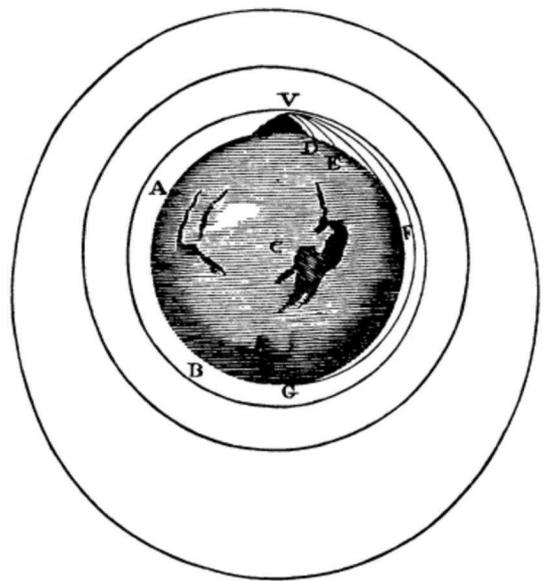
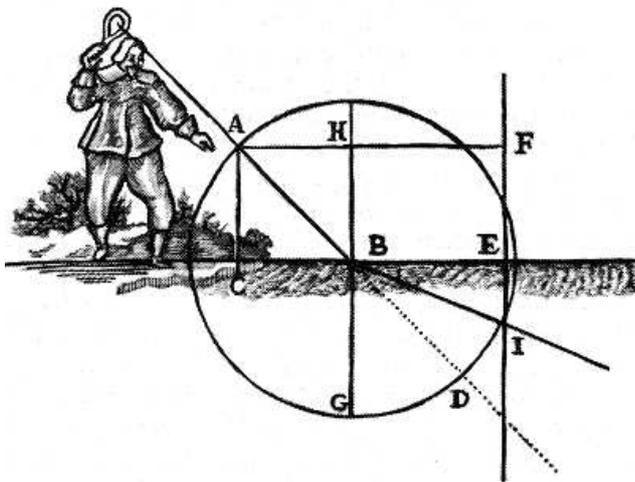


L1 DOUBLE LICENCE MATHS-PHYSIQUE



# Outils et Méthodes pour la Physique

Patrice Hello et Samuel Wallon



version du 20/12/2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Dimensions et unités</b>	<b>1</b>
1.1	Grandeurs physiques . . . . .	1
1.2	Grandeurs de base . . . . .	1
1.3	Systèmes d'unités . . . . .	2
1.4	Vérifier l'homogénéité . . . . .	3
1.5	Equation aux dimensions . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Equations différentielles et lois d'évolution en physique</b>	<b>6</b>
2.1	Equations différentielles en physique . . . . .	6
2.1.1	Introduction et notations . . . . .	6
2.1.2	Equations différentielles en mécanique . . . . .	6
2.1.3	Equations différentielles en électrocinétique . . . . .	7
2.1.4	... et ailleurs . . . . .	7
2.2	Définitions et théorèmes utiles . . . . .	7
2.2.1	Définition . . . . .	7
2.2.2	Equation différentielle linéaire (EDL) . . . . .	8
2.2.3	EDL homogène ou non homogène et interprétation physique . . . . .	8
2.2.4	Base de solutions pour une EDL homogène (EDLH) du n-ième ordre . . . . .	9
2.3	Equations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	10
2.3.1	Equation homogène : séparation des variables . . . . .	10
2.3.2	Equation complète : cas général . . . . .	11
2.3.3	Equation complète : cas où $a$ et $b$ sont des constantes . . . . .	12
2.4	Equations différentielles linéaires du second ordre . . . . .	12
2.4.1	Généralités . . . . .	12
2.4.2	EDLH du second ordre à coefficients constants . . . . .	14
2.4.3	EDL du second ordre à coefficients constants et avec second membre . . . . .	16
2.5	Réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale . . . . .	18
2.5.1	Système linéaire, définition et exemples . . . . .	18
2.5.2	EDL avec second membre sinusoïdal . . . . .	19
2.5.3	Notion de fonction de transfert . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Rappels et compléments de géométrie</b>	<b>20</b>
3.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	20
3.1.1	Définition . . . . .	20
3.1.2	Composantes d'un vecteur . . . . .	20
3.1.3	Repère direct . . . . .	21
3.2	Norme et distance . . . . .	22

3.3	Produit scalaire . . . . .	23
3.4	Produit vectoriel . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Calcul différentiel pour les fonctions d'une variable</b>	<b>29</b>
4.1	Rappels sur les développements limités . . . . .	29
4.2	Différentielle des fonctions à une variable . . . . .	31
4.3	Intégration . . . . .	32
4.3.1	Sommes de Riemann . . . . .	32
4.3.2	Intégration par partie . . . . .	34
4.3.3	Intégrales impropres . . . . .	34
4.3.4	Différentielle et changement de variables . . . . .	36
4.4	Dérivées de fonctions composées . . . . .	36
4.5	Dérivation vectorielle . . . . .	37
4.5.1	Généralités . . . . .	37
4.5.2	Propriétés . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Calcul différentiel pour les fonctions à plusieurs variables</b>	<b>41</b>
5.1	Fonctions de plusieurs variables, champs . . . . .	41
5.1.1	Dérivées partielles . . . . .	42
5.1.2	Différentielle d'une fonction scalaire à plusieurs variables	43
5.1.3	Théorème de Schwarz . . . . .	44
5.1.4	Cas des fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles	45
5.1.5	Gradient d'une fonction scalaire . . . . .	46
5.1.6	Différentielle du vecteur position, vitesse, accélération . .	48
5.2	Calcul intégral . . . . .	48
5.2.1	Longueur d'une courbe . . . . .	48
5.2.2	Intégrales multiples . . . . .	50
5.2.3	Aire d'une surface . . . . .	55
5.2.4	Volume . . . . .	57
5.3	Coordonnées polaires . . . . .	58
5.3.1	Définition . . . . .	58
5.3.2	Base locale . . . . .	59
5.3.3	Différentielle du vecteur position, vitesse, accélération . .	61
5.3.4	Élément de surface élémentaire . . . . .	61
5.4	Coordonnées cylindriques . . . . .	62
5.4.1	Définition . . . . .	63
5.4.2	Base locale . . . . .	63
5.4.3	Vitesse, accélération . . . . .	63
5.4.4	Éléments de surface élémentaires et élément de volume .	64
5.5	Coordonnées sphériques . . . . .	65
5.5.1	Définition . . . . .	66

5.5.2	Base locale . . . . .	66
5.5.3	Éléments de surface élémentaires et élément de volume .	68
<b>6</b>	<b>Circulation, flux et théorèmes fondamentaux</b>	<b>69</b>
6.1	Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe . . . . .	69
6.2	Flux d'un champ vectoriel à travers une surface . . . . .	70
6.3	Extensions du théorème fondamental du calcul intégral . . . . .	71
6.4	Champ à circulation conservative . . . . .	75
6.4.1	Le point de vue intégral . . . . .	75
6.4.2	Le point de vue local : champ dérivant d'un potentiel . .	77
6.4.3	Forme différentielle et différentielle : lemme de Poincaré et intégration des formes différentielles . . . . .	78
6.5	Champ à flux conservatif . . . . .	84
6.5.1	Le point de vue intégral . . . . .	85
6.5.2	Le point de vue local . . . . .	86

# 1 Dimensions et unités

## 1.1 Grandeurs physiques

Une grandeur physique est une grandeur mesurable par un appareil dédié (longueur avec un double-décimètre, masse avec une balance, intensité du courant avec un ampèremètre etc...). A quelques exceptions près ces grandeurs sont dimensionnées. En général une grandeur physique possède une dimension si le résultat de sa mesure dépend de l'étalon choisi. En effet mesurer une certaine grandeur physique consiste à la comparer à un certain étalon. Par exemple vous pouvez mesurer une longueur à l'aide de votre pouce ou de de votre pied. Vous pourrez ainsi dire que l'objet à mesurer mesure 2 pieds ou 24 pouces selon votre choix. Ce qui est remarquable est que les résultats des mesures à l'aide de deux étalons différents seront toujours proportionnels et avec une proportion constante (un facteur 12 entre les mesures relatives soit aux pieds soit aux pouces par exemple). Il existe quelques rares quantités mesurables qui sont sans dimension (ou adimensionnées). La plus évidente à notre niveau est la notion d'angle (un angle est défini comme le rapport entre deux longueurs donc bien sans dimension). On verra plus tard la notion d'angle solide, sorte de généralisation à 3 dimensions de l'angle dans le plan. On peut citer aussi, pour être un peu plus à la pointe de la recherche, l'amplitude d'une onde gravitationnelle, sans dimension mais "mesurable" par LIGO et Virgo par exemple.

## 1.2 Grandeurs de base

Il y a exactement 7 grandeurs fondamentales, à partir desquelles on peut reconstruire toute grandeur physique. Ces grandeurs sont regroupées dans la table ci-dessous.

grandeur	symbole
longueur	L
masse	M
temps	T
intensité électrique	I
température	$\theta$
quantité de matière	N
intensité lumineuse	J

Grandeurs physiques de base et leurs dimensions

La dimension d'une quantité physique  $A$  sera notée  $[A]$ . La dimension de  $A$  va toujours pouvoir s'écrire en fonction des 7 dimensions de base :

$$[A] = L^a M^b T^c I^d \theta^e N^f J^g \quad (1)$$

Par exemple la vitesse  $v = dx/dt$  d'un objet se déplaçant sur l'axe Ox a pour dimension :

$$[v] = L.T^{-1},$$

et son énergie cinétique  $E = 1/2mv^2$  a pour dimension :

$$[E] = M.L^2.T^{-2}.$$

Exercice :

Le potentiel électrostatique créé à la distance  $r$  d'une charge ponctuelle  $q$  s'écrit :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Quelle est la dimension de la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  ?

### 1.3 Systèmes d'unités

A chaque grandeur physique dimensionnée on peut attribuer une unité associée à l'étalon de mesure utilisé. Par exemple on peut mesurer une longueur en pouces, pieds, mètres ... selon l'étalon considéré. Attention : il ne faut pas confondre dimension et unité. La dimension d'une grandeur physique a un caractère absolu alors que son unité est arbitraire et repose sur le choix (ou le préjugé) de l'opérateur qui effectue et reporte la mesure. On vient d'ailleurs de voir sur un exemple que les unités de longueur sont multiples ! Le système d'unité que nous adoptons par convention est le "Système International" (S.I.). Il n'est pas unique et certaines communautés de physiciens peuvent adopter d'autres systèmes (par exemple le système CGS en astrophysique). Dans ces histoires de convention et de choix arbitraires, l'essentiel est que tout le monde puisse se comprendre et surtout comprendre les conventions prises par ses interlocuteurs. On se souvient de la sonde martienne qui a été perdue parce que les ingénieurs de la NASA n'utilisaient pas tous les mêmes systèmes d'unité ; un yard n'est pas un mètre ! Les unités du S.I. sont rappelées dans la table ci-dessous.

grandeur	symbole	Unité S.I.
longueur	L	mètre (m)
masse	M	kilogramme (kg)
temps	T	seconde (s)
intensité électrique	I	Ampère (A)
température	$\theta$	Kelvin (K)
quantité de matière	N	mole (mol)
intensité lumineuse	J	candela (cd)

## Grandeurs physiques de base, dimensions et unités S.I.

Il est évidemment impératif de préciser l'unité lorsque vous écrivez le résultat d'une mesure (en TP) ou d'un calcul numérique (en TD ou en exam). Par exemple, "la période d'oscillation du pendule est  $T = 10$  s". Si vous écrivez "je trouve  $T = 10$ " vous aurez 0 à une question d'examen ! En effet c'est "10" quoi ? secondes ? heures ? jours ? patates ?

De même, le symbole "=" dans une application numérique peut-être discuté. En effet l'égalité absolue " $x = 1$ " a du sens en maths mais en physique ? En fait toute mesure est imparfaite, entachée d'erreurs (statistiques et systématiques) et on ne peut pas écrire en principe "j'ai mesuré la longueur  $x = 1$  cm". La valeur numérique est toujours approchée. On devra plutôt écrire " $x = 1 \pm 0,1$  cm" si on a pu évaluer l'erreur de mesure (ici  $\Delta x = 0,1$  cm) ou " $x \simeq 1$  cm". Cette dernière écriture indique bien le caractère approché de la valeur numérique d'une quantité physique.

Une règle générale pour adopter telle ou telle unité est qu'une application numérique doit toujours être la plus simple possible et donner un résultat numérique proche de 1 avec l'unité adaptée. Ainsi il vaut mieux utiliser le parsec (pc) ou l'année-lumière (al) (et leurs multiples) en astronomie ou le nanomètre (nm) en physique atomique pour des mesures de longueur ou distance. Ainsi le rayon de l'univers visible est de 13,8 Gal, le rayon d'un atome d'Hydrogène est de l'ordre de l'Angstrom ( $0,53 \text{ \AA}$ ), la distance Terre-Soleil est d'une Unité Astronomique (!) etc...

### 1.4 Vérifier l'homogénéité

Toute relation entre quantités physique doit être "homogène" c'est à dire que les membres à droite et à gauche du signe "=" dans une équation doivent avoir la même dimension. On ne mélange pas les torchons et les serviettes ! En bref,

$$A = B \Leftrightarrow [A] = [B].$$

Quand vous établissez un résultat en physique il est essentiel de vérifier que l'équation obtenue est bien homogène. Si elle ne l'est le résultat est tout simplement faux et il faut reprendre le calcul pour trouver l'erreur.

Exemple 1 :

A l'aide du PFD, on vient d'établir que la période des petites oscillations

d'un pendule simple (masse  $m$  suspendue à un fil de longueur  $l$  est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

$g$  étant l'accélération de la pesanteur. Je suis intrigué car je ne vois pas de  $m$  dans l'expression obtenue. Vérifions donc l'homogénéité de cette équation (et au passage on pourra discuter du principe d'équivalence!).

Exemple 2 :

On considère un circuit RC série (résistance  $R$  et capacité  $C$  en série) alimenté par un générateur de tension constante  $E$ . A  $t = 0$ , on ferme le circuit, la capacité étant initialement déchargée. On trouve que la tension aux bornes de la capacité est :

$$U(t) = E[1 - \exp(-t/RC)].$$

Cette expression suggère, si elle est correcte, que le produit  $RC$  est homogène à un temps. Vérifions-le!

Exemple 3 :

En TD de mécanique, après intégration du PFD, je trouve que la position d'une masse ponctuelle  $m$  soumise uniquement à son poids est :

$$x(t) = 1/2mgt^2 + v_0t + x_0.$$

Le chargé de TD me dit que c'est faux. Puis-je le vérifier rapidement ?

Exemple 4 (discussion) :

Expliquer pourquoi des relations du type  $x(t) = x_0 \cos(t)$  ou  $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r)$  n'ont pas de sens en physique.

Remarque : l'homogénéité concerne aussi la structure des différents membres d'une équation : un vecteur ne peut pas être égal à un scalaire par exemple!

Ainsi,  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  n'est pas homogène!

## 1.5 Equation aux dimensions

Dans les cas où les grandeurs de base peuvent être factorisées, on peut trouver des expressions approchées de grandeurs combinées en raisonnant uniquement

sur les dimensions en se basant sur l'équation (1). Reprenons l'exemple de la période  $T_0$  du pendule simple. Les paramètres physiques intervenant dans le problème sont la masse  $m$ , la longueur  $l$  du pendule et l'accélération de la pesanteur  $g$ .  $T_0$  est a priori fonction de ces 3 paramètres. On suppose que ces paramètres (ou plutôt leurs puissances) se factorisent. Alors  $T_0$  peut s'écrire comme :

$$T_0 = \text{constante} \times m^a g^b l^c.$$

Les exposants  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont donc à déterminer. L'équation aux dimensions correspondante est :

$$T = M^a \times (L.T^{-2})^b \times L^c$$

soit

$$T = M^a L^{b+c} T^{-2b}.$$

On en déduit les relations :  $a = 0$ ,  $b + c = 0$  et  $-2b = 1$ , soit  $a = 0$ ,  $b = -1/2$  et  $c = 1/2$ . On trouve ainsi

$$T_0 = \text{constante} \times g^{-1/2} l^{1/2} = \text{constante} \times \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Evidemment pour déterminer complètement  $T_0$ , i.e. pour identifier la constante, il faut revenir aux équations du mouvement.

