elle est atteinte.

### 1.3 CHAP 3 : Suites numériques (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

- La définition de limite d'une suite réelle ou complexe, de suite convergente, divergente ;
- La définition de suite réelle qui tend vers $\pm\infty$ ;
- Le théorème des gendarmes ;
- Le fait qu'une suite croissante et majorée converge ;
- Les opérations sur les limites ;
- La croissance comparée de suites usuelles (polynômes, exponentielles, logarithme, factorielle, $n^n$) ;
- La définition de suite extraite et de valeur d'adhérence ;
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass ;
- La définition des suites de Cauchy et leurs propriétés ;
- Le fait qu'une suite de Cauchy réelle ou complexe converge ;

**Savoir faire**

- Déterminer la limite d'une suite donnée en revenant à la définition, ou à partir d'opérations élémentaires sur des suites usuelles ;
- Montrer qu'une suite n'admet pas de limite ;
- Déterminer les valeurs d'adhérence d'une suite donnée ;

### 1.4 CHAP 4 : Limites (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

- La définition de limite d'une fonction réelle ou complexe en un point et sa caractérisation séquentielle ;
- Les opérations sur les limites ;
- La définition de limite à droite ou à gauche en un point ;
- Les définitions de limites en $\pm\infty$ et de limites infinies ;
- Les croissances comparées pour les fonctions usuelles.

**Savoir faire**

- Déterminer la limite d'une fonction définie à partir de fonctions usuelles, à l'aide des opérations élémentaires sur les limites et des croissances comparées ;
- Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point, à l'aide de la caractérisation séquentielle.

## 1.5 CHAP 5 : Continuité (2 semaines)

### Connaître et savoir appliquer

— La définition de fonction continue en un point et sa caractérisation séquentielle ;
— La définition de prolongement par continuité ;
— La définition de continuité à droite ou à gauche en un point ;
— La définition de fonction continue sur un intervalle ;
— Les opérations sur les fonctions continues ;
— Le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes ;
— Le théorème des valeurs intermédiaires ;
— Le théorème de Heine.

### Savoir faire

— Démontrer qu'une fonction définie à partir de fonctions usuelles est continue (en particulier, justifier son domaine de définition) ;
— Démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point ;
— Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour obtenir l'existence de solutions à certaines équations

### Ouvertures vers

— Le recollement de fonctions continues
— Le théorème du point fixe de Picard

## 1.6 CHAP 6 : Dérivabilité (3 semaines)

### Connaître et savoir appliquer :

— La définition de dérivée en un point et son interprétation géométrique ;
— La dérivabilité à droite et à gauche en un point ;
— Les opérations sur les dérivées ;
— La définition de fonction dérivable/$C^1$ sur un intervalle ;
— Les dérivées des fonctions usuelles ;
— Les dérivées d'ordre supérieur, fonctions $C^n$ ;
— Le lemme de Rolle et le théorème des accroissements finis ;
— Le lien entre monotonie et signe de la dérivée.

### Savoir faire

— Démontrer qu'une fonction définie à partir de fonctions usuelles est dérivable (en particulier, déterminer son domaine de définition), et déterminer sa dérivée à l'aide des règles d'opérations sur les dérivées. En particulier, savoir justifier qu'une fonction est dérivable avant de calculer ses dérivées par opérations élémentaires ;
— Montrer qu'une fonction n'est pas dérivable en un point ;

— Déterminer le tableau de variation d'une fonction à l'aide de l'étude de la dérivée, en déduire l'allure du graphe et ses extrema locaux. S'en servir pour trouver des solutions à certaines équations.

**Ouvertures vers**

— Le prolongement de fonction dérivable/$C^1$, le recollement de fonctions dérivables/$C^1$ ;

— La notion de convexité et son lien avec la dérivée.

# 2 S2 : Analyse II

*Volume horaire :* 2h amphi + 3h TD / semaine

*Suggestion de programme :* Reprend Math104 actuel (volume horaire similaire). Avec le décalage du S1, certains sujets ne sont plus traités (courbes paramétrées, nombres complexes). Les nombres complexes seront traités en algèbre.

## 2.1 CHAP 1 : Fonctions réciproques (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

- La définition d'application réciproque d'une fonction bijective ;
- Le théorème de la bijection pour les applications continues ;
- La dérivation de l'application réciproque ;
- L'application aux fonctions usuelles : fonctions puissance, logarithme/exponentielle, fonctions trigonométriques.

**Savoir faire**

- Déterminer si une fonction est bijective à l'aide de l'étude de sa dérivée ;
- Tracer le graphe de la récipriouque à partir du graphe de la fonction.