## 2 Equations différentielles et lois d'évolution en physique

### 2.1 Equations différentielles en physique

#### 2.1.1 Introduction et notations

La physique pour au moins ce qu'on en voit lors des premières années du supérieur est la "science des équations différentielles". Il est donc essentiel d'être à l'aise (et efficace) lors de mises en équation et résolutions "d'équadiffs".

Soit une fonction  $f(x)$ , en maths on note sa dérivée  $f'(x)$ , sa dérivée seconde  $f''(x)$ , sa dérivée n-ième  $f^{(n)}(x)$ . Il est sous entendu dans ces notations que l'on dérive *par rapport à la variable  $x$* . En physique, l'usage est différent et on spécifie explicitement par rapport à quelle variable on dérive. Ce qu'on note  $f'(x)$  en maths, on le notera généralement  $\frac{df}{dx}$  en physique ; de même la dérivée n-ième s'écrira  $\frac{d^n f}{dx^n}$ . Cette notation "différentielle" a plusieurs avantages que l'on rencontrera au fil du temps.

Quelques exemples :

Ainsi si  $x(t)$  est la position d'un point matériel au cours du temps,  $v(t) = \frac{dx}{dt}$  est sa vitesse et  $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$  (dérivée seconde) est son accélération.

De même, si  $q(t)$  est la charge électrique circulant dans un circuit fermé,  $i(t) = \frac{dq}{dt}$  est l'intensité du courant.

Enfin une force conservative  $F(x)$  dérive d'une énergie potentielle  $U(x)$  si  $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ . Nous reviendrons en détail sur ce point dans la section 6.4.

Remarque : la dérivée temporelle est souvent notée par un "point". On verra souvent (principalement en mécanique) :  $\dot{x} = dx/dt$  et  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  par exemple.

#### 2.1.2 Equations différentielles en mécanique

En méca, la base c'est le PFD :  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Attention le PFD donne en fait en général un système de 3 équations différentielles, obtenues en projetant la relation vectorielle sur 3 axes orthogonaux, par exemple définissant un système d'axes cartésiens (O,x,y,z).

En intégrant (2 fois) on aboutit en principe à la loi horaire du mouvement, c'est à dire à la donnée du vecteur position au cours du temps  $\vec{r}(t)$ . Au passage,  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ .

### 2.1.3 Equations différentielles en électrocinétique

Loi des mailles et loi des noeuds fourniront des équations similaires aux équations du mouvement de la mécanique. On verra par exemple le circuit RLC série et la loi des mailles nous donnera :

$$E = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri$$

soit, avec  $i(t) = \frac{dq}{dt}$  :

$$E = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

On note sur cette dernière qu'il y a un "second membre", la tension (éventuellement dépendante du temps) délivrée par un générateur.

### 2.1.4 ... et ailleurs

La physique, on l'a déjà souligné, peut être assimilée à la science des équations différentielles ! Il y en a dans tous les domaines de la physique !

En électromagnétisme :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

est l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

décrit le comportement de la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  associée à une particule de masse  $m$  plongée dans le potentiel  $V(x)$ .

On remarque la nouvelle notation "dérivée partielle" (par ex.  $\frac{\partial}{\partial x}$ ) pour dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une de ces variables. Les 2 équations ci-dessus sont des "équations aux dérivées partielles". On y reviendra dans la section D.

## 2.2 Définitions et théorèmes utiles

### 2.2.1 Définition

Une équation différentielle c'est une équation mettant en jeu une fonction et certaines de ses dérivées. Si  $f(x)$  est une fonction de la variable  $x$ , la forme

générale d'une équation différentielle d'ordre  $n$ , i.e. faisant apparaître la dérivée  $n$ -ième  $f^{(n)}$  de  $f$  et pas les dérivées suivantes, est :

$$F(f, f', \dots, f^{(n)}, x) = 0$$

L'inconnue à déterminer dans cette équation est bien entendu la fonction  $f$  elle-même.

Souvent la variable pertinente sera le temps  $t$ , la fonction inconnue  $f(t)$  et l'équation différentielle d'ordre  $n$  s'écrira donc plutôt  $F(f, f', \dots, f^{(n)}, t) = 0$  (PFD par exemple).

### 2.2.2 Equation différentielle linéaire (EDL)

Une EDL d'ordre  $n$  s'écrit en toute généralité, pour une fonction  $f(t)$  :

$$\sum_{i=1}^n a_i(t) f^{(i)}(t) = g(t) \quad (2)$$

où les  $a_i(t)$  sont des fonctions pouvant dépendre de  $t$ . La fonction  $g(t)$  qui n'a rien à voir a priori avec  $f(t)$  est placée, par convention, de l'autre côté du signe  $=$  (ici à droite) et est appelée "second membre" de l'équation différentielle. En général, on aura besoin de  $n$  conditions initiales pour trouver explicitement la solution de l'EDL d'ordre  $n$ .

### 2.2.3 EDL homogène ou non homogène et interprétation physique

Dans l'équation 2, si  $g(t) = 0$  l'équation est dite homogène, si  $g(t) \neq 0$ , on dit que l'équation a un second membre.

Par exemple, l'EDL du 1er ordre (décroissance radioactive)

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$

est une EDL homogène.

Au contraire, l'EDL du 2nd ordre (oscillateur harmonique entretenu)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = a \cos(\omega t)$$

possède un second membre non nul et n'est donc pas une EDL homogène.

Une conséquence de la linéarité (et c'est un théorème important) est que la solution d'une EDL avec second membre est superposition de la solution

générale de l'équation homogène correspondante (i.e. l'équation SANS le second membre) et d'une solution particulière de l'équation complète. Attention : il faut appliquer les conditions initiales à la solution complète !

Il existe en fait une interprétation physique simple des deux parties de la solution complète. La solution générale de l'équation homogène correspond au *régime transitoire* et la solution particulière de l'équation complète correspond au *régime permanent*. On verra plein d'exemples à court terme !

Règle simple : si le second membre est constant (et si  $a_1 \neq 0$  est aussi constant) alors on cherche une solution particulière constante.

Exercice : Vérifions le théorème pour une EDL du 1er ordre, que l'on peut écrire sous la forme  $\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t)$ ,  $b(t)$  étant le second membre.

#### 2.2.4 Base de solutions pour une EDL homogène (EDLH) du n-ième ordre

Une autres conséquence de la linéarité est que si  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  sont deux solutions d'une EDLH alors toute combinaison linéaire  $\lambda S_1(t) + \mu S_2(t)$  est aussi solution. C'est le fameux principe (ou théorème) de superposition qu'on retrouvera partout en physique tant que les équations sont linéaires.

Encore plus fort (ou plus précis c'est selon) : si on considère une EDLH du n-ième ordre, il existe  $n$  solutions indépendantes et toute solution générale est combinaison linéaire de ces  $n$  solutions. En terme d'algèbre (cf S2), l'espace vectoriel des solutions est de dimension  $n$  et ces  $n$  solutions indépendantes en forment une base.

Ainsi pour une EDLH du premier ordre, la solution est unique, à une constante multiplicative près.

Exemple EDLH ordre 2 : oscillateur harmonique idéal

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Il y a deux solutions indépendantes  $\cos \omega_0 t$  et  $\sin \omega_0 t$  et la solution générale s'écrit donc  $x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ .

*Remarque* : une base n'est pas unique et on peut choisir une base ou une autre selon notre humeur ou selon le côté pratique. Par exemple  $\exp(i\omega_0 t)$  et

$\exp(-i\omega_0 t)$  plutôt que  $\cos \omega_0 t$  et  $\sin \omega_0 t$  dans l'exemple précédent, et on aura alors  $x(t) = A \exp(i\omega_0 t) + B \exp(-i\omega_0 t)$ , avec  $A$  et  $B$  a priori complexes (de façon à retrouver in fine  $x(t)$  réelle).

## 2.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Soit à résoudre

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + b(t) \quad (3)$$

où  $a$  et  $b$  sont a priori fonctions de  $t$ . Le cas où  $a$  et  $b$  sont constantes, très utile en pratique, sera traité à part.

La solution est superposition de la solution générale de l'équation homogène (on la notera  $x_1$ ) et d'une solution particulière de l'équation complète (on la notera  $x_2$ ) :  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ .

### 2.3.1 Equation homogène : séparation des variables

L'équation homogène associée à l'équation 3 s'écrit (en prenant  $b = 0$ ) :

$$\frac{dx_1}{dt} = a(t)x_1(t)$$

Les variables  $x_1$  et  $t$  sont séparables (cela veut dire qu'on peut mettre tout ce qui concerne  $x_1$  d'un côté et tout ce qui concerne  $t$  de l'autre) et on peut écrire :

$$\frac{dx_1}{x_1} = a(t)dt.$$

On voit au passage l'intérêt de l'écriture différentielle pour les dérivés. Les deux membres à gauche et à droite s'intègrent formellement (il faut connaître une primitive de  $a(t)$ ).

$$\ln(x_1) - \ln(c) = \int_0^t a(t')dt'$$

où on a posé  $c$  est une constante qu'il faudra calculer grâce aux conditions aux limites une fois la solution complète établie.

La solution de l'EDLH peut se réécrire finalement comme

$$x_1(t) = c \exp\left(\int_0^t a(t')dt'\right). \quad (4)$$

A cette solution il faut rajouter une solution particulière correspondant au second membre  $b(t)$ .

### 2.3.2 Equation complète : cas général

Dans le cas général une façon de trouver une solution particulière est d'appliquer la *méthode de la variation de la constante*. Cette méthode consiste à partir de la solution de l'équation homogène (4) et poser que la "constante"  $c$  dépend de  $t$  ! On a donc

$$x(t) = c(t) \exp\left(\int_0^t a(t') dt'\right),$$

et on veut que cette fonction soit solution de l'équation 3. On dérive ainsi cette expression :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dc}{dt} \exp\left(\int_0^t a(t') dt'\right) + c(t)a(t) \exp\left(\int_0^t a(t') dt'\right)$$

En injectant dans (3) on obtient

$$\frac{dc}{dt} \exp\left(\int_0^t a(t') dt'\right) = b(t),$$

soit

$$\frac{dc}{dt} = b(t) \exp\left(-\int_0^t a(t') dt'\right) = \frac{b(t)}{F(t)}$$

où on a posé

$$F(t) = \exp\left(\int_0^t a(t') dt'\right).$$

L'intégration directe donne

$$c(t) - c_0 = \int_0^t \frac{b(t')}{F(t')} dt'.$$

La solution finale est donc  $x(t) = c(t)F(t)$  soit encore

$$x(t) = \left[ c_0 + \int_0^t \frac{b(t')}{F(t')} dt' \right] F(t).$$

A l'instant  $t = 0$  on note que  $x(t = 0) = c_0$ , les intégrales étant nulles. Finalement la donnée de la condition initiale  $x(t) = 0$  permet de déterminer complètement la solution. Cette solution est de plus bien sous la forme de la superposition de la solution de l'EDLH et d'une solution particulière :  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  avec

$$x_1(t) = c_0 F(t)$$

et

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{b(t')}{F(t')} dt' \times F(t).$$

### 2.3.3 Equation complète : cas où $a$ et $b$ sont des constantes

Dans ce cas l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + b$$

se résoud explicitement. D'abord la solution de l'équation homogène est

$$x_1(t) = c \exp(at)$$

où  $c$  est une constante.

Une solution particulière  $x_2$  est trouvée immédiatement en cherchant  $x_2$  constante. On a alors  $x_2 = -b/a$ .

La solution est  $x(t) = x_1 + x_2 = c \exp(at) - b/a$  et la constante  $c$  est déterminée grâce à la condition initiale (donnée de  $x(t=0) = x_0$ ), c'est-à-dire  $x(t=0) = c - b/a$ , soit  $c = x_0 + b/a$ .

La solution est finalement :

$$x(t) = \frac{b}{a}(\exp(at) - 1) + x_0 \exp(at).$$

Plus cosmétique (en particulier si  $a < 0$ ) :

$$x(t) = -\frac{b}{a}(1 - \exp(at)) + x_0 \exp(at).$$

Exemples d'application :

- décroissance radioactive
- transitoire dans un circuit RC.

## 2.4 Equations différentielles linéaires du second ordre

### 2.4.1 Généralités

Il n'y a pas de méthodes de résolution générale pour des EDL du second ordre avec coefficients quelconques (i.e. dépendant a priori du temps). Quand les coefficients sont constants cependant on verra dans la section suivante qu'on peut déterminer explicitement les solutions. Les EDL du second ordre sont partout en physique et ont donné lieu à maintes recherches en maths au cours du XIXème siècle. On peut citer quelques EDL emblématiques dont les solutions

sont connues ou dont les fonctions solutions ont été nommées du nom de leur “découvreur”.

— Polynômes d’Hermite

Les polynômes d’Hermite  $H_n$  vérifient l’EDLH :

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0.$$

Ils jouent un grand rôle en physique : on les retrouve aussi bien dans la solution de l’équation de Schrödinger pour l’oscillateur harmonique quantique que dans la résolution de l’équation d’Helmoltz en optique pour décrire les modes d’un laser. Dans ces deux cas les solutions sont en fait des polynômes d’Hermite multiplié par une gaussienne. On parle de solutions d’Hermite-Gauss en général ou de modes d’Hermite-Gauss pour les lasers.

— Polynômes de Laguerre :

Les polynômes de Laguerre  $L_n$  vérifient l’EDLH :

$$xL_n'' + (1 - x)L_n' + nL_n = 0.$$

Ils jouent un rôle similaire à celui des polynômes d’Hermite dès lors que l’on privilégie les coordonnées polaires (voir plus loin) au lieu des coordonnées cartésiennes. On trouve ainsi les modes de Laguerre-Gauss pour les modes laser par exemple. Il interviennent également, lorsque l’on utilise les coordonnées sphériques (voir plus loin), dans la détermination de la dépendance radiale des fonctions d’onde de l’atome d’hydrogène en mécanique quantique, qui consiste à résoudre l’équation de Schrödinger pour le système électron - proton en interaction coulombienne

— Polynômes de Legendre :

Les polynômes de Legendre  $L_n$  vérifient l’EDLH :

$$(1 - x^2)G_n'' - 2xG_n' + n(n + 1)G_n = 0.$$

On les trouve par exemple à nouveau dans la résolution de l’équation de Schrödinger pour l’atome d’Hydrogène, cette fois pour décrire la dépendance angulaire des fonctions d’onde. Ils interviennent également dans les problèmes de diffusion en mécanique quantique et en physique des particule à haute

énergie.

— Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel  $J_n$  vérifient l'EDLH :

$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0.$$

Elles apparaissent en optique dans l'étude de la diffraction par une pupille circulaire (i.e. dans la plupart des instruments d'optique, des microscopes jusqu'aux télescopes) ou dans la résolution de l'équation de la chaleur pour un système à symétrie axiale.

— Forme de Sturm-Liouville

La plupart des équations différentielles ci-dessus peuvent se mettre sous la forme dite de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{df_n}{dx} \right] + \alpha_n f_n = 0,$$

où  $p(x)$  est un polynôme et  $\alpha_n$  un scalaire. Sous cette forme le couple  $(f_n, \alpha_n)$  apparait comme la solution d'un "problème aux valeurs propres" pour un certain opérateur différentiel. Les notions de valeurs propres et vecteurs propres seront vues en maths en L2. On verra un peu au S4 et surtout au S5 que ces notions sont centrales en mécanique quantique (l'équation de Schrödinger stationnaire est une équation aux valeurs propres) et on peut comprendre que certains des polynômes énoncés se retrouvent en première ligne dans certains systèmes emblématiques en mécanique quantique (oscillateur harmonique, atome d'Hydrogène ...).

### 2.4.2 EDLH du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants peut s'écrire sous la forme :

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0, \tag{5}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des scalaires (en général réels mais ils peuvent aussi être complexes). C'est une équation qu'on va rencontrer souvent en mécanique (oscillateur harmonique), en électrocinétique (circuit RLC série) et qui sera la base du cours "Systèmes oscillants" du S2. La méthode de résolution est basée

sur le fait qu'on va chercher a priori des solutions sous la forme exponentielle  $x = C \exp(rt)$ . Au passage on note qu'en général il faut avoir un peu de nez pour la résolution des équations-diff et tester des fonctions génériques comme solution possible, ici exponentielle, mais ça peut être aussi des polynômes, des fonctions trigonométriques etc...

Injectons donc  $x = C \exp(rt)$  dans l'équation (5). On obtient facilement

$$(ar^2 + br + c)C \exp(rt) = 0.$$

On voit que la fonction solution recherchée (jamais nulle) se factorise et il reste

$$ar^2 + br + c = 0.$$

La conclusion est que  $x = C \exp(rt)$  est bien solution à condition que  $r$  soit solution de l'équation du second degré ci-dessus. On va donc trouver 3 types de solution différents selon la valeur du discriminant  $\Delta$  de cette équation. On forme donc  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Si  $\Delta > 0$ , on a donc deux solutions réelles pour  $r$  :  $r_1$  et  $r_2$  et la solution générale est superposition des deux solutions indépendantes correspondantes :

$$x(t) = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t),$$

où les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont à déterminer avec les conditions initiales.

Si  $\Delta = 0$ , il y a une racine double  $r_0$ . La subtilité ici est que  $\exp(r_0 t)$  n'est du coup pas solution de (5) ; la solution correcte est en effet

$$x(t) = (C_1 t + C_2) \exp(r_0 t).$$

Tout cela à vérifier à titre d'exercice !

Si  $\Delta < 0$ , on a donc deux solutions complexes pour  $r$  que l'on peut noter  $r_{\pm}$  avec

$$r_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La solution pour  $x(t)$  s'écrit alors

$$x(t) = C_+ \exp(r_+ t) + C_- \exp(r_- t) = \exp(-\lambda t) \left( C_+ \exp\{i\Omega t\} + C_- \exp\{-i\Omega t\} \right),$$

avec  $\lambda = b/2a$ ,  $\Omega = \sqrt{-\Delta}/2a$  et où  $C_+$  et  $C_-$  sont des constantes a priori complexes. N'oublions pas que  $x(t)$  doit être réelle ! Une façon équivalente d'écrire la solution est :

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \left( a \cos \Omega t + b \sin \Omega t \right),$$

où  $a$  et  $b$  sont réelles du coup. Une troisième forme, plus compacte peut aussi être donnée :

$$x(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \phi),$$

où la constante  $A$  (réelle) est l'amplitude de  $x$  et  $\phi$  sa phase.

Les paramètres  $\lambda$  et  $\Omega$  sont homogènes à l'inverse d'un temps, si  $t$  représente effectivement le temps dans l'EDLH (5). L'interprétation physique est que  $\lambda$  est un coefficient d'amortissement et  $\Omega$  une (pseudo) pulsation et  $x(t)$  correspond donc à une solution pseudo-périodique amortie. Tout cela sera approfondi dans l'UE "Systèmes oscillants" au second semestre.

Exercice : démontrer l'équivalence entre les 3 formes proposées pour  $x(t)$  dans le cas où  $\Delta < 0$ .

### 2.4.3 EDL du second ordre à coefficients constants et avec second membre

(Autre titre possible : *Dédratisons le passage en complexe.*)

En physique on va souvent rencontrer l'équation 5 avec un second membre dépendant du temps, correspondant à une excitation variable dans le temps du système considéré. Un cas particulier très important consiste à considérer une excitation de forme sinusoidale. Dans ce cas, l'équation 5 devient :

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = d \cos \omega t, \quad (6)$$

où  $\omega$  est la pulsation (fixée) de l'excitation. Cette équation correspond au problème de l'oscillateur harmonique entretenu et sera développé au second semestre dans l'UE "Systèmes oscillants". La généralisation du traitement à toute EDL avec second membre sinusoidal sera donnée dans la partie suivante.

Comme déjà indiqué, la résolution de l'EDL (6) consiste à superposer la solution de l'EDLH (déterminée dans la section précédente) et une solution particulière de l'EDL avec le second membre. La première correspond au régime transitoire (qui en général s'amortit rapidement dans nos problèmes de physiciens) et la seconde au régime permanent. Le but du jeu est donc de déterminer ce régime permanent, le seul subsistant si on observe le système considéré assez longtemps.

Vu la forme du second membre, en  $\cos \omega t$ , on est tenté de rechercher une solution particulière de la même forme. On peut essayer à titre d'exercice et on peut voir que ça coince à cause de la dérivée première par rapport au temps. Il faut améliorer l'idée de départ en remarquant qu'un sinus c'est la même chose

qu'un cosinus ... mais déphasé de  $\pi/2$ . La bonne idée va donc être de rechercher la solution sous la forme d'un cosinus mais en incluant un déphasage :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

où  $A$  et  $\phi$  sont l'amplitude et la phase de  $x$  (ou plutôt déphasage de  $x$  par rapport à l'excitation) et dépendent a priori de  $\omega$ , le paramètre de l'excitation.

Sous cette forme, la solution n'est en fait pas très pratique (on peut s'en convaincre en l'injectant directement dans (6)). Il existe heureusement une astuce qu'on nomme rituellement<sup>1</sup> "passage en complexe". L'astuce repose sur le fait que  $\cos \theta$  n'est rien d'autre que la partie réelle du complexe  $\exp(i\theta)$ . Ainsi :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = A \operatorname{Re}(\exp(i(\omega t + \phi))).$$

On va donc réécrire  $x$  sous une forme adéquate où la dépendance temporelle est factorisée :

$$x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x} \exp(i\omega t)),$$

avec

$$\underline{x} = A \exp(i\phi).$$

Les réels  $A$  et  $\phi$  sont les module et phase de  $\underline{x}$ , représentation complexe de  $x(t)$  (avec en sous entendu la multiplication quelque part par  $\exp(i\omega t)$  facteur qui, on va le voir, ne sert en fait plus à rien!). Evidemment il convient de faire subir au terme d'excitation le même traitement que pour  $x(t)$ . C'est facile : la représentation complexe de  $d \cos \omega t$  est immédiatement  $d \exp(i\omega t)$ . Injectons maintenant  $\underline{x} \exp(i\omega t)$  dans l'équation (6) "passée en complexe". On obtient facilement :

$$-a\omega^2 \underline{x} \exp(i\omega t) + ib\omega \underline{x} \exp(i\omega t) + c \underline{x} \exp(i\omega t) = d \exp(i\omega t).$$

Que remarque-t-on ? Et oui, le terme  $\exp(i\omega t)$  apparaît partout et on peut donc simplifier :

$$-a\omega^2 \underline{x} + ib\omega \underline{x} + c \underline{x} = d.$$

On a en fait transformé l'équation différentielle initiale en une simple équation scalaire ! On voit donc là tout l'intérêt du passage en complexe car résoudre une équation du style  $ax + b = 0$  c'est quand même du gâteau même dans  $\mathbb{C}$  ! Factorisons donc  $\underline{x}$  à droite :

$$(-a\omega^2 + ib\omega + c) \underline{x} = d.$$

---

1. Le "passage en complexe" peut-être en effet perçu comme l'un des rites de passage du jeune physicien vers l'âge adulte !

Et on aboutit à la solution (complexe) :

$$\underline{x} = \frac{d}{c - a\omega^2 + ib\omega}.$$

Le tour est joué! On vient de trouver la solution pour  $\underline{x}$ . La solution pour  $x(t)$  (ce qui nous intéresse) s'en déduit : on multiplie par  $\exp(i\omega t)$  et on prend la partie réelle. En pratique, on fait rarement cette dernière opération. Toute l'information se trouve en effet de manière équivalente (et en fait plus pertinente) dans le module et la phase de  $\underline{x}$  car ce qui nous intéresse c'est le comportement en fonction de  $\omega$  et il est plus facile d'étudier les fonctions  $A(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  que de tracer  $x(t)$  pour diverses valeurs de  $\omega$  (de belles sinusoides d'amplitudes et de phases diverses)!

Etudier les fonctions  $A(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  c'est en fait étudier la *fonction de transfert* entre l'excitation  $d \cos \omega t$  et la réponse du système  $x(t)$  et c'est ce qu'on va généraliser dans la section suivante.

## 2.5 Réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoidale

Cette section complète et généralise la partie précédente qui présentait en fait un premier exemple de système linéaire (un oscillateur harmonique) soumis à une excitation périodique.

### 2.5.1 Système linéaire, définition et exemples

Un système linéaire, quelque soit le domaine considéré (électrocinétique ou autre), est un système dont la mise en équation donne une EDL (homogène ou pas). Cette EDL en général aura comme paramètre le temps  $t$  à la manière de l'équation (6). Un système linéaire du  $n$ -ième ordre correspondra à une EDL du  $n$ -ième ordre. Il y a pléthore d'exemples en physique de systèmes linéaires du premier et du second ordre (circuits RL et RC, circuits RLC et oscillateurs mécaniques, systèmes atomiques etc...). On va rencontrer des systèmes d'ordre plus élevé lorsqu'on va aborder la notion de filtrage (en S2 et surtout en L3 avec l'UE de "Traitement du signal").

## 2.5.2 EDL avec second membre sinusoidal

Un système linéaire d'ordre  $n$  soumis à une excitation sinusoidale peut donc se mettre en équation sous la forme (en choisissant le temps comme variable) :

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k \frac{d^k x}{dt^k} = b \cos \omega t,$$

où les  $a_k$  et  $b$  sont des réels et  $\omega$  est la pulsation de l'excitation. Le système étant linéaire, la méthode du passage en complexe s'applique. On va donc comme précédemment chercher la solution  $x$  sous la forme :

$$x(t) = \text{Re}(\underline{x} \exp(i\omega t)),$$

avec

$$\underline{x} = A \exp(i\phi).$$

L'EDL avec second membre se traduit alors par une équation scalaire pour  $\underline{x}$  :

$$\sum_{k=0}^{k=n} a_k (i\omega)^k \underline{x} = b,$$

où encore une fois  $\underline{x}$  se factorise :

$$\underline{x} = \frac{b}{\sum_{k=0}^{k=n} a_k (i\omega)^k}.$$

## 2.5.3 Notion de fonction de transfert

Le terme

$$F(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{k=n} a_k (i\omega)^k}$$

est appelé fonction de transfert entre l'excitation (représentée par  $b$ ) et la réponse  $\underline{x}$ . On a donc  $\underline{x} = F(\omega)b$ . Cette fonction de transfert est complexe et on peut en extraire le module et la phase qui contiennent à eux deux toute l'information. On préfère souvent donner directement le module  $A$  et la phase  $\phi$  de  $\underline{x}$  (phase qui est en fait celle de  $F(\omega)$ ,  $b$  étant réel!) :  $A = |F|b$  et  $\phi = \arg(F)$ .

*Remarque* : il y a un lien direct avec la notion de *transformée de Fourier*. Etudier la réponse d'un système linéaire à une excitation à une certaine pulsation  $\omega$  c'est en fait étudier une composante de Fourier (celle à la pulsation  $\omega$ ) d'une excitation en général plus compliquée. La transformée de Fourier va être présente de façon subliminale pendant tout le L1 et le L2 avant d'être véritablement dévoilée en L3.

## 3 Rappels et compléments de géométrie

Différents systèmes de coordonnées peuvent être utilisés en physique. Bien entendu, la Nature ne sait rien de ces systèmes de coordonnées : les lois de la physique ne dépendent pas de choix de tel ou tel système de coordonnées, qui n'est jamais qu'une façon de paramétrer le problème. Mais, pour des raisons assez évidentes liées aux propriétés de symétries du système étudié, ces lois pourront être très simple... ou très compliquée à écrire. Avant de se lancer dans la résolution d'un problème physique, il est donc important d'en identifier les symétries, première étape indispensable avant de choisir une façon appropriée de paramétrer le problème. Nous reviendrons plus loin sur cette question. Pour le moment, nous allons utiliser les coordonnées cartésiennes.

### 3.1 Coordonnées cartésiennes

#### 3.1.1 Définition

Ce système de coordonnées est particulièrement simple, quelle que soit la dimension  $d$  de l'espace :

- en dimension 1 (droite), une origine  $O$  étant choisie sur cet axe, c'est la distance algébrique  $\overline{OM}$ .

- en dimension 2 (plan), on choisit deux axes orthogonaux entre eux, se coupant en l'origine  $O$ . On définit sur chaque axe un sens, par choix de deux vecteurs unitaires<sup>2</sup>  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . Dans cette base, on peut alors écrire

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y, \quad (7)$$

ce qui définit les coordonnées  $x$  et  $y$ .

- en dimension 3 (espace), on choisit trois axes orthogonaux entre eux, concourants, se coupant en l'origine  $O$ . On définit sur chaque axe un sens, par choix de trois vecteurs unitaires  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ . Dans cette base, on peut alors écrire

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z, \quad (8)$$

ce qui définit les coordonnées  $x, y, z$ , comme illustré par la figure 1.

Dans ces trois cas, on dispose alors d'un repère orthonormé.

#### 3.1.2 Composantes d'un vecteur

Il existe un lien étroit entre espace affine (exemple : les points d'un plan) et les vecteur (exemple : les vecteurs d'un plan vectoriel) :

---

2. Un vecteur  $\vec{u}$  est unitaire si et seulement si  $\|\vec{u}\| = 1$ .

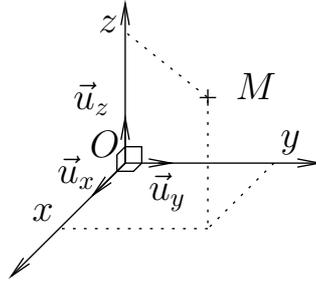


FIGURE 1 – Système de coordonnées cartésiennes.

un point  $O$  étant choisi (qui sert d'origine), la relation  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  peut s'écrire  $M = O + \vec{u}$  (voir cours de math sur les espaces affines).

Mais les vecteurs existent indépendamment des points : lorsque l'on écrit, pour  $M$  et  $N$  donnés,  $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ , le choix d'une origine  $O$  ne joue aucun rôle, grâce à la relation de Chasles  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$  où l'on voit que  $O$  "se compense".

Dans de nombreuses situations physiques, on est amené à considérer des vecteurs (forces, champs électrique, champ magnétique) sans que la notion de "points" existe. Et il est souvent utile de pouvoir les décomposer dans une base vectorielle  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  (en général  $n = 1, 2$  ou  $3$  :

$$\vec{v} = v_1 \vec{u}_1 + v_2 \vec{u}_2 + \dots + v_n \vec{u}_n . \quad (9)$$

Il est pratique de noter sous forme d'un vecteur (ou matrice colonne) les  $n$  composantes de  $\vec{w}$  :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} . \quad (10)$$

### 3.1.3 Repère direct

Dans le cas où  $d = 3$ , et si l'orientation de l'espace joue un rôle dans le problème considéré (c'est le cas lorsqu'un champ magnétique intervient), on choisira une base orthonormée directe, car certaines lois de la Nature dépendent de l'orientation de l'espace.

Par convention, un repère est direct lorsqu'il est choisi de telle sorte que si le vecteur  $\vec{u}_x$  pointe suivant le pouce et le vecteur  $\vec{u}_y$  pointe suivant l'index de la main droite, alors le vecteur  $\vec{u}_z$  pointe suivant le majeur. Si l'on utilise la main gauche, le repère sera alors dit indirect. Ces deux orientations sont illustrées par la figure 2.