## 2.2 CHAP 2 : Calcul intégral (3 semaines)

Se contenter du cas des fonctions continues (par morceaux) sur un segment.

**Connaître et savoir appliquer**

- La définition de primitive, et les primitives des fonctions usuelles ;
- La définition de l'intégrale de Riemann des fonctions continues sur un segment, le théorème des sommes de Riemann ;
- Les propriétés élémentaires de l'intégrale ;
- Le théorème fondamental de l'analyse ;
- La formule d'intégration par parties ;
- Le théorème de changement de variables.

**Savoir faire**

- Calculer une intégrale à l'aide des primitives ;
- Déterminer une primitive d'une fonction définie à l'aide fonctions usuelles à partir de la formule d'intégration par parties ou de changements de variables. En particulier, savoir justifier que la fonction est continue sur un segment avant de calculer son intégrale par ces règles ;
- Utiliser le théorème des sommes de Riemann pour calculer la limite de certaines suites.

**Ouvertures vers**

— L'intégrale des fonctions continues par morceaux ;
— L'intégrale des fonctions réglées ;
— La notion de fonction Riemann-intégrable et exemples de fonctions non Riemann-intégrables ;
— La notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle ouvert/semi-ouvert ;
— Les primitives des fractions rationnelles avec la décomposition en éléments simples ;
— Les primitives des polynômes/fractions rationnelles trigonométriques.

## 2.3 CHAP 3 : Formules de Taylor et développements limités (3 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— La formule de Taylor avec reste intégral à un ordre quelconque ;
— L'inégalité de Taylor-Lagrange et la formule de Taylor-Young ;
— La notion de développement limité ;
— Les développements limités "standards" ;
— Les opérations sur les développements limités ;
— L'application au calcul de limites, à l'étude locale des graphes, à l'étude des extrema locaux d'une fonction.

**Savoir faire**

— Calculer un développement limité de fonctions définies à partir de fonctions usuelles à l'aide de développements limités connus, de la formule de Taylor-Young, et des opérations élémentaires sur les développements limités ;
— Lever une forme indéterminée à l'aide des développements limités ;
— Déterminer la position relative de la tangente au graphe d'une fonction à l'aide des développements limités.

## 2.4 CHAP 4 : Equations différentielles (2 semaines)

Cas scalaire, ordre 1 et 2.

**Connaître et savoir appliquer**

— La notion de résolution d'une équation différentielle (scalaire) ;
— La notion de problème de Cauchy.

**Savoir faire**

— Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 sans second membre ;
— Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 avec second membre, à l'aide de la méthode de la variation de la constante ;
— Résoudre une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre.

# 3 S3 : Analyse III

*Volume horaire :* 2h amphi + 2h TD / semaine (+ oraux)

*Suggestion de programme :* Reprend Math201 actuel (volume horaire similaire). Les intégrales impropres ne sont plus traitées.

## 3.1 CHAP 1 : Séries numériques (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— La définition de série convergente et de somme de série convergente ;
— La définition de série absolument convergente ;
— La convergence des séries à termes positifs : critères de comparaison, de comparaison séries/intégrales, de d'Alembert et de Cauchy ;
— La définition de série alternée ;
— Le critère d'Abel.

**Savoir faire**

— Connaître la nature de séries usuelles (série géométrique, série de Riemann, série téléscopique, série de Bertrand) ;
— Déterminer la nature d'une série à termes positifs ;
— Se ramener aux séries à termes positifs pour montrer qu'une série est absolument convergente ;
— Savoir montrer qu'une série ne converge pas.

## 3.2 CHAP 2 : Suites et séries de fonctions (3 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— La définition de convergence simple d'une suite de fonctions ;
— La définition de convergence uniforme d'une suite de fonctions ;
— La définition de convergence normale d'une série de fonctions ;
— Le théorème de continuité de la limite ;
— Les théorèmes d'échange de la limite avec dérivée/intégrale ;
— Le théorème de Weierstrass.

**Savoir faire**

— Déterminer la norme uniforme d'une fonction pour montrer qu'une suite converge uniformément ou qu'une série converge normalement ;
— Montrer qu'une suite de fonctions converge ponctuellement, uniformément, ou les deux ;
— Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

**Ouvertures vers**

— L'étude des séries trigonométriques, le développement d'une fonction en série de Fourier
— Le lien entre convergence normale d'une série de fonctions et la complétude des espaces vectoriels normés

## 3.3 CHAP 3 : Séries entières (3 semaines)

### Connaître et savoir appliquer

- La définition de rayon de convergence d'une série entière ;
- Les estimations du rayon de convergence d'une série entière à l'aide du lemme d'Abel, du critère de d'Alembert, du critère de Cauchy ;
- Les propriétés de la somme d'une série entière sur son intervalle de convergence ;
- La définition de développement en série entière d'une fonction en un point ;
- Les opérations sur les séries entières ;
- La définition de l'exponentielle en tant que somme d'une série entière.

### Savoir faire

- Déterminer le rayon de convergence d'une série entière ;
- Montrer qu'une fonction $C^\infty$ est développable en série entière autour d'un point en estimant ses dérivées.

### Ouvertures vers

- Le comportement au bord de l'intervalle de convergence ;
- Séries entières d'une variable complexe, fonctions holomorphes.

## 3.4 CHAP 4 : Intégrales à paramètres (2 semaine)

pour faire le parallèle avec les séries de fonctions, ne traiter le cas que des fonctions continues sur un carré. C'est aussi un premier contact avec les fonctions de plusieurs variables, qui seront traitées au S4.

### Connaître et savoir appliquer

- La continuité et la continuité uniforme des fonctions continues de deux variables sur un carré ;
- Opérations sur les fonctions continues de deux variables sur un carré ;
- La continuité des intégrales à paramètres des continues de deux variables sur un carré ;
- La notion de dérivée partielle de fonction de deux variables ;
- La dérivabilité des intégrales à paramètres des continues de deux variables sur un carré.

### Savoir faire

- Savoir montrer qu'une fonction de deux variables définie à partir de fonctions usuelles à une variable est continue/dérivable par rapport à une des variables ;
- Etudier une intégrale à paramètre (continuité, dérivabilité).

### Ouvertures vers

- Le cas des intégrales impropres ;
- La transformée de Fourier.

### 3.5 CHAP 5 : Intégration des fonctions de plusieurs variables (2 semaines)

*Ce chapitre devrait idéalement être au semestre suivant, mais il est relégué ici afin de placer les espaces vectoriels normés après la topologie de* $\mathbb{R}^d$

Admettre l'existence de l'intégrale sur des ouverts bornés (pour des fonctions continues jusqu'au bord). Énoncer Fubini ("intégrer par tranches") + changement de variables (linéaire, polaire, sphérique, cylindrique), qui seront vus plus généralement au S5. Ce chapitre a pour objectif principal la pratique du calcul d'intégrales multiples.

#### Connaître et savoir appliquer

— La définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un pavé (compact) ;

— Le théorème de changement de variables pour les intégrales multiples ;

— Le théorème de Fubini.

#### Savoir faire

— Savoir dessiner des sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ définis par des équations ou inéquations ;

— Intégrer une fonction de plusieurs variables "par tranches" à l'aide du théorème de Fubini ;

— Appliquer des changements de variables linéaires, polaire (2d), sphérique et cylindrique (3d).

# 4 S4 : Analyse IV

*Volume horaire :* 2h amphi + 2h TD / semaine (+ oraux)

*Suggestion de programme :* Reprend le cours de Math205 actuel (volume horaire similaire), en rajoutant une partie sur les espaces vectoriels normés et les équations différentielles linéaires en dimension supérieure, et en rognant sur la partie calcul diff qui sera traitée plus en profondeur au S5.

## 4.1 CHAP 1 : Topologie de $\mathbb{R}^d$ (3 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^d$ (normes 1, 2, $\infty$) ;

— La définition d'une norme sur $\mathbb{R}^d$, les normes d'applications linéaires et normes matricielles ;

— L'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^d$ ;

— La définition de boule ouverte, fermée, de sous-ensembles ouverts, fermés, bornés et de voisinages dans $\mathbb{R}^d$ ;

— La définition de suite convergente dans $\mathbb{R}^d$ ;

— La caractérisation séquentielle des fermés ;

— Le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^d$ ;

— La définition de sous-ensemble compact dans $\mathbb{R}^d$ ;

— La définition de suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$ ;

— La complétude de $\mathbb{R}^d$.

**Savoir faire**

— Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ est/n'est pas ouvert/fermé/compact ;

— Déterminer ou estimer une norme matricielle.

**Ouvertures vers**

— La preuve de l'équivalence des normes en dimension finie ;

— La notion de distance.

## 4.2 CHAP 2 : Limites et continuité de fonctions de plusieurs variables (2 semaines)

Possibilité de se limiter aux fonctions à valeurs réelles.

**Connaître et savoir appliquer**

— La définition de limite d'une fonction de plusieurs variables ;

— La définition de continuité d'une fonction de plusieurs variables ;

— Le fait que l'image continue d'un compact est compact, et en particulier qu'une fonction continue sur un compact et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

**Savoir faire**

— Montrer qu'une fonction de plusieurs variables définie à partir des fonctions usuelles à une variable est continue en un point (et justifier son domaine de définition) ;

— Montrer qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en un point, en approchant ce point selon certains chemins bien choisis.