D'un point de vue équivalent, un repère est direct si l'on passe du vecteur  $\vec{u}_x$  au vecteur  $\vec{u}_y$  par une rotation de la main droite d'un quart de tour dans le

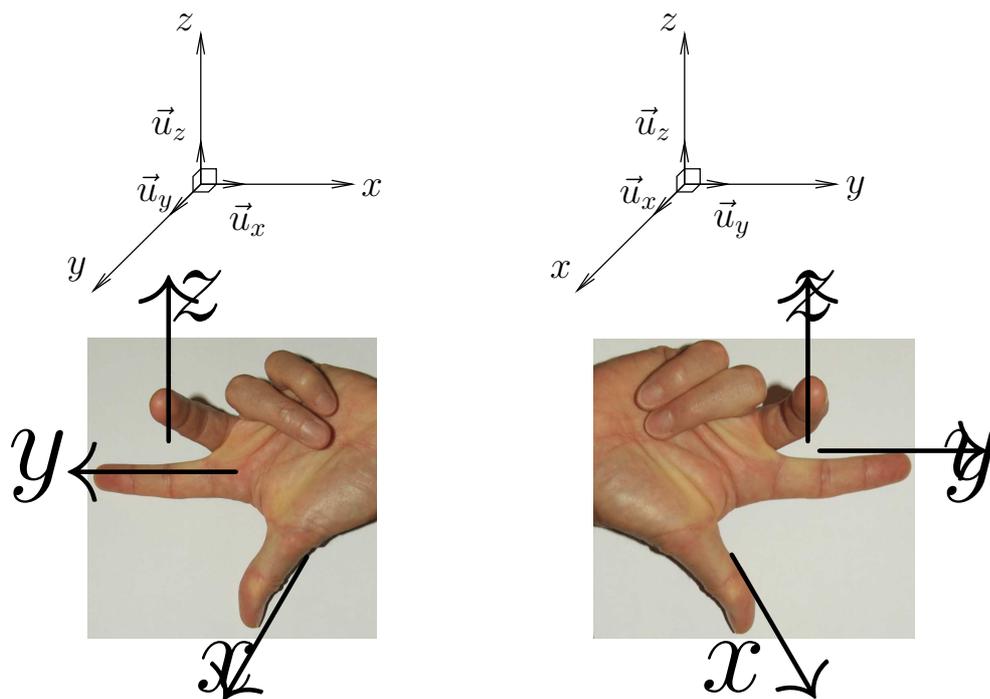


FIGURE 2 – A gauche : repère indirect (ou gauche). A droite : repère direct (ou droit).

sens naturel du mouvement, le pouce étant dirigé suivant l'axe  $z$ , pointant dans le sens du vecteur  $\vec{u}_z$ . Ceci justifie l'orientation trigonométrique habituelle du plan  $x, y$  par référence à l'axe  $z$  *sortant* du plan.

Par permutation circulaire, ceci s'applique également au passage de  $\vec{u}_y$  à  $\vec{u}_z$  le pouce pointant dans la direction  $x$ , dans le même sens que le vecteur  $\vec{u}_x$ , ainsi au passage de  $\vec{u}_z$  à  $\vec{u}_x$  le pouce pointant dans la direction  $y$ , dans le même sens que le vecteur  $\vec{u}_y$ .

### 3.2 Norme et distance

Dans l'espace euclidien usuel  $\mathbb{R}^n$ , une base orthonormée  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  étant donnée, la norme d'un vecteur  $\vec{v}$  s'écrira

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}. \quad (11)$$

Cette définition de la norme vérifie les propriétés suivantes (qui doivent être axiomatiquement satisfaites par toute norme dans un espace vectoriel abstrait

dit *normé*) :

$$\|\vec{v}\| = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}. \quad (12)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\| \quad (13)$$

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| \text{ (inégalité triangulaire)}. \quad (14)$$

Dans un espace affine, la distance entre  $A$  et  $B$  est définie en utilisant la norme définie sur l'espace vectoriel sous-jacent, par

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|. \quad (15)$$

### 3.3 Produit scalaire

Pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  donnés, en notant  $\theta$  l'angle entre ces deux vecteurs, le produit scalaire de ces deux vecteurs est par définition

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta. \quad (16)$$

**Propriétés :**

1. Le produit scalaire est symétrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}. \quad (17)$$

2. Le produit scalaire est bilinéaire, i.e linéaire à la fois à gauche (par rapport à  $\vec{u}$ ) et à droite (par rapport à  $\vec{v}$ ) dans la définition (16) :

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad (18)$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad (19)$$

$$(20)$$

3. Le produit scalaire est défini :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}. \quad (21)$$

4. Le produit scalaire est positif :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0. \quad (22)$$

Lien avec la norme : la définition implique immédiatement que

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2. \quad (23)$$

On montre facilement l'identité de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2], \quad (24)$$

puisque

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2 \vec{u} \cdot \vec{v}, \quad (25)$$

en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

Ceci permet d'obtenir l'expression du produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de leurs composantes dans une base orthonormée  $(u_1, \dots, u_n)$  :

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 = \sum_{i=1}^n (v_i + w_i)^2 - \sum_{i=1}^n v_i^2 - \sum_{i=1}^n w_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad (26)$$

Ainsi

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i.} \quad (27)$$

Une application immédiate du produit scalaire consiste à projeter un vecteur dans une base orthonormée  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Un calcul immédiat conduit à

$$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z = (\vec{V} \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{V} \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\vec{V} \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z. \quad (28)$$

### 3.4 Produit vectoriel

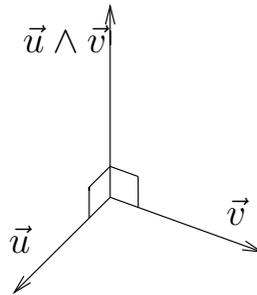


FIGURE 3 – Produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Définition :**

Sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,  $\theta$  étant l'angle entre ces deux vecteurs, se définit comme le vecteur  $\vec{w}$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  (ou  $\vec{u} \times \vec{v}$  en dehors de la France) tel que :

1.  $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$
2.  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$
3. la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est directe.

Ceci est illustré par la figure 3.

### Propriétés :

1. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.
2.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ .
3.  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \text{Aire}(\text{parallélogramme construit à l'aide des vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v})$ .
4. Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \quad (29)$$

5. Le produit vectoriel est compatible avec la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}). \quad (30)$$

6. Le produit vectoriel est antisymétrique :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}. \quad (31)$$

Ces différentes propriétés s'établissent facilement à partir de la définition.

### Méthode pratique :

On note tout d'abord que si  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est une base orthonormée directe, alors

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \quad (32)$$

$$\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \quad (33)$$

$$\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y. \quad (34)$$

On remarquera l'invariance par permutations circulaires des trois relations précédentes.

Supposons maintenant que  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont décomposés dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , suivant

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad (35)$$

alors

$$\boxed{\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ -(v_x w_z - v_z w_x) \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}.} \quad (36)$$

Autrement dit, chaque composante s'obtient en formant le déterminant de la matrice  $2 \times 2$  obtenue à partir de composantes de  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , en rayant la ligne que l'on souhaite calculer et en alternant le signe (d'où le signe - pour la composante suivant  $y$ ).

Ceci se démontre facilement en calculant  $\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z) \wedge (w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z)$  et en utilisant les propriétés de bilinéarité 4 et 5 ci-dessus, et en utilisant les produits vectoriels (32).

### Double produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w},} \quad (37)$$

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.} \quad (38)$$

*Preuve :*

Il suffit d'établir la première de ces deux relations pour en déduire la seconde, par antisymétrie du produit vectoriel, utilisée ici deux fois, et en échangeant le rôle de  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$ .

Donnons ici une preuve élégante, intrinsèque, qui n'utilise pas de base de l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Notons tout d'abord que ces relations sont évidentes lorsque les vecteurs entre parenthèses dans le double produit sont liés (injecter par exemple  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  dans la première de ces égalités).

Supposons donc que  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont indépendants. Alors, puisque  $\vec{v} \wedge \vec{w}$  est orthogonal au plan vectoriel engendré par  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , et comme  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$  est par définition lui-même orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ , il est donc dans le plan vectoriel engendré par  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . On a donc

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}. \quad (39)$$

Par ailleurs, par linéarité du produit vectoriel, le membre de droite doit être linéaire par rapport à  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . On a donc

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \lambda'(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} + \mu'(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \quad (40)$$

où  $\lambda'$  et  $\mu'$  sont des constantes indépendantes de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . En calculant le produit scalaire de cette relation avec  $\vec{u}$  on obtient alors

$$0 = \lambda'(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu'(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad (41)$$

et donc  $\lambda' = -\mu'$ . Reste à déterminer cette constante, en prenant une configuration particulière. Examinons par exemple le cas où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, et  $\vec{w} = \vec{u}$ . Alors  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \vec{v}$  alors que le membre de droite de l'Eq. (40) donne  $\lambda'(\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v}$ , d'où  $\lambda' = 1$ , ce qui achève la preuve.

On peut bien sûr établir ces relations en développant les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans une base orthonormée directe, par un calcul direct...mais horrible !

Une conséquence de ces relations est le fait que la somme sur les permutations circulaires du produit vectoriel de 3 vecteurs est nulle (Identité de Jacobi) :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0. \quad (42)$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) \\ = & (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Finalement, deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls formant un angle  $\theta$  étant donnés, la relation  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  s'écrit de façon intrinsèque sous la forme

$$\left( \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \right)^2 + \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \right)^2 = 1, \quad (44)$$

ou plus simplement (identité valable y compris dans le cas de vecteurs nuls) :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2. \quad (45)$$

### Produit mixte :

On a vu que la norme du produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  donne l'*aire du parallélogramme* construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Trois vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ , le *volume du parallélépipède* construit sur  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  est égal au produit de l'aire du parallélogramme de base, construit sur

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et de la hauteur, projection de  $\vec{w}$  sur la normale au parallélogramme, donc portée par  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . Si l'on tient compte de l'orientation (volume compté positif si  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est directes, négatif sinon), on aura alors

$$\text{volume orienté (parallélépipède construit sur } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \quad (46)$$

appelé *produit mixte* des vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ . On montre (voir cours de math sur les déterminants) que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad (47)$$

d'où l'on déduit immédiatement l'invariance du produit mixte par permutation cyclique et son antisymétrie si l'on échange deux vecteurs. Ceci est bien sûr en accord avec ce que l'on attend du volume orienté d'un parallélépipède !

## 4 Calcul différentiel pour les fonctions d'une variable

### 4.1 Rappels sur les développements limités

Rappelons la définition de la dérivée en  $x$  comme limite du taux d'accroissement. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (48)$$

une fonction.

Si la fonction est définie dans un voisinage d'un point  $x$ , on considère son taux d'accroissement  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ , et sa limite lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ . On écrira alors

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (49)$$

lorsque cette limite existe (aussi bien à droite, pour  $h > 0$ , qu'à gauche, pour  $h < 0$ ). Conventionnellement, la notation *différentielle* utilisée pour ce passage à la limite de ce taux d'accroissement, initialement constitué du rapport de deux quantités finies  $\Delta f$  et  $\Delta x$ , est de remplacer chacun de ces deux variations  $\Delta$  par un  $d$ , au sens d'une variation infiniment petite, et l'on écrira donc également

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (50)$$

Pour une fonction dérivable en  $x$ , on peut écrire le développement limité, valable dans un voisinage de  $x$  i.e. pour une variation  $\delta x$  supposée suffisamment petite devant  $x$  :

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}(x) \delta x + \epsilon(\delta x) \delta x \quad \text{avec} \quad \lim_{\delta x \rightarrow 0} \epsilon(\delta x) = 0 \quad (51)$$

où  $\epsilon$  une fonction dont la forme explicite importe peu en dehors du fait qu'elle a une limite nulle lorsque son argument tend vers 0. On écrit symboliquement  $\epsilon(\delta x) \delta x = o(\delta x)$  pour signifier que  $\epsilon(\delta x) \delta x$  est asymptotiquement négligeable devant  $\delta x$ .

Discutons (et justifions!) les différentes approximations de  $f(x + \delta x)$  sous-tendue par le développement (51), illustrées par la figure 4 :

- Le terme dominant (ordre 0), correspond à approximer  $f(x + \delta x)$  par sa valeur  $f(x)$ .

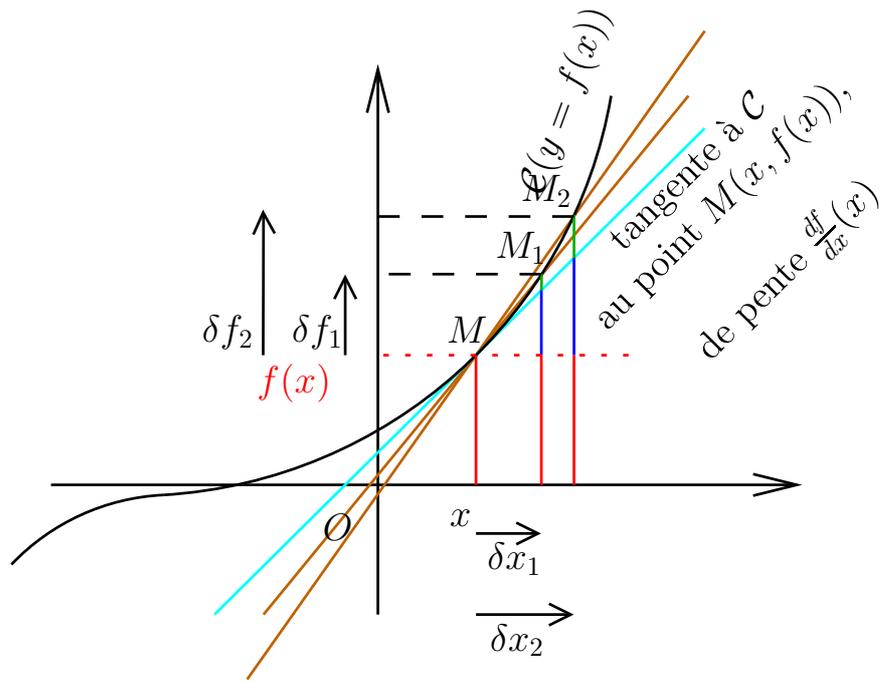


FIGURE 4 – Approximation au premier ordre d'un fonction  $f$  au voisinage de  $x$ . En rouge l'approximation d'ordre 0, en bleu la correction d'ordre 1, et en vert l'écart à la valeur exacte. Dessin pour deux points  $M_1(x_1, f(x_1))$  et  $M_2(x_2, f(x_2))$ , correspondant à deux valeurs différentes de l'écart  $\delta x$  par rapport à la valeur de référence  $x$  de la variable. En bleu clair la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M(x, f(x))$ , de pente  $\frac{df}{dx}(x)$ , limite des cordes, deux d'entre-elles étant dessinées en marron passant par le point  $M$  et par les points  $M_1$  et  $M_2$  respectivement.

- L'approximation d'ordre 1 correspond à approximer  $f(x+\delta x)$  par une droite tangente à la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $y = f(x)$ . Celle-ci est la limite d'une corde arbitraire passant par le point  $M(x, f(x))$  et par un point quelconque de  $\mathcal{C}$  lorsque ce second point se rapproche arbitrairement du point  $M$ .

La pente d'une corde passant par  $M$  est le taux d'accroissement  $\frac{\delta f}{\delta x}$ , dont la limite lorsque  $\delta x \rightarrow 0$  est la dérivée  $\frac{df}{dx}(x)$ , ce qui justifie le fait que la dérivée de  $f$  en  $x$  donne la pente de la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M(x, f(x))$ .

Cette correction d'ordre 1 est donc égale à la pente de cette tangente  $\times$  la variation  $\delta x$ , soit  $\frac{df}{dx}(x) \delta x$ .

- La courbe  $\mathcal{C}$  ayant a priori une courbure en  $M$  (sauf bien sûr dans le cas particulier où  $\mathcal{C}$  est une droite), plus on s'écarte de  $M$ , plus la correction (en vert sur la figure 4) augmente en valeur relative par rapport à la correction d'ordre 1 (en bleu sur la figure 4). On peut poursuivre cette cascade d'approximation en collant une parabole en  $M$  (correction d'ordre 2), et on montre que celle-ci s'écrit  $\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) (\delta x)^2$ , ce qui décrit le terme dominant de la correction en vert, etc. Contentons-nous ici de décrire cette correction par le terme  $\epsilon(\delta x) \delta x = o(\delta x)$ .

En conclusion, l'équation de la droite tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $M(x, f(x))$  s'écrit donc, d'après l'approximation linéaire du développement (51),

$$Y - f(x) = \frac{df}{dx}(x)(X - x) \quad (52)$$

où  $M'(X, Y)$  est un point quelconque de cette tangente.