## 4.3 CHAP 3 : Dérivation des fonctions de plusieurs variables (3 semaines)

Possibilité de se limiter aux fonctions à valeurs réelles. La notion de différentielle sera vue en S5.

**Connaître et savoir appliquer**

— La définition de dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables ;

— La définition de fonction de classe $C^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ en termes de dérivées partielles ;

— Les opérations sur les dérivées partielles, en particulier la dérivée partielle d'une composition (formule de la chaîne) ;

— Les dérivées partielles d'ordre supérieur et les fonctions de classe $C^n$ ;

— La formule de Taylor (au moins à l'ordre 2) et son interprétation géométrique ;

— Application à l'étude des extrema locaux d'une fonction de deux variables à valeurs réelles.

**Savoir faire**

— Montrer qu'une fonction de plusieurs variables définie à partir des fonctions usuelles à une variable admet des dérivées partielles/est $C^1$, et calculer ses dérivées partielles. En particulier, n'utiliser les opérations élémentaires sur les dérivées qu'une fois que la dérivabilité a été démontrée.

**Ouvertures vers**

— La notion de différentielle.

## 4.4 CHAP 4 : Espaces vectoriels normés (2 semaines)

*Ce chapitre est placé ici pour étendre certaines notions de topologie de $\mathbb{R}^d$, démontrer le théorème de point fixe utilisé en S5 pour l'inversion locale et en S6 pour Cauchy-Lipschitz, et pour construire l'exponentielle de matrice au chapitre suivant*

**Connaître et savoir appliquer**

— Les espaces vectoriels normés classiques ($\mathbb{R}^d$, espaces de matrices, espaces de fonctions continues, $C^k$) ;

— La notion d'espace de Banach, dans lesquels toute série absolument convergente est convergente. Faire le lien avec la convergence normale du S3 ;

— Le théorème du point fixe de Banach-Picard ;

— La notion d'application linéaire continue sur un espace vectoriel normé.

**Savoir faire**

— Montrer qu'un espace vectoriel normé de fonctions est complet, à partir de la complétude de $\mathbb{R}$ par exemple.

**Ouvertures vers**

— Les espaces de Hilbert.

### 4.5 CHAP 5 : Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— L'interprétation matricielle des systèmes d'équations différentielles linéaires ;

— La résolution à l'aide de l'exponentielle matricielle ;

— La méthode de la variation de la constante.

**Savoir faire**

— Résoudre un système linéaire (y compris avec second membre) dans le cas diagonalisable ;

— Calculer une exponentielle matricielle en dimension 2 ;

— Dresser un portrait de phase pour un système linéaire en dimension 2.

# 5 S5 : Intégration

*Volume horaire :* 2h amphi + 2h TD / semaine (+ oraux)

*Suggestion de programme :* Reprend le cours de Math310 actuel (qui passe de 18h à 24h), en enlevant les séries de Fourier et en rajoutant les espaces $L^p$ et la transformée de Fourier (pour un premier contact avec ces notions, sans forcément aborder tous les détails).

## 5.1 CHAP 1 : Rappels et intégrale de Riemann (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

- Définition de la borne supérieure, limites, convergence simple, convergence uniforme (rappels S2 et S3).
- Dénombrabilité.
- Propriétés de base de l'intégrale de Riemann : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles (rappels S2).
- Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues sur un segment (rappels S3).

**Savoir faire**

- Calculs d'intégrales de Riemann de fonctions continues sur un compact : intégration par partie, changement de variables (rappels S2)
- Savoir montrer que certains ensembles simples sont dénombrables
- Savoir trouver la limite simple d'une suite de fonctions (par exemple pour des suites d'indicatrices d'intervalles simples) (rappel S3)

**Ouvertures vers**

- Limitations de l'intégrale de Riemann.

## 5.2 CHAP 2 : L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (3 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

- Règles de calcul dans $[0, \infty]$ ;
- Propriétés des intégrales des fonctions positives : normalisation, croissance, linéarité positive, théorème de convergence monotone (l'existence d'une intégrale vérifiant ces propriétés est admise (et sera expliquée dans le dernier chapitre)) ;
- Séries de fonctions positives ;
- Intégrale sur une partie de $\mathbb{R}$ ;
- Passage à la limite dans les bornes de l'intégrale pour une fonction positive ;
- Lemme de Fatou ;
- Fonctions intégrables à valeurs réelles, propriétés : linéarité, croissance, inégalité triangulaire ;
- Fonctions intégrables à valeurs complexes, propriétés : linéarité, inégalité triangulaire ;
- Espace $\mathcal{L}^1$ ;
- Effet des translations, homothéties, symétrie ;
- Lien avec l'intégrale de Riemann ;
- Intégrabilité des fonctions usuelles.

**Savoir faire**

- Reconnaitre une situation d'application du théorème de convergence monotone (et appliquer le théorème) ;
- Étudier l'intégrabilité d'une fonction définie à partir de fonctions usuelles.

## 5.3 CHAP 3 : Les théorèmes de Lebesgue (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

- Parties négligeables, propriétés vraies presque partout ;
- Théorème de convergence dominée ;
- Intégrales à paramètres : continuité, dérivabilité.

**Savoir faire**

- Déterminer des dominations élémentaires pour appliquer le théorème de convergence dominée.

## 5.4 CHAP 4 : Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (1 semaine)

Faire le parallèle avec le Chap 5 du S3.

**Connaître et savoir appliquer**

- Principe de construction (même stratégie que pour $\mathbb{R}$) ;
- Théorème de Fubini ;
- Théorème de changement de variable, lien avec le changement de variable dans $\mathbb{R}$.

**Savoir faire**

- Montrer qu'une fonction de plusieurs variables définie à partir de fonctions usuelles est intégrable ;
- Appliquer le théorème de Fubini sans indication ;
- Appliquer le théorème de changement de variable si le difféomorphisme est donné.

## 5.5 CHAP 5 : Espaces $L^p$ (1 semaine)

**Connaître et savoir appliquer**

- Définition de $L^1$, $L^p$, normes associées. Produit scalaire $L^2$ ;
- Complétude.

**Savoir faire**

- Montrer qu'une fonction définie à partir de fonctions usuelles est dans $L^p$.

**Ouvertures vers**

- Inégalité de Hölder, dualité.

## 5.6 CHAP 6 : Convolution et transformée de Fourier (2 semaine)

### Connaître et savoir appliquer

- La définition de la transformée de Fourier des fonctions intégrables ;
- Le lemme de Riemann-Lebesgue ;
- Le lien avec la dérivation ;
- Convolution $L^1 - L^1$ ;
- Convolution et dérivation ;
- Approximations de l'unité ;
- Transformée de Fourier de la convolution.

### Ouvertures vers

- La transformation de Fourier des fonctions $L^2$ ;
- Convolution $L^p - L^q$, inégalité de Young.

## 5.7 CHAP 7 : Construction de l'intégrale de Lebesgue (1 semaine)

### Ouvertures vers

- Mesures ;
- Fonctions mesurables, intégrale des fonctions étagées ;
- Intégrale des fonctions positives.

# 6 S5 : Calcul différentiel et optimisation

*Volume horaire :* 2h amphi + 3h TD / semaine

*Suggestion de programme :* Reprend le cours de Math309 actuel (qui passe de 18h à 24h)

## 6.1 CHAP 1 : Différentiabilité de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (3 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— Définition des dérivées partielles (rappels) ;

— Applications linéaires (rappels) ;

— Applications différentiables ;

— Gradient, hyperplan tangent ;

— Fonctions des classe $C^1$ ;

— Fonctions de classe $C^k$, théorème de Schwarz ;

— Formules de Taylor.

**Savoir faire**

— Montrer qu'une fonction est différentiable ;

— Calculer des dérivées partielles (rappels), calculer des différentielles (sans passer par les dérivées partielles).

## 6.2 CHAP 2 : Différentiabilité de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— Dérivées partielles, différentielle, matrice jacobienne ;

— Différentiation des fonctions composées ;

— Accroissements finis.

**Savoir faire**

— Montrer qu'une fonction est différentiable ;

— Calculer des dérivées partielles, des différentielles et des matrices jacobiennes.

## 6.3 CHAP 3 : Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— Difféomorphismes ;

— Théorème d'inversion locale ;

— Théorème des fonctions implicites.

## 6.4 CHAP 4 : Extrema des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (3 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— Étude locale au voisinage des points critiques ;

— Fonctions convexes ;

— Existence de minimum pour les fonctions convexes ;

— Théorème des multiplicateurs de Lagrange.

## 6.5 CHAP 5 : Courbes et surfaces (2 semaines)

**Connaître et savoir appliquer**

— La notion de courbes et surfaces par paramétrisation ou ensemble de niveau ;

— La notion d'espace tangent ;

— Le lien avec les multiplicateurs de Lagrange.

**Savoir faire**

— Représenter graphiquement une courbe ou une surface paramétrée.

**Ouverture vers**

— La notion de sous-variété de $\mathbb{R}^d$.