## 4.2 Différentielle des fonctions à une variable

A la limite où  $\delta x \rightarrow 0$ , et l'on conviendra alors de noter  $dx$  une telle variation asymptotiquement petite de  $x$ , la correction  $\epsilon(\delta x) \delta x$  (partie verte) étant, *en valeur relative* par rapport à la correction d'ordre 1  $\frac{df}{dx}(x) \delta x$  (partie bleue), infiniment petite, on peut donc écrire, en notant  $df$  la variation infiniment petite  $\delta f$  correspondante,

$$df = \frac{df}{dx}(x) dx. \quad (53)$$

Cette expression, avec une égalité entre deux variations infiniment petites, porte de le nom de différentielle de la fonction  $f$  en  $x$ . En mathématique, le nom de différentielle en  $x$  est associé à l'application linéaire qui à  $h$  associe  $\frac{df}{dx}(x) h$  mais cette distinction subtile import peu en pratique, en particulier pour le physicien...

Constatons également que l'expression (53) justifie a posteriori l'écriture "différentielle" de la dérivée en  $x$  : tout se passe ici comme si  $\frac{df}{dx}$  était une fraction avec un numérateur et un dénominateur que l'on pouvait séparer !

Ce concept de différentielle est extrêmement utile dans tous les domaines de la physique (et pas seulement de la physique!), et s'étend aux fonctions à plusieurs variables comme allons le voir.

## 4.3 Intégration

### 4.3.1 Sommes de Riemann

Rappelons la façon dont l'intégrale d'une fonction réelle d'une seule variable est définie à partir des sommes de Riemann. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie en tout point du segment  $[a, b]$ .

Une subdivision de  $[a, b]$  est une partition de l'intervalle  $I = [a, b]$  en  $n$  intervalle  $I_i = [a_{i-1}, a_i]$  (pour  $i = 1, \dots, n$ ) de longueur  $\delta = \frac{b-a}{n}$  avec  $a_0 = a$  et  $a_n = b$ . De façon équivalente, on se donne donc l'ensemble  $\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n \mid a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b, a_i - a_{i-1} = \delta = \frac{b-a}{n}\}$ .

#### Définition :

Soit  $\sigma_n$  une subdivision fixée de l'intervalle  $I = [a, b]$ . Pour tout choix de  $n$  points  $x_i \in I_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), on appelle somme de Riemann de  $f$  associée à la subdivision  $\sigma_n$  et aux points  $\{x_i\}$  la somme

$$R_n(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) \quad (54)$$

où chaque terme  $f(x_i)\delta$  représente l'aire algébrique du rectangle de base  $I_i$  et de hauteur  $f(x_i)$ , comme illustré par la figure 5.

#### Définition :

On dit que la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $[a, b]$  selon Riemann si, en faisant varier la subdivision  $\sigma_n$  de  $[a, b]$ , et les points  $x_i \in I_i$ , la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f; \{x_i\}) \quad (55)$$

existe, est finie, et ne dépend pas du choix des points  $x_i \in I_i$ .

On appelle alors intégrale de Riemann cette limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f; \{x_i\}). \quad (56)$$

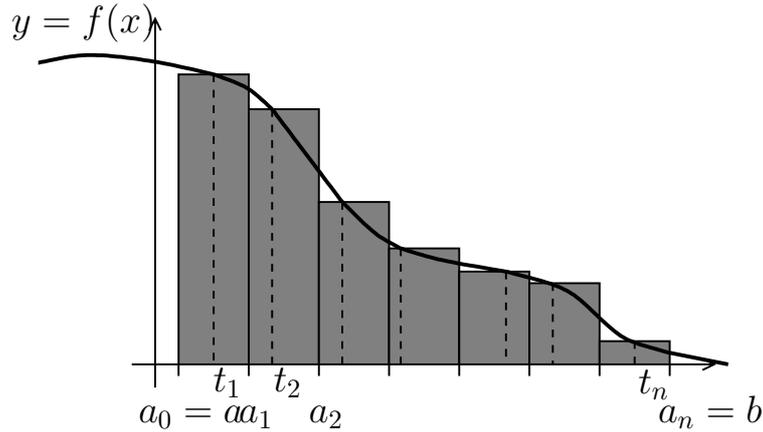


FIGURE 5 – Somme de Riemann d’une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$ .

Pour  $a < b$ ,  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ .

Il découle immédiatement de la définition que

$$\int_a^b f(x) dx = \text{aire algébrique sous le graphe de } f$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \text{aire sous le graphe de } f .$$

### Propriétés :

L’intégration est linéaire : si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $[a, b]$ , alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f + \mu g$  l’est aussi, et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx . \quad (57)$$

On verra en cours de math le résultat important suivant, qui s’applique à une grande partie des situations rencontrées en physique.

### Théorème :

Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$  au sens de Riemann.

Enfin, on démontre le

## Théorème fondamental du calcul intégral (Newton-Leibniz) :

Si la fonction  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  au sens de Riemann, alors elle admet une primitive  $F$  sur  $[a, b]$ , et on a :

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt + c \text{ où } c \in \mathbb{R}. \quad (58)$$

### 4.3.2 Intégration par partie

La dérivée d'un produit de fonctions est bien connu :

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}. \quad (59)$$

Il suffit de passer le second terme du second membre dans le premier pour obtenir la relation

$$\frac{d(uv)}{dx} - v \frac{du}{dx} = u \frac{dv}{dx}, \quad (60)$$

qui permet donc d'écrire, par intégration immédiate du premier terme de la relation précédente,

$$\boxed{\int_b^a u dv = [uv]_a^b - \int_b^a v du.} \quad (61)$$

### 4.3.3 Intégrales impropres

Soit une fonction  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b$  réel ou infini. On suppose que  $f$  est intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans  $[a, b[$  (on dit que  $f$  est localement intégrable sur  $[a, b[$ ; exemple :  $f$  est continue sur  $[a, b[$ ). Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt \quad (62)$$

existe et est finie, on appellera intégrale impropre sur  $[a, b[$  cette limite. De même, si  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $b \in \mathbb{R}$  et  $a$  réel ou infini et si  $f$  est localement intégrable sur  $]a, b]$ , et si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt \quad (63)$$

existe et est finie, on appellera intégrale impropre sur  $]a, b]$  cette limite.

Dans les deux cas, on notera

$$\int_a^b f(t) dt \quad (64)$$

cette limite.

Exemple :

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} = \frac{1}{a} \quad (65)$$

car

$$\int_0^{\Lambda} e^{-ax} = \left[ -\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^{\Lambda} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{a} e^{-a\Lambda} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}. \quad (66)$$

Exercice :

Les intégrales gaussiennes

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx \quad (67)$$

interviennent dans de très nombreux domaines de la physique : théorie cinétique des gaz, physique statistique, théorie quantique des champs, etc. Nous montrons plus loin que

$$I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi \alpha}. \quad (68)$$

1. Montrer que

$$I_1 = \frac{1}{2\alpha}. \quad (69)$$

[**Corrigé :** Il suffit de voir que

$$\frac{d}{dx} e^{-\alpha x^2} = -2\alpha e^{-\alpha x^2}$$

et donc

$$I_1 = -\frac{1}{2} \left[ \alpha e^{-\alpha x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}.$$

]

2. Montrer que pour  $n \geq 2$ ,

$$I_n = \frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2}. \quad (70)$$

[**Corrigé :** On pose  $u = x^{n-1}$  et  $v' = x e^{-\alpha x^2}$ , soit  $u' = (n-1)x^{n-2}$  et  $v = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}$ . Alors

$$I_n = - \left[ \frac{1}{2\alpha} x^{n-1} e^{-\alpha x^2} \right]_0^{\infty} + \frac{n-1}{2\alpha} \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{-\alpha x^2} = \frac{n-1}{2\alpha} I_{n-2}$$

puisque le terme tout intégré s'annule.]

### 4.3.4 Différentielle et changement de variables

Une application importante des différentielles est fournie par les changements de variables dans les calculs d'intégrales.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (71)$$

et supposons qu'un changement de variable  $x = g(t)$  permet de ramener le calcul à une primitive connue. Supposons également que  $g$  est bijective, avec  $a = g(t_a)$  et  $b = g(t_b)$ . On aura  $dx = g'(t)dt$  et

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t)) g'(t) dt. \quad (72)$$

Exemple : calculons

$$I = \int_a^b x \sqrt{1+x^2} dx. \quad (73)$$

Posons  $u = 1 + x^2$ , soit  $du = 2x dx$ . Alors

$$I = \frac{1}{2} \int_{1+a^2}^{1+b^2} u^{1/2} du = \left[ \frac{1}{3} u^{3/2} \right]_{1+a^2}^{1+b^2} = \frac{1}{3} \left( (1+b^2)^{3/2} - (1+a^2)^{3/2} \right). \quad (74)$$

## 4.4 Dérivées de fonctions composées

La dérivation d'une fonction composée est particulièrement utile en physique, et d'interprète de façon très simple en utilisant la notation différentielle.

Rappel :

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles de domaines de définitions  $D_f$  et  $D_g$  avec  $g(D_g) \subset D_f$ , la fonction composée  $f \circ g$  est définie par

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (75)$$

$$x \mapsto f(g(x)). \quad (76)$$

Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables respectivement en  $g(x)$  et en  $x$ , alors la fonction  $f \circ g$  est dérivable en  $x$ , de dérivée

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)}. \quad (77)$$

La preuve est immédiate en considérant le taux d'accroissement :

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Le second facteur tend vers  $g'(x)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

Le premier tend vers  $f'(g(x))$  : en effet  $g(x+h) - g(x) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$  par continuité de  $g$  en  $x$  (une fonction dérivable est continue...). On peut donc poser  $h' = g(x+h) - g(x)$  avec  $h' \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . On a alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{h' \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + h') - f(g(x))}{h'} = f'(g(x)).$$

On voit ici l'intérêt de la notation différentielle lorsque l'on l'utilise pour formuler le résultat (77) :

$$\frac{df(g(x))}{dx}(x) = \frac{df}{dg}(g(x)) \frac{dg}{dx}(x) \quad (78)$$

qui fait intervenir le produit des deux taux d'accroissement asymptotiques rencontrés dans la preuve ci-dessus, en jouant avec les différentielles comme si elles se comportaient comme des fractions habituelles !

## 4.5 Dérivation vectorielle

### 4.5.1 Généralités

Dans de nombreuses situations physiques, il est nécessaire de considérer des fonctions vectorielles (et même tensorielles...), ce qui signifie alors que l'on considère maintenant,  $E$  étant un espace vectoriel, en pratique, souvent  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{C}^3$ ) :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow E \\ x &\mapsto \vec{f}(x). \end{aligned} \quad (79)$$

Le concept de dérivée d'une fonction scalaire (réelle ou complexe) d'une variable, rappelé plus haut p.29 peut s'étendre assez facilement au cas où cette fonction est un vecteur.

Si la fonction est définie dans un voisinage<sup>3</sup> d'un point  $x$ , on considère son taux d'accroissement  $\frac{\Delta \vec{f}}{\Delta x}$ , et sa limite lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ . On écrira alors

$$\vec{f}'(x) = \frac{d\vec{f}}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x+h) - \vec{f}(x)}{h} \quad (80)$$

lorsque cette limite existe (aussi bien à droite, pour  $h > 0$ , qu'à gauche, pour  $h < 0$ ).

---

3. Ce qui signifie que  $x$  doit être dans un intervalle ouvert lui-même contenu dans le domaine de définition.

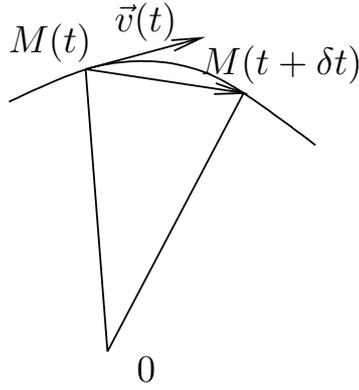


FIGURE 6 – Définition de la vitesse comme limite du taux d'accroissement du vecteur position.

Si l'on dispose d'une base fixe de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$ , alors de façon immédiate, en projetant  $\vec{f}$  sur cette base, la définition précédente est équivalente à celle consistant à définir la dérivée d'une fonction vectorielle comme un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  dont les composantes sont les dérivées usuelles des composantes de la fonction  $\vec{f}$  :

$$\vec{f}'(x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{vmatrix} \quad (81)$$

La définition (80) est intrinsèque, tandis que la définition (81) est liée à une base donnée. Elles sont parfaitement équivalentes, et dans de nombreuses situations, il est plus économique d'utiliser une formulation intrinsèque.

Une utilisation directe de la dérivation vectorielle est fournie par le concept de vitesse en mécanique. Par définition,  $O$  étant un point fixe quelconque, on appelle  $\overrightarrow{OM}(t)$  le vecteur position à l'instant  $t$ , et l'on définit le vecteur vitesse à l'instant  $t$  par

$$\vec{v}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\delta t}. \quad (82)$$

Ceci s'écrit encore

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t + \delta t)}}{\delta t}, \quad (83)$$

et la limite de la corde  $[M(t)M(t + \delta t)]$  étant la tangente à la trajectoire en  $M(t)$  lorsque  $\delta t \rightarrow 0$ , on en déduit comme attendu que le vecteur vitesse est lui-même tangent à la trajectoire en  $M(t)$ , comme illustré dans la figure 6.

De la même façon, on définit l'accélération à l'instant  $t$  comme la dérivée de la vitesse à l'instant  $t$ , en écrivant donc

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \delta t) - \vec{v}(t)}{\delta t} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}(t), \quad (84)$$

où l'on a introduit la notation différentielle pour la dérivée seconde.

Notation : en mécanique, il est d'usage de noter la dérivée par rapport au temps avec un point, et la dérivée seconde avec un double point, de sorte que

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = \dot{\vec{OM}}(t) \quad (85)$$

et

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{OM}}(t). \quad (86)$$

Exercice :

On suppose qu'un objet de petite taille chute dans un fluide (exemple : petite bille dans l'huile, poussière dans l'air, petite goutte de pluie dans l'air, etc.), et que la vitesse est suffisamment faible pour que l'écoulement soit dans les conditions dites de Stokes : la force de frottement s'exerçant sur l'objet est de la forme

$$\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau}\vec{v}. \quad (87)$$

1. Discuter le signe présent dans cette expression, et donner la dimension de  $\tau$ .

[**Corrigé :** Signe - car frottement qui s'oppose au mouvement donc à la vitesse.  $[\tau] = T$  ]

2. On suppose que la vitesse à un instant  $t = 0$  est égale à  $\vec{v}_0$ . Ecrire le PFD, résoudre l'équation différentielle obtenue sous forme vectorielle et en déduire l'expression de  $\vec{v}(t)$  en fonction de  $t$ ,  $\tau$ ,  $\vec{v}_0$ ,  $\vec{g}$ .

[**Corrigé :**

$$\vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \tau\vec{g})e^{-t/\tau} + \tau\vec{g}.$$

]

3. Discuter en détail la solution obtenue.

[**Corrigé :** L'échelle caractéristique du problème est  $\tau$ . Lorsque  $t \gg \tau$ , la vitesse devient proche d'une vitesse limite  $\vec{v}_{lim} = \tau\vec{g}$ . D'après l'expression (87), le frottement est d'autant plus fort que  $\tau$  est faible. Le régime limite est alors atteint plus rapidement, et la vitesse limite est plus faible.

Cet exercice montre qu'il n'est pas toujours indispensable d'utiliser un système de coordonnées explicite !]

### 4.5.2 Propriétés

La dérivée du produit scalaire de deux fonctions vectorielles  $\vec{f}(t)$  et  $\vec{g}(t)$  s'obtient de façon immédiate en utilisant leur décomposition dans une base. On montrera ainsi que

$$\boxed{\frac{d(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))}{dt} = \frac{d\vec{f}(t)}{dt} \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \frac{d\vec{g}(t)}{dt}},} \quad (88)$$

qui ressemble sans surprise à la règle de dérivation du produit de deux fonctions scalaires.