## 7 Ce qui n'est pas traité

— Les suites récurrentes d'ordre un ;

— Les intégrales généralisées/impropres ;
qui ne seront donc traitées que en S5, sous la théorie générale de l'intégration. A mentionner au S1 les cas de $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$ et de $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ qui ne tombent pas sous le coup de la théorie ?

— La topologie des espaces métriques (cf cours L3Mag) ;

— Les séries de Fourier.

## 8 Objectifs, remarques générales

— Limiter certaines redondances du programme précédent, notamment en S4 et S5 (certains étudiants avaient l'impression de "refaire la même chose") ;

— Dissiper la confusion au sujet de l'intégrale entre Riemann/Lebesgue, par exemple si plusieurs versions du théorème de convergence dominée sont vues entre L2 et L3. En L1 : construction de l'intégrale des fonctions continues (voire par morceaux) sur des segments, faire le lien avec la dérivation, voir la formule de changement de variables, le calcul de primitives, et l'intégration par parties. Ne pas parler de fonctions réglées ni de fonctions Riemann-intégrables. Ne pas parler d'intégrales impropres. Mentionner les limitations de l'intégrale ainsi construite (on voudrait pouvoir intégrer plus de fonctions, sur des domaines plus généraux). Reléguer au S5 la construction d'une intégrale plus générale (Lebesgue), qui coïncide avec la notion vue en L1 pour les fonctions continues sur des segments, et qui inclut naturellement d'autres fonctions et d'autres domaines ;

— Avoir un lien clair entre les différents cours des différentes années. Savoir non seulement les pré-requis d'un cours par rapport à ce qui a été fait auparavant, mais aussi savoir ce qui sera fait ensuite pour savoir "où s'arrêter", ce qu'on peut ne pas dire, et motiver aux étudiants ce qui sera fait plus tard. De manière concrète, un cours doit pouvoir faire référence explicite à ce qui a été fait avant et à ce qui sera fait après.

# L'algèbre en double licence: suggestions

22 mai 2020

## Table des matières

# 1 S1 : Éléments d'algèbre 1

*Volume horaire :* 24h cours/ 36h TD (2h amphi + 3h TD / semaine)

*Suggestion de programme :* Nouveau cours

## 1.1 Contenu :

1. **Raisonnement, logique, quantificateurs.** Il s'agit de se familiariser (en particulier avec des exemples simples, certains tirés de la vie courante) avec : les notions "et", "ou" (qu'on reverra juste après quand on parlera d'intersection et de réunion pour les ensembles), la négation d'une proposition, ce qu'est une implication (avec notamment sa négation et la remarque que "$P$ implique $Q$" est la même chose que "non $P$ ou $Q$") et une équivalence, la contrapposée.
2. **Preuves.** Premiers exemples de raisonnement par l'absurde et de démonstration d'une implication ou d'une équivalence. Exemples de rédactions détaillées de démonstrations simples (le carré d'un nombre impair est impair, la somme de deux nombres divisibles par $d$ est divisible par $d$). Raisonnement par récurrence (somme des $n$ premiers entiers, du carré des $n$ premier eentiers, preuve d'inégalités simples par récurrence).
3. **Initiation à la théorie des ensembles.** Opérations sur les ensembles, cardinal (liens avec les proba) ; applications injectives, surjectives, bijectives ; ensemble des parties d'un ensemble, combinatoire, principe des tiroirs. Premiers exemples d'ensembles infinis.
4. **Relations sur un ensemble.** Relation d'équivalence, relation d'ordre, relation d'ordre total (avec de nombreux exemples). Ensemble quotient, partitions (pour embrayer ensuite sur le cas particulier de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
5. **Arithmétique.** Définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme ensemble quotient (on verra un peu plus tard ses propriétés). Divisibilité, congruences. Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers, ppcm, pgcd. Division euclidienne.
6. **Nombres complexes.** Somme, produit, quotient, conjugué, module et argument. Forme algébrique et forme géométrique, rappel des formules d'addition en trigonométrie et utilisation du cercle trigonométrique (on fera beaucoup de calculs là-dessus).
7. **Initiation aux polynômes en une variable.** Définition, calculs, racines, factorisations explicites, factorisation par $(X - a)$, nombre de racines plus petit que le degré. Théorème de d'Alembert-Gauss (sans preuve).
8. **Un peu de géométrie du plan et de l'espace.** (si le temps le permet). Équations de droites et de plan, de cercles et sphères, exemples de transformations affines du plan et de l'espace.