Conséquence immédiate :

$$\boxed{\text{La dérivée d'un vecteur de norme constante est orthogonale à ce vecteur.}} \quad (89)$$

En effet, supposons que  $\|\vec{f}\| = \text{constante}$ . Comme  $\|\vec{f}\|^2 = \vec{f} \cdot \vec{f}$  on en déduit que

$$\frac{d(\vec{f} \cdot \vec{f})}{dt} = 0 = 2 \frac{d\vec{f}(t)}{dt} \cdot \vec{f}(t) \quad (90)$$

par application immédiate de la relation (88) et du fait que la dérivée d'une constante est nulle, ce qui prouve le résultat.

En utilisant à nouveau la décomposition de deux fonctions vectorielles  $\vec{f}(t)$  et  $\vec{g}(t)$  en utilisant leur décomposition dans une base, et l'expression (36) de leur produit vectoriel, on obtient facilement la relation

$$\boxed{\frac{d(\vec{f}(t) \wedge \vec{g}(t))}{dt} = \frac{d\vec{f}(t)}{dt} \wedge \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \wedge \frac{d\vec{g}(t)}{dt}.} \quad (91)$$

# 5 Calcul différentiel pour les fonctions à plusieurs variables

## 5.1 Fonctions de plusieurs variables, champs

Dans de très nombreuses situations physiques, une quantité donnée dépend de plusieurs variables. Ainsi, si je me promène, ma position (en supposant que je ne prends pas l'avion...) dépend de deux coordonnées (par exemple localement  $x, y$ , ou plus généralement, puisque nous vivons sur une (grande) sphère, (longitude, latitude), voir plus loin les systèmes de coordonnées), et mon altitude  $z$  est une certaine fonction  $x, y$  : une carte en relief matérialise cette fonction  $z(x, y)$ .

Il n'y a bien entendu aucune raison de se limiter à la géométrie bidimensionnelle.

Considérons l'écoulement d'un fluide (liquide ou gaz) dans un domaine donné de l'espace. La pression qui règne en un point  $M(x, y, z)$  est une fonction de 3 variables d'espace. La pression étant un nombre (un scalaire), la donnée de cette fonction dans un domaine donné est appelé *champ scalaire*, ici champ de pression<sup>4</sup>. D'autres exemples de champ scalaire viennent immédiatement à l'esprit : le champ de température dans une pièce (il fait plus chaud près du plafond, et plus chaud près des radiateurs...), le potentiel électrostatique créé dans l'espace par un système de charges électriques, etc.

Revenons à l'exemple du promeneur ci-dessus, où  $z(x, y)$  peut être considéré comme le champ de déformation vertical du sol. Dans la réalité, il suffit de se promener dans de nombreux relief suffisamment tourmentés pour se rendre compte que les déformations sont tri-dimensionnelles. Il est donc plus intéressant de s'intéresser à la fonction vectorielle  $\vec{\delta}(x, y)$  donnant le déplacement du sol par rapport à un plan moyen (localement, la Terre est assimilable à un plan), lié à l'évolution géologique en fonction du lieu où l'on se trouve, et plus généralement  $\vec{\delta}(x, y, z)$  si l'on s'intéresse aux déformations de l'intérieur de la Terre. Cette déformation peut bien entendu dépendre du temps (pensez à la déformation du sol lors d'un tremblement de terre où cette dépendance est très rapide). D'autres situations physiques font intervenir des champs *vectoriels*, par exemple le champ électrique  $\vec{E}(t, x, y, z)$ , le champ magnétique  $\vec{B}(t, x, y, z)$ , le champ gravitationnel  $\mathcal{G}(x, y, z)$ . On parle ici de *champ vectoriel* car la quantité physique est un vecteur, qui dépend de la position dans l'espace-temps<sup>5</sup>. On notera ici un point important, qui peut surprendre au premier abord : les vecteurs ne sont pas tou-

---

4. Le concept de champ sous-entend le fait que  $x, y, z$  prennent des valeurs continues, par opposition à des valeurs discrètes sur les nœuds d'un réseau, analogue à plusieurs dimensions du concept de suite. Dans la réalité, on se ramène souvent au cas d'un réseau lorsqu'il s'agit de simuler numériquement un système donné...

5. Espace-temps qui peut être d'ailleurs être classique, i.e. galiléen, ou relativiste...

jours reliés à la géométrie spatiale : si les déformations  $\vec{\delta}$  sont des vecteurs dans l'espace usuel, les champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\mathcal{G}$  sont des vecteurs d'un espace abstrait. Ils ont tous en commun le fait d'appartenir à un espace vectoriel à 3 dimensions, d'où l'intérêt mathématique de s'intéresser à la structure des espaces vectoriels, indépendamment de leur nature physique et de la dimension de l'espace en question...

L'ensemble des concepts introduits plus tôt peut maintenant s'étendre à ces différentes situations, comme nous allons le voir maintenant.

### 5.1.1 Dérivées partielles

Considérons une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variables. Par définition, la dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$  est la dérivée de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  calculée en considérant l'ensemble des autres variables  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  comme fixes. La notation est

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|_{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n} \quad (92)$$

où les variables en indice sont les variables constantes. La notation  $\partial$  (se prononce « d rond ») est ici utilisée par opposition à la notation  $d$  afin de distinguer les dérivées partielles des dérivées des fonctions à une seule variable. Les dérivées partielles sont bien sûr définies, comme les dérivées des fonctions d'une seule variable, comme limite des taux d'accroissement relativement à la variable considérée.

Comme nous l'avons dit plus haut, une grande partie de la physique peut être décrite au moyen d'équations différentielles. Dans le cas de situations où le nombre de variables est supérieur à 1, la description passe par des équations aux dérivées partielles, qui relient des dérivées partielles d'une même fonction entre elles.

#### Exercice :

Dans certaines conditions, l'équation décrivant la propagation d'une onde dans un milieu unidimensionnel s'écrit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (93)$$

où  $f(x, t)$  décrit le signal qui se propage (hauteur d'eau dans un canal par exemple) et  $c$  la célérité de l'onde.

1. Vérifier l'homogénéité de cette équation.

2. Montrer que les fonctions de la forme  $f_1(x, t) = g(x - ct)$  d'une part,  $f_2(x, t) = g(x + ct)$  d'autre part,  $g$  étant une fonction arbitraire supposée posséder une dérivée seconde, sont solutions de l'équation d'onde (93). Quelle est la nature des solutions obtenues ?

3. Montrer que les fonctions de la forme

$$f(x, t) = \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \phi\right) \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \psi\right) \quad (94)$$

sont solutions de l'équation d'onde (93), à la condition que  $\lambda$  et  $T$  vérifient une relation que l'on précisera. Quelle est la signification de  $\lambda$  et  $T$  ? Quelle est la nature des solutions obtenues ?

### 5.1.2 Différentielle d'une fonction scalaire à plusieurs variables

Nous avons introduit plus haut la notion de différentielle d'une fonction d'une variable, variation infinitésimale d'une fonction lorsque sa variable varie d'une quantité elle-même infiniment petite. Cette notion se généralise immédiatement au cas d'une fonction de plusieurs variables. Pour fixer la pensée, reprenons l'exemple de l'altitude en un lieu donné, fonction des coordonnées  $(x, y)$  du lieu, sous la forme  $z = f(x, y)$ , comme illustré dans la figure 7.

Supposons que l'on s'avance d'une quantité infiniment petite  $dx$  en suivant une droite parallèle à l'axe des  $x$ , donc en maintenant  $y$  constant. On peut alors écrire pour la variation d'altitude

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx \quad (95)$$

et de même, si l'on avance d'une quantité infiniment petite  $dy$  en suivant une droite parallèle à l'axe des  $y$ , donc en maintenant  $x$  constant, on aura

$$df = \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (96)$$

De façon plus générale, si l'on se déplace du point de coordonnées  $(x, y)$  au point de coordonnées  $(x + dx, y + dy)$ , l'altitude varie de

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (97)$$

qui porte le nom de différentielle de la fonction au point  $(x, y)$ .

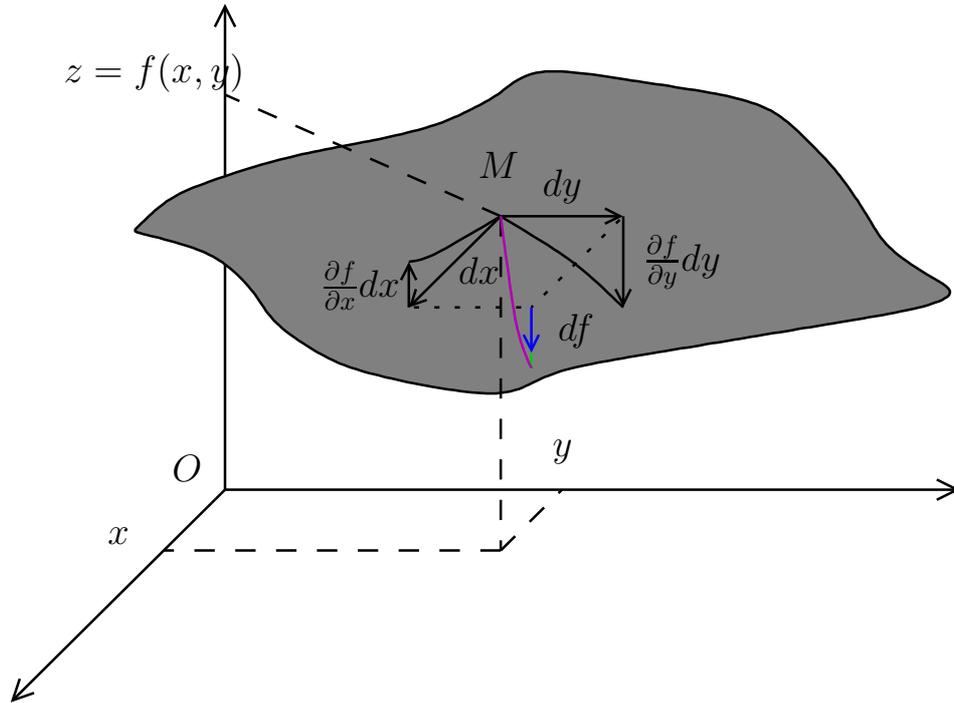


FIGURE 7 – Variation locale de l'altitude au voisinage d'un point  $M$ . En bleu, différentielle de la fonction, et en vert, l'écart entre la différentielle et la surface réelle, asymptotiquement nulle par rapport à la différentielle dans la limite  $(dx, dy) \rightarrow (0, 0)$  où elle doit être envisagée.

Ceci s'étend bien sûr aux fonctions de  $n$  variables, pour lesquelles on écrira

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (98)$$

Contrairement au cas des fonctions d'une seule variable, où l'existence d'une dérivée en un point est équivalente à la différentiabilité, l'existence de dérivée partielle en un point  $(x_1, \dots, x_n)$  ne suffit pas a priori à assurer la différentiabilité. On montre que l'existence de dérivées partielle continues dans un voisinage d'un point donné<sup>6</sup> permet d'assurer cette différentiabilité. En pratique en physique, ce sera quasiment toujours le cas...

### 5.1.3 Théorème de Schwarz

Soit  $f$  une fonction d'un sous-ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $M \in \mathbb{R}^n$  tel qu'un voisinage de  $M$  soit inclus dans  $\Omega$ , et supposons que  $f$  possède des dérivées

6. On parle alors de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

secondes continue en  $M$ , alors

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(M) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(M). \quad (99)$$

Une condition moins forme pour ce théorème est que les dérivées partielles soient différentiables.

En particulier, pour la différentielle de la fonction (98), écrite sous la forme

$$df = a_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)dx_n. \quad (100)$$

on aura donc

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{\partial a_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}. \quad (101)$$

Le problème inverse,  $n$  fonction  $a_i$  étant données, de savoir si l'expression, dite forme différentielle

$$\delta f = a_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)dx_n \quad (102)$$

(noter la notation  $\delta$ , pour distinguer une forme différentielle d'une différentielle) correspond à la différentielle d'une fonction est non trivial. Le théorème de Schwarz donne les conditions nécessaires : lorsqu'elle sont vérifiées, on dira que  $\delta f$  est fermée. Une condition suffisante sera donnée plus loin.

#### 5.1.4 Cas des fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles

L'extension de l'ensemble des notions précédentes au cas où la fonction est à valeurs vectorielles est immédiat. Considérons

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (103)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \vec{f}(x_1, \dots, x_n). \quad (104)$$

La fonction  $\vec{f}$  sera dite différentiable si et seulement si les  $m$  composantes  $f_k$  ( $k \in \{1, \dots, m\}$ ) le sont (dans une base de  $\mathbb{R}^m$  supposée fixe). On aura alors

$$d\vec{f} = (df_1, \dots, df_m). \quad (105)$$

En particulier, sur l'espace  $\mathbb{R}^n$ , on écrira, une origine arbitraire  $O$  étant fixée,

$$d\overrightarrow{OM} = (dx_1, \dots, dx_n), \quad (106)$$

notée également  $\overrightarrow{dM}$ .

### 5.1.5 Gradient d'une fonction scalaire

Considérons à nouveau l'approximation linéaire locale effectuée ci-dessus au paragraphe 5.1.2 au voisinage d'un point  $(x_1, \dots, x_n)$ , du point de vue géométrique où  $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$  est la  $(n + 1)$ -ième coordonnée d'une surface.

Nous examinons donc une surface dans un espace de dimension totale  $d = n + 1$ . Dans le cas examiné plus haut où  $z = f(x, y)$ , illustré par la figure 7,  $n = 2$  et  $d = 3$ . Cette approximation locale correspond à approximer la surface d'équation  $x_{n+1} = f((x_1, \dots, x_n)$  au voisinage d'un point donné par un plan, de la même façon que l'approximation linéaire d'une fonction d'une seule variable permet d'approximer une courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = f(x)$  par une droite tangente en ce point, comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe 4.1 et illustré dans la figure 4. Notons que si  $n > 2$ , la dimension totale de l'espace étant  $d = n + 1$ , on parlera alors d'hyperplan, généralisation d'un plan au sens d'un sous-espace de dimension  $d - 1$ , un plan étant bien un espace de dimension  $3-1=2$ .

L'équation de ce plan tangent est connue une fois la valeur de la fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  donnée et les  $n$  dérivées locales en  $(x_1, \dots, x_n)$  connues. Cette dernière information peut s'écrire sous la forme d'un vecteur à  $n$  composantes, appelé gradient. On écrit donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (107)$$

et

$$\boxed{df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\overrightarrow{M}} \quad (108)$$

L'équation du plan tangent en  $M(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$  s'écrit alors,  $M'(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$  étant un point quelconque de ce plan passant par le point de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$  :

$$X_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n) = (X_1 - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + (X_n - x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (109)$$

ou encore, en notant  $N(x_1, \dots, x_n)$  et  $N'(X_1, \dots, X_n)$  les projections de  $M$  et  $M'$  sur l'espace de référence initial (c'est le plan  $(x, y)$  dans le cas  $n = 2$  de la figure 7, et plus généralement l'espace  $\mathbb{R}^n$  d'origine  $O$  sur lequel  $f$  est définie),

$$X_{n+1} - f(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{NN'} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f(\overrightarrow{ON}). \quad (110)$$

qui prend une forme particulièrement simple, généralisant de façon naturelle le résultat bien connu rappelé en (52). Cette expression permet par exemple

d'obtenir facilement (voir plus loin) l'équation du plan tangent à un cylindre ou à une sphère.

Introduisant l'opérateur  $\vec{\nabla}$  (« nabra ») défini par

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (111)$$

on a alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f. \quad (112)$$

Comme nous l'avons dit, la physique ne se réduit pas à la géométrie, et dans de nombreuses situations,  $f$  n'a aucune signification géométrique particulière (pression, température). L'intérêt immédiat de l'information contenue dans le vecteur gradient est de permettre d'étudier de façon très intrinsèque les variations d'une grandeur physique, au sens où il n'est pas nécessaire de préciser le système de coordonnées utilisé (nous allons examiner en détail plus loin les systèmes de coordonnées usuels). L'expression de la différentielle sous la forme (108) contient deux informations importantes :

- si l'on cherche à *minimiser* les variations locales de la fonction  $f$ , il faut suivre un chemin dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que  $\overrightarrow{dM}$  soit *perpendiculaire* à  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ . A des corrections d'ordre 2 près, on pourra alors affirmer que  $f$  est constante. Si l'on revient au cas particulier où  $f$  décrit la  $(n + 1)$ -ième coordonnée d'une surface, on suit ainsi localement une ligne de niveau, au sens des cartes IGN bien connues (par exemple la ligne de niveau d'altitude 150m dans le bois de l'Université...). On peut en principe reconstituer une ligne de niveau de proche en proche à condition bien sûr de tenir compte du fait que le gradient de  $f$  varie.