# 2 S2 : Algèbre linéaire 1

*Volume horaire :* 24h cours/ 36h TD (2h amphi + 3h TD / semaine) *Suggestion de programme : proposition de refonte du cours Math 103*

## 2.1 Contenu :

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Base canonique. Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Mise en équation cartésienne de droites et de plans. Vecteur normal à une droite et

à un plan dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Déterminant d'une famille de deux vecteurs. Formes paramétriques d'une droite et d'un plan.

2. La méthode du pivot. Systèmes linéaires : méthode du pivot et rang d'un système. Forme échelonnée réduite et forme paramétrique des solutions d'un système linéaire.
3. Applications linéaires et calcul matriciel.
   (a) Applications linéaires et matrices dans les bases canoniques. Exemples géométriques dans $\mathbb{R}^2$.
   (b) Produit de matrices et composition d'applications linéaires.
4. Théorie de la dimension. Application aux systèmes linéaires.
   (a) Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, bases et coordonnées, notion d'indépendance linéaire, dimension.
   (b) Retour sur l'équation $AX = Y$ : noyau, image et théorème du rang.
5. Complètements sur les applications linéaires.
   (a) Espaces supplémentaires. Projections et symétries. Endomorphismes tels que $(f - aI) \circ (f - bI) = 0$, avec $a$ et $b$ réels distincts.
   (b) Formules de changement de bases (pour vecteurs et endomorphismes). Application aux endomorphismes considérés en 4a.
   (c) Diagonalisation en dimension 2. Cas à valeurs propres réelles.
6. Exemples et applications (en fonction du temps disponible). Suites récurrentes linéaires (Fibonacci), systèmes dynamiques linéaires de $\mathbb{R}^2$. Allure des orbites. Puissances de matrices et évolution d'un système par probabilités de transition (chaines de Markov).

### 2.2 Remarques :

La partie 1. pourra ne pas être traitée en cours et faire l ?objet d ?un polycopié. Ici le déterminant de (u,v) est conçu comme le produit scalaire de u avec un vecteur normal à v, ce qui donne la condition de colinéarité. Le lien avec l'aire d'un parallélogramme pourra être vue en exercice.

2. Une place pourra être, en fonction du temps, consacrée au comptage d'opérations.

3. On veillera à voir en TD des exercices mettant en œuvre le calcul matriciel en dimension quelconque : trace, produit et inverse de matrices triangulaires.

5b On pourra introduire ici la notion de matrices équivalentes et la caractérisation d'une matrice de rang $r$ à l'aide comme équivalente à matrice diagonale ayant des $p$ coefficients égaux à 1 sur la diagonale, les autres étant nuls.

## 3 S3 : Éléments d'algèbre 2 : arithmétique et groupes

*Volume horaire :* 24h cours/ 24h TD (2h amphi + 2h TD / semaine)

*Suggestion de programme : reprend quelques éléments du cours actuel de S4 Math 204. Il passe au S3 pour permettre d'étudier les polynômes, la divisibilité et les racines avant le cours d'algèbre linéaire 2 (en particulier, la réduction des endomorphismes) et les permutations (pour définir le déterminant plus facilement en S4)*

### 3.1 Contenu :

1. Rappel sur les relations d'équivalence, classes d'équivalences. Congruences
2. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ : division euclidienne, relation de divisibilité et congruences, diviseurs communs, pgcd, algorithme d'Euclide étendu, théorème de Bézout, théorème de Gauss, théorème des restes chinois, nombres premiers, lemme d'Euclide, existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers.
3. Groupes
   (a) définitions, sous-groupes, groupes abéliens, tables de multiplications d ?un groupe
   (b) étude de quelques exemples de groupe
      i. groupes des permutations,
      ii. groupes des isométries d'un triangle, groupe diédral,
      iii. groupes de matrices (retour sur les matrices et lien avec le cours d'algèbre linéaire du S2).
   (c) Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ ;
   (d) morphismes de groupes, image et image réciproque d'un sous-groupe,
   (e) ordre d'un élément, sous-groupe engendré par un élément, groupes cycliques, Théorème de Lagrange.
4. Quelques propriétés du groupe de permutations : groupe des permutations, transpositions, décomposition d'une permutation en produit de transpositions, signature, cycles, décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints.
5. Anneau.
   (a) Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.
   (b) Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre. Idéaux de $\mathbb{Z}$.
   (c) L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ : éléments inversibles, diviseurs de zéro, cas où n est premier.
   (d) L'anneau des polynômes à une indéterminée $K[X]$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$) : divisibilité, éléments inversibles, éléments irréductibles, éléments irréductibles de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, idéaux de $K[X]$, division euclidienne des polynômes, algorithme d'Euclide étendu, pgcd de deux polynômes, relation de Bézout, Lemme de Gauss. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles. Degré, racines, théorème de D'Alembert-Gauss (admis) : relations entre racines et coefficients.
6. Corps des fractions rationnelles : décomposition en éléments simples.
7. Ouverture possible : Actions de groupes. Morphisme d'un groupe vers le groupe des permutations (taille des orbites)