- si l'on cherche à rendre *extrémales* les variations locales de la fonction  $f$ , il faudra au contraire suivre un chemin dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que  $\overrightarrow{dM}$  *colinéaire* à  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ , seule façon de rendre extrémal un produit scalaire. Cette variation sera maximale positive dans le sens du gradient, et maximale négative dans le sens opposé. Ainsi le gradient pointe suivant la ligne de plus grande pente dans le cas géométrique : sur une surface bosselée arbitraire, si on lâche une bille sans vitesse initiale, celle-ci va suivre la courbe de plus grande pente obtenue en suivant le vecteur gradient.

Cette discussion est bien intrinsèque puisque les différents types de variations précédemment examinées ne peuvent pas dépendre du système de coordonnées choisi (la forme de la montagne sur laquelle vous marchez n'a que faire du choix de coordonnées que vous avez fait !). Cependant, dans de nombreuses situations, il est indispensable de fixer un système explicite de coordonnées, ce que nous allons faire dans la partie qui suit.

### 5.1.6 Différentielle du vecteur position, vitesse, accélération

Partant de l'expression (8), on a immédiatement

$$\overrightarrow{dM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z, \quad (113)$$

d'où l'on tire l'expression de la vitesse

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z. \quad (114)$$

De même, partant de

$$d\vec{v} = d\dot{x} \vec{u}_x + d\dot{y} \vec{u}_y + d\dot{z} \vec{u}_z, \quad (115)$$

on tire l'expression de l'accélération

$$\vec{a}(t) = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z \quad (116)$$

en coordonnées cartésiennes.

Ces deux expressions peuvent bien sûr également s'obtenir en utilisant le résultat (81).

## 5.2 Calcul intégral

### 5.2.1 Longueur d'une courbe

Sur une droite, un segment élémentaire est défini par le vecteur infinitésimal  $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x$ , de longueur  $dx$ . Considérons maintenant un segment  $[a, b]$ . En le décomposant en segment infinitésimaux, on peut donc définir sa longueur comme la somme infinie de ces longueurs infinitésimales, c'est-à-dire par l'intégrale

$$\mathcal{L} = \int_a^b dx = b - a \quad (117)$$

comme attendu.

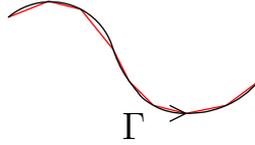


FIGURE 8 – Longueur d'un arc  $\Gamma$  comme intégrale curviligne, limite de la somme des longueurs de cordes d'arc (en rouge).

Plus généralement, considérons une courbe  $\Gamma$  du plan, et utilisons le même raisonnement. Sous certaines hypothèses (différentiabilité de la courbe), toute courbe  $\Gamma$  peut se décomposer en une somme infinie de segments de longueurs infinitésimales, comme illustré par la figure 8.

Ceci permet de définir la longueur de la courbe  $\Gamma$  comme la somme des longueurs de ces segments, et donc comme une intégrale, dite curviligne :

$$\mathcal{L} = \int_{\Gamma} ds \quad (118)$$

où  $ds$  est la longueur de l'arc élémentaire : c'est la norme de la différentielle du vecteur position  $d\vec{\ell}$  :  $ds = \|d\vec{\ell}\|$ .

Exercice :

Retrouvons la longueur d'un segment  $[AB]$  connaissant les coordonnées  $A(x_a, y_a)$  et  $B(x_b, y_b)$ .

1. Dans le plan, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit  $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ . En déduire l'expression de  $ds$ .

[**Corrigé** :  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .]

2. Justifier le fait que l'équation du segment peut s'écrire sous la forme paramétrique

$$x - x_a = t(x_b - x_a) \quad (119)$$

$$y - y_a = t(y_b - y_a) \quad (120)$$

avec  $t \in [0, 1]$ .

[**Corrigé** : Il suffit de traduire algébriquement le fait que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires, avec  $M$  entre  $A$  et  $B$ , ce qui s'écrit  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$  avec  $t \in [0, 1]$ , d'où l'expression proposée en projetant sur les axes  $x$  et  $y$ .]

3. Exprimer  $dx$  et  $dy$  en fonction de  $dt$  et en déduire une expression de  $ds$  en fonction de  $dt$ .

[Corrigé :

$$dx = (x_b - x_a)dt$$

$$dy = (y_b - y_a)dt$$

et donc  $dx = \sqrt{((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)dt}$  .]

4. En déduire le résultat cherché.

[Corrigé : Il reste à intégrer sur  $t$ , ce qui est immédiat :

$$\mathcal{L} = \int_{\Gamma} ds = \sqrt{((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)} \int_0^1 dt = \sqrt{((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)}$$

qui est bien le résultat attendu d'après le théorème de Pythagore.]

La définition (118) est bien sûr valable en n'importe quelle dimension, et n'est pas limitée aux coordonnées cartésiennes, comme nous le verrons plus loin. La seule difficulté est d'exprimer  $ds$ .

### 5.2.2 Intégrales multiples

L'intégrale de Riemann étudiée en 4.3.1 s'étend facilement au cas d'une intégrale double, pour une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble fermé et borné  $D \subset \mathbb{R}^2$  dont le bord  $\partial D$  est suffisamment régulier, par hypothèse  $C^1$  par morceau.

**Cas où  $D$  est un rectangle :**  $D = [a, b] \times [c, d]$ .

On considère alors une subdivision de ce rectangle par un ensemble  $\sigma_{nm}$  de  $nm$  rectangles  $I_i \times I_j$  de taille  $\frac{b-a}{n} \frac{c-d}{n}$  qui recouvrent  $D$ , où  $\{I_i\}$  est une partition de  $I = [a, b]$  et  $\{J_j\}$  est une partition de  $J = [c, d]$ , comme illustré par la figure 9.

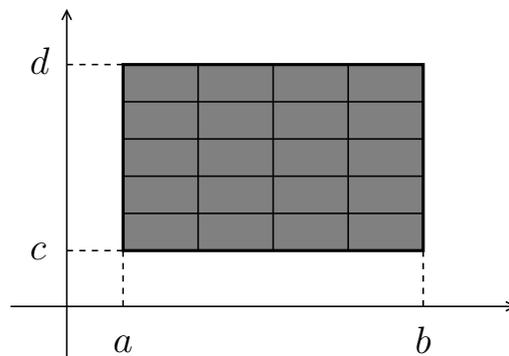


FIGURE 9 – Subdivision du rectangle  $[a, b] \times [c, d]$ .

**Définition :**

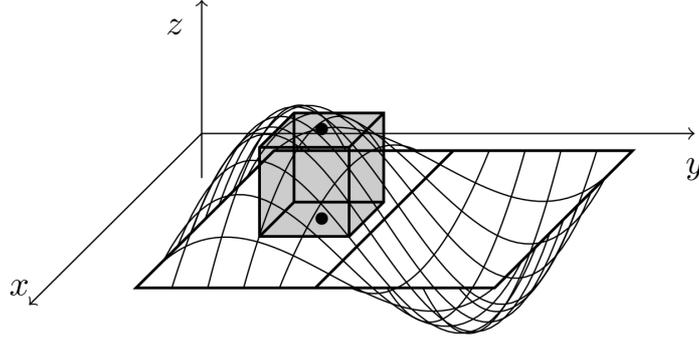


FIGURE 10 – Terme d’une somme de Riemann associée à une subdivision de  $[a, b] \times [c, d]$  et à des points  $\{(x_i, y_j)\}$ .

Soit  $\sigma_{nm} = \{I_i \times I_j\}$  une subdivision fixée de  $D = I \times J$ . Pour tout choix de point  $(x_i, y_j) \in I_i \times I_j$ , on appelle somme de Riemann de  $f$  associée à la subdivision  $\sigma_{nm}$  et aux points  $\{(x_i, y_j)\}$  la somme

$$R_n(f; \{(x_i, y_j)\}) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} f(x_i, y_j) \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \quad (121)$$

$$R_n(f; \{(x_i, y_j)\}) = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} f(x_i, y_j) \frac{(b-a)(d-c)}{nm} \quad (122)$$

où chaque terme  $f(x_i, y_j) \frac{(b-a)(d-c)}{nm}$  représente le volume algébrique du parallélépipède de base  $I_i \times I_j$  et de hauteur  $f(x_i, y_j)$ , avec le signe  $\pm$  qui dépend du signe de  $f(x_i, y_j)$ , comme illustré par la figure 10.

### Définition :

On dit que la fonction  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable selon Riemann si, en faisant varier la subdivision  $\sigma_{nm}$  de  $I \times J$ , et les points  $(x_i, y_j) \in I_i \times I_j$ , la limite

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} R_n(f; \{(x_i, y_j)\}) \quad (123)$$

existe, est finie, et ne dépend pas du choix des points  $(x_i, y_j) \in I_i \times I_j$ .

On appelle alors intégrale de Riemann cette limite

$$\iint_{I \times J} f(x) dx dy = \lim_{n, m \rightarrow \infty} R_{nm}(f; \{(x_i, y_j)\}). \quad (124)$$

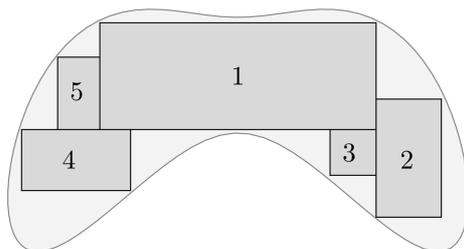


FIGURE 11 – Recouvrement d'un domaine compact  $D$  par un ensemble dénombrable de rectangles  $D_r$ .

Cette intégrale est le volume algébrique sous le graphe de  $f$ .

### Théorème :

Toute fonction continue sur  $D$  est intégrable au sens de Riemann.

### Propriétés :

L'intégration est linéaire : si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $D$ , alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f + \mu g$  l'est aussi, et

$$\iint_D (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) dx dy + \mu \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (125)$$

Si  $f(x, y) = 1$ , alors  $\iint_D f(x, y) dx dy = \text{Aire}(D)$ .

### Cas général :

Supposons que  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un ensemble compact (i.e. fermé, ce qui signifie qu'elle contient son bord, et borné, voir cours de topologie en math), avec un bord  $\partial D$  suffisamment régulier (disons de classe  $C^1$ ). Une façon de donner un sens à l'intégrale de  $f$  sur  $D$  est de considérer une famille dénombrable<sup>7</sup>  $\{D_r\}$  de rectangles fermés quasi-disjoints<sup>8</sup> qui couvre l'intérieur de  $D$ . On démontre en effet que cela est possible lorsque  $D$  est compact. Ceci est illustré par la figure 11

Alors on appelle intégrale de  $f$  sur  $D$  l'intégrale

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_r \iint_{D_r} f(x, y) dx dy. \quad (126)$$

7. C'est-à-dire que l'on peut étiqueter avec des entiers naturels.

8. Disjoints sauf sur leur bord.

On démontre que pour une fonction  $f$  continue, cette série est absolument convergente (voir cours de math sur les séries) et ne dépend pas du choix de la famille  $\{D_r\}$ .

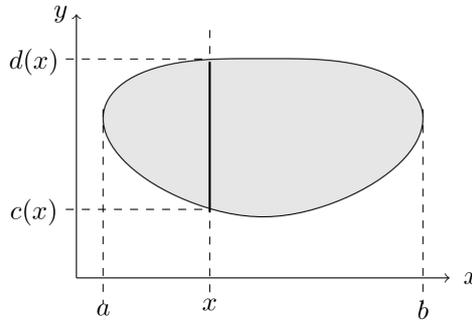


FIGURE 12 – Théorème de Fubini (version 1).

### Théorème de Fubini :

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1. Supposons que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]\} \quad (127)$$

où les deux courbes

$$\begin{aligned} \partial D^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], y = c(x)\} \\ \partial D^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], y = d(x)\} \end{aligned}$$

décrivent le bord de  $D$ , comme illustré par la figure 12.

Alors on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (128)$$

2. Supposons que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], x \in [a(y), b(y)]\} \quad (129)$$

où les deux courbes

$$\begin{aligned} \partial D^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c, d], x = a(y)\} \\ \partial D^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c, d], x = b(y)\} \end{aligned}$$

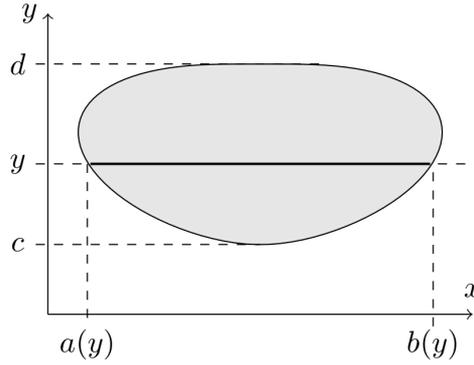


FIGURE 13 – Théorème de Fubini (version 2).

décrivent le bord de  $D$ , comme illustré par la figure 13.

Alors on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (130)$$

### Théorème de changement de variables :

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction des variables  $(x, y)$  intégrable sur  $D$ , et soit  $\phi : \tilde{D} \rightarrow D$  un  $C^1$ -difféomorphisme (i.e. de classe  $C^1$ , bijective, et telle que sa réciproque soit aussi de classe  $C^1$ ), où l'on note  $(x, y) = \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  et où  $\tilde{D} = \phi^{-1}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \in \pi(u, v)\}$ . On a alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} f(x(u, v), y(u, v)) |\det J_\phi(u, v)| du dv, \quad (131)$$

où

$$J_\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \quad (132)$$

$$(133)$$

est la *matrice jacobienne* du changement de variables.

*Preuve :*

D'après ce qui a été vu en 5.1.2 et 5.1.4, les éléments  $dx$  et  $dy$  se transforment

comme

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases} \quad (134)$$

i.e. comme

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_\phi(u, v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (135)$$

où  $J_\phi(u, v)$  est la matrice jacobienne de  $\phi$ . On utilisera également indifféremment la notation  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$  ou  $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ .

Examinons maintenant la façon dont l'élément  $dx dy$  se transforme. L'aire d'un rectangle infinitésimal de côtés  $dx$  et  $dy$ , peut s'écrire comme  $dx dy = \|dx \vec{u}_x \wedge dy \vec{u}_y\|$ . Sous transformation de coordonnées, ce rectangle devient un parallélogramme de côtés  $du \vec{u}_u$  et  $dv \vec{u}_v$  d'aire  $du dv = \|du \vec{u}_u \wedge dv \vec{u}_v\|$ .

La transformation inverse de (135) s'écrit

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = J_\phi(u, v)^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (136)$$

qui signifie

$$\begin{cases} du \vec{u}_u = \frac{\partial u}{\partial x} dx \vec{u}_x + \frac{\partial u}{\partial y} dy \vec{u}_y \\ dv \vec{u}_v = \frac{\partial v}{\partial x} dx \vec{u}_x + \frac{\partial v}{\partial y} dy \vec{u}_y \end{cases} \quad (137)$$

et donc

$$\begin{aligned} du dv &= \|du \vec{u}_u \wedge dv \vec{u}_v\| = \left\| \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx \vec{u}_x + \frac{\partial u}{\partial y} dy \vec{u}_y \right) \wedge \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx \vec{u}_x + \frac{\partial v}{\partial y} dy \vec{u}_y \right) \right\| \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right| = |\det J_\phi(u, v)^{-1}| dx dy \end{aligned} \quad (139)$$

et donc  $dx dy = |\det J_\phi(u, v)| du dv$ .

L'ensemble des résultats précédents, y compris le théorème de changement de variables, s'étend facilement aux intégrales mettant en jeu plus de 2 variables.