## 4 S4 : Algèbre linéaire 2

*Volume horaire :* 24h cours/ 24h TD (2h amphi + 2h TD / semaine)
*Suggestion de programme : reprend le programme de Math 202*

Ce module est la suite d'Algèbre linéaire 1 et Éléments d'algèbre 2. Il est consacré à la réduction des endomorphismes dans le cadre d'un espace vectoriel de dimension finie et dans un espace euclidien. Il contient des compléments sur les systèmes linéaires (déterminant, exemples de factorisation de matrices) et de nouveaux exemples de groupes.

### 4.1 Contenu :

1. Espaces euclidiens. Produit scalaire et norme euclidienne. Supplémentaire orthogonal. Base orthonormale, projection orthogonale et procédé de Gram-Schmidt. Théorème de la projection (distance d'un vecteur à un sous espace vectoriel). Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée. Endomorphismes orthogonaux et notion de groupe orthogonal.
2. Déterminant.
3. Somme directe d'un nombre quelconque de sous espaces vectoriels. Valeurs, vecteurs, espaces propres. Diagonalisation des endomorphismes. Critère sur la dimension des espaces propres.
4. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphisme et matrices symétriques. Théorème de diagonalisation dans une base orthonormée.
5. En fonction du temps : matrices de Householder et algorithme de décomposition QR (orthogonale/triangulaire supérieure) et comparaison avec LU. Application aux systèmes linéaires. Générateurs du groupe orthogonal.

### 4.2 Commentaires :

1) La partie 1. permet de revoir un certain nombre de notions de première année (base, matrice d'un endomorphisme dans une base quelconque) sans que cette révision fasse l ?objet de séances spécifiques qui font partir le semestre sur un faux rythme. Les notions de projection et symétrie orthogonale peuvent être développées en TD, ce sont des exemples d ?endomorphismes diagonalisables. Je pense que cette partie doit inclure une étude géométrique matrice orthogonales de taille 3.

2) Le but est de calculer le polynôme caractéristiques dans des cas particuliers. La signature d ?une permutation aura été vue au S3. Enfin, il n'est peut être pas nécessaire d'imposer une construction par récurrence du déterminant comme dans le programme antérieur, il vaut mieux laisser à l'enseignant le choix de son approche ( l'approche multilinéaire est plus pertinente ici car leaspect bilinéaire est vu en début de semestre). Dans le but : être plus progressif sur les systèmes linéaires, c'est à dire revenir dessus après le L1, on peut voir en TD la décomposition LU, avec comptage d'opérations et évoquer les formules de Cramer. On peut également introduire GLn(Z), pour garder contact avec le S3.

3) Les polynômes d'endomorphismes sont exclus de ce programme. On pourra voir en TD des exemples de matrices ayant un polynôme annulateur permettant d'en calculer les valeurs propres ou même montrer que si une matrice admet un polynôme annulateur à racines simples, elle est diagonalisable, sans utiliser le lemme des noyaux. Ça permet d'ouvrir sur les sous groupes finis de GL(n, C) et d'appliquer le théorème de Lagrange. Ou calculer des puissances de matrices en utilisant la division euclidienne des polynômes, ce qui permet de reprendre des éléments des S1 et S3. Enfin, l'exemple de la diagonalisation des matrices 2,2 semble relever du S2, dont il devrait être l'aboutissement.

4) C'est très rapide.

5) Il y avait une partie algorithmique dans l'ancien programme qui était une méthode de résolution approchée d'un système linéaire (la méthode précise n'était pas nommée). Autant voir une méthode directe d'abord, celle-ci a le mérite de revoir la notion de générateurs d ?un groupe et de compléter ainsi le S3.

### 4.3 Durée :

1) 4 séances 2) 2 séances 3) 3 séances 4) 1 séance 5) 1 séance.

## 5 S5 : Algèbre 1- L3 Mag

1. Arithmétique sur $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et groupes abéliens
2. Groupes, actions de groupes et théorèmes de Sylow
3. Groupe symétrique, déterminants
4. Théorèmes de structure des groupes abéliens de type fini

## 6 S6 : Algèbre 2 - L3 Mag

1. Anneaux de polynômes
2. Polynôme minimal, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton
3. Réduction de Frobenius, décomposition de Dunford, réduction de Jordan
4. Dualité pour les espaces vectoriels
5. Formes bilinéaires et sesquilinéaires
6. Réduction des endomorphismes symétriques et hermitiens