### 5.2.3 Aire d'une surface

Nous avons vu plus haut la signification de l'intégrale double d'une fonction sur un domaine  $D$  : c'est le volume algébrique sous le graphe de la fonction.

Dans le cas particulier où  $f(x, y) = 1$ , ce volume est simplement le produit de l'aire de  $D$  multipliée par la hauteur.

On en déduit donc que si  $D$  est un domaine bornée de  $\mathbb{R}^2$ , alors

$$\text{Aire}(D) = \iint dx dy. \quad (140)$$

Ceci se conçoit facilement : dans le plan, la surface d'un rectangle de côtés  $dx\vec{u}_x$  et  $dy\vec{u}_y$  est  $d^2S = dx dy$ . Toute surface pouvant toujours se décomposer en une somme infinie de rectangles élémentaires, son aire se définit naturellement par la relation (140). De façon plus intrinsèque, on écrira également

$$S = \iint d^2S. \quad (141)$$

Cette définition est bien sûr en accord avec le résultat classique basé sur l'intégrale unidimensionnelle de Riemann vue p.33 :

Si  $D$  est la portion du plan sous le graphe d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  positive, c'est-à-dire si

$$D = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\},$$

alors Aire( $D$ ) =  $\int_a^b f(x) dx$ . (142)

*Preuve :*

$$\text{Aire}(D) = \iint dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b [y]_0^{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Exercice :

Comme application immédiate, calculons la surface d'un disque de rayon  $R$ . Nous allons décomposer la surface du disque en bande verticale de largeur  $dx$ , située à l'abscisse  $x$ , comme illustré dans la figure 14. Leur hauteur est fonction de  $x$  :  $y$  varie dans l'intervalle  $[-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}]$ .

On aura donc

$$S = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx. \quad (143)$$

1. Effectuer le changement de variable  $x = R \sin \theta$  et préciser l'intervalle de variation de  $\theta$ .

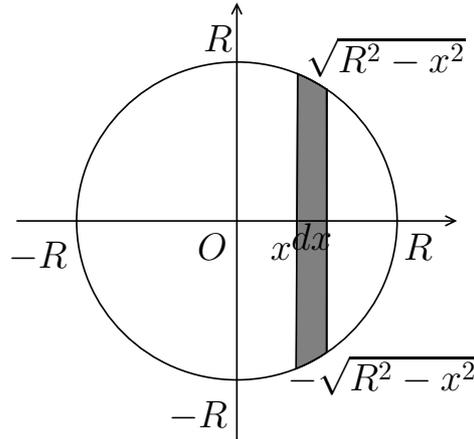


FIGURE 14 – Calcul de la surface d’un disque en coordonnées cartésiennes.

[**Corrigé** :  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $dx = R \cos \theta d\theta$ . D’autre part,  $R^2 - x^2 = R^2(1 - \sin^2 \theta) = R^2 \cos^2 \theta$  d’où, puisque  $\cos \theta$  est positif sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$S = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta .$$

]

2. Intégrer l’expression obtenue. On rappelle que

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} . \tag{144}$$

[**Corrigé** :

$$S = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = R^2 \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2 .$$

]

### 5.2.4 Volume

Dans l’espace, le volume d’un pavé droit élémentaire est donné par  $d^3V = dx dy dz$ .

Comme application, calculons le volume d’une sphère de rayon  $R$ . Pour cela, on la découpe en tranches d’épaisseurs  $dz$ , situées à l’altitude  $z$ , dont le rayon est donné par

$$r(z) = \sqrt{R^2 - z^2} \tag{145}$$

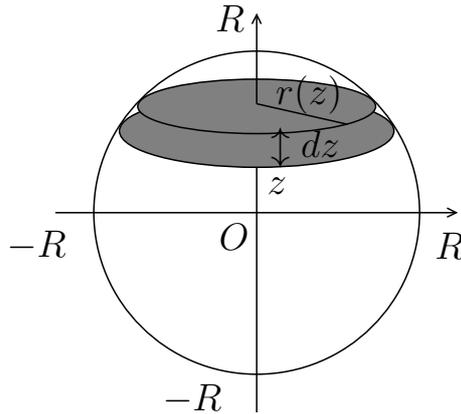


FIGURE 15 – Calcul du volume d’une sphère en coordonnées cartésiennes.

comme illustré par la figure 15. L’intégration sur  $x$  et  $y$  est alors immédiate, en utilisant le résultat connu de la surface d’un disque, qui permet d’écrire pour le volume de la tranche

$$dV = \pi r(z)^2 dz \quad (146)$$

On a donc finalement

$$V = \int_{-R}^R \pi r(z)^2 dz = \int_{-R}^R \pi (R^2 - z^2) dz = \pi \left[ 2R^3 - \frac{1}{3} [z^3]_{-R}^R \right] = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (147)$$

## 5.3 Coordonnées polaires

### 5.3.1 Définition

Ce système de coordonnées planaires consiste, une origine  $O$  (ou *pôle*) étant fixée, et un axe orienté arbitraire (l’axe des  $x$ ) passant par  $O$ , servant d’origine pour les angles ayant été choisi, à repérer la position d’un point  $M$  par sa distance au pôle  $\rho = OM$  et sa position angulaire  $\theta$ , qui mesure l’angle orienté  $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$ , comme illustré dans la figure 16.

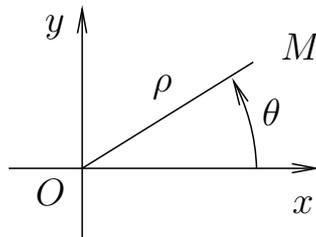


FIGURE 16 – Système de coordonnées polaires.

Un bon choix de  $O$  est déterminant dans de nombreux problèmes physiques, puisqu’il simplifie considérablement la description du système :

- mouvement elliptique d'une planète isolée autour d'une étoile,  $O$  étant le centre de masse du système (en général quasi confondu avec le centre de l'étoile vu les échelles de masses relatives), et l'un des foyers de cette ellipse
- plus généralement mouvement d'une masse autour d'une grande masse considérée comme fixe, située en  $O$ ; la trajectoire peut être une ellipse (ou une portion d'ellipse, comme dans la trajectoire suborbitale du premier vol habité américain d'Alan Shepard en 1961), une parabole ou une hyperbole
- mouvement d'un objet attaché à un ressort dont l'une des extrémités est fixe,  $O$  étant alors ce point fixe, et le mouvement une ellipse de centre  $O$
- mouvement d'une particule chargée dans le champ coulombien d'une autre (supposée immobile) située en  $O$ , quelle que soit les charges et le type de mouvement.

L'ensemble des situations précédentes fait partie du cas plus général en mécanique des mouvements à force centrale, dans lesquels le mouvement d'un point  $M$  est créé par un ensemble de force dont la résultante est dirigée suivant l'axe  $(OM)$ , où  $O$  est un point fixe, et dont l'intensité ne dépend que de la distance  $OM$ . On verra dans les cours de mécanique que le mouvement est alors plan, dans un plan contenant  $O$ .

- mouvement d'un pendule accroché à un point fixe  $O$
- mouvement d'une bille dans un plan vertical, sur un tonneau ou dans un tonneau,  $O$  étant l'intersection du plan et de l'axe du tonneau
- etc.

Bien évidemment, dans les exemples ci-dessus, tout autre choix de pôle est possible (la Nature s'en moque!) mais désastreux du point de vue pratique si l'on cherche à obtenir un résultat utilisable...

### Exercice :

Donner l'expression de  $x$  et  $y$  en fonction de  $\rho$  et  $\theta$ .

### **5.3.2 Base locale**

De façon générique, en dimension  $d$  le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est paramétré par un nombre  $d$  de paramètres ( $x, y, z$  en coordonnées cartésiennes,  $\rho$  et  $\theta$  ici en coordonnées polaires). La notation  $\vec{u}_{var}$  est utilisée en physique pour noter un vecteur unitaire pointant dans la direction suivant laquelle  $\overrightarrow{OM}$  varie lorsque seul le paramètre  $var$  varie, pointant dans le sens de  $var$  croissant. Dans le cas simple des coordonnées cartésiennes, on obtient ainsi les 3 vecteurs de base  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  lorsque l'on varie respectivement  $x, y$  et  $z$ . Ces trois vecteurs unitaires

sont fixes lorsque  $M$  se déplace.

Dans le cas des coordonnées polaires, on obtient ainsi  $\vec{u}_\rho$ , colinéaire à  $\overrightarrow{OM}$ , pointant dans le même sens que  $\overrightarrow{OM}$  (d'où le nom de vecteur unitaire radial pour  $\vec{u}_\rho$ ), et  $\vec{u}_\theta$ , orthogonal à la direction radiale, tel que l'angle  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ , lorsque l'on varie respectivement  $\rho$  et  $\theta$ . Rapporté au cercle trigonométrique de rayon 1,  $\vec{u}_\rho$  est donc simplement le rayon vecteur tandis que  $\vec{u}_\theta$  est le vecteur tangent au cercle, pointant dans le sens des  $\theta$  croissant. Ceci est illustré par la figure 17. Insistons sur le fait que cette base n'est pas fixe, puisqu'elle dépend du point  $M$ .

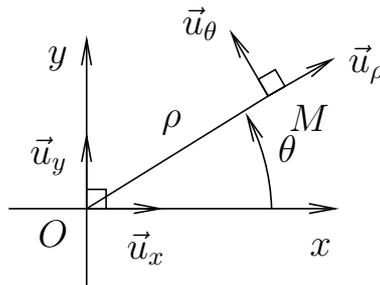


FIGURE 17 – Base locale en coordonnées polaires.

Exercice :

1. Ecrire les composantes de  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ .
2. Montrer alors que

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho.} \quad (148)$$

3. Peut-on prévoir sans calcul ces deux résultats ? Les directions sont faciles à prédire d'après ce qui a été vu en (89). Pour normaliser le résultat, il sera utile de se rappeler comment varie la longueur d'un arc de cercle de rayon donné avec l'angle d'ouverture de cet arc.

4. Supposons que  $\theta(t)$  soit une fonction du temps quelconque. Justifier le fait que

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho.} \quad (149)$$

### 5.3.3 Différentielle du vecteur position, vitesse, accélération

Dans la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ ,

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \rho \vec{u}_\rho. \quad (150)$$

Exercice :

1. En utilisant les résultats précédents, obtenir l'expression de la vitesse

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta} \quad (151)$$

puis celle de l'accélération

$$\boxed{\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta} \quad (152)$$

en coordonnées polaires.

2. Montrer que

$$\boxed{d\vec{\rho} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta}. \quad (153)$$

Réobtenir les résultats (151) et (152) à partir de cette différentielle du vecteur position.

3. En utilisant l'expression intrinsèque (108) reliant la différentielle d'une fonction au produit scalaire du gradient de cette fonction et de la différentielle du vecteur position, montrer que le gradient en coordonnées polaires s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta}. \quad (154)$$

### 5.3.4 Élément de surface élémentaire

En coordonnées polaire, l'élément de surface élémentaire, aire du domaine défini par  $\rho$  variant dans l'intervalle  $\rho$  et  $\rho + d\rho$  et  $\theta$  variant dans l'intervalle entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , comme illustré dans la figure 18, s'écrit

$$d^2S = \rho d\rho d\theta, \quad (155)$$

obtenu en formant le produit des normes des composantes de  $d\vec{r}$  donné par la relation (153).

Exercice :

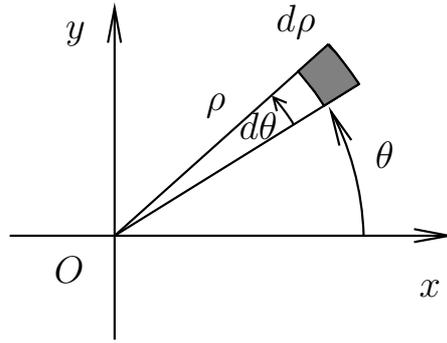


FIGURE 18 – Élément de surface élémentaire en coordonnées polaires.

Calculer à nouveau, cette fois en utilisant les coordonnées polaires, la surface d'un disque de rayon  $R$ . Ce calcul montre explicitement qu'un bon choix de coordonnées respectant les symétries du problème simplifie beaucoup les choses !

[Corrigé :

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, d\rho = 2\pi \left[ \frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^R = \pi R^2 .$$

]

La raison technique qui explique la simplicité de ce calcul est liée au fait que les intégrations sur  $\rho$  et sur  $\theta$  sont indépendantes, contrairement au cas des coordonnées cartésiennes conduisant à l'intégrale (143).

## 5.4 Coordonnées cylindriques

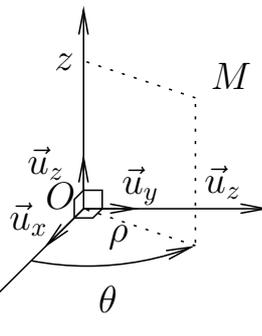


FIGURE 19 – Coordonnées cylindriques.

Ce système de coordonnées est une extension naturelle à 3 dimensions du système de coordonnées polaires, utile dans le cas où le système étudié possède une symétrie de révolution autour d'un axe, que l'on choisira alors comme axe  $z$ .

### 5.4.1 Définition

Un axe  $z$  orienté étant choisi (et donc un vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ ), et une origine arbitraire  $O$  sur cette axe fixée, on choisit un axe des  $x$  orienté (et donc un vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ ), dans le plan perpendiculaire à l'axe des  $z$ , contenant  $O$ . Ceci permet de fixer un système de coordonnées polaire dans ce plan, le vecteur  $\vec{u}_x$  déterminant l'origine des angles, notées  $\rho, \theta$  comme ci-dessus, auquel on ajoute une troisième coordonnée  $z$  mesurant l'altitude (algébrique) du point  $M$  considéré par rapport à ce plan d'altitude 0. Ceci est illustré dans la figure 19.

### 5.4.2 Base locale

Une base locale peut être définie en complétant celle introduite ci-dessus par le vecteur  $\vec{u}_z$ . Ceci est illustré par la figure 20.

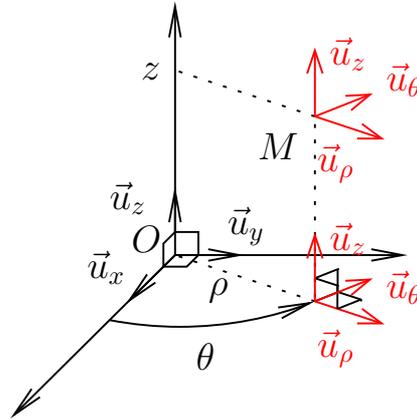


FIGURE 20 – Base locale en coordonnées cylindriques.

### 5.4.3 Vitesse, accélération

Dans la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ ,

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\rho} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z. \quad (156)$$

On en déduit immédiatement, en utilisant les résultats (151) et (152), les expressions de la vitesse

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z} \quad (157)$$

puis celle de l'accélération

$$\boxed{\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z} \quad (158)$$

en coordonnées cylindriques.

De façon immédiate, on tire également la différentielle du vecteur position

$$\boxed{\vec{dM} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z}, \quad (159)$$

et l'expression du gradient

$$\boxed{\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z}. \quad (160)$$

#### 5.4.4 Éléments de surface élémentaires et élément de volume

Les éléments de surface élémentaires, en mettant en indice la variable constante, s'écrivent

$$d^2 S_\rho = \rho d\theta dz \quad (161)$$

$$d^2 S_\theta = d\rho dz \quad (162)$$

$$d^2 S_z = \rho d\rho d\theta. \quad (163)$$

L'élément de volume infinitésimal s'écrit

$$d^3 V = d^2 S_\rho d\rho = d^2 S_\theta d\theta = d^2 S_z dz = \rho d\rho d\theta dz. \quad (164)$$

Exercice :

Comme application, calculer la surface  $S_{\text{cône}}$  et le volume  $V_{\text{cône}}$  d'un cône de révolution, d'axe  $z$ , de hauteur  $h$  et de demi-angle au sommet  $\alpha$ . On montrera que

$$S_{\text{cône}} = \frac{\pi r^2}{\sin \alpha} \quad (165)$$

et

$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \quad (166)$$

Etant donné les symétries du problème, il est naturel d'utiliser un système de coordonnées cylindriques, d'axe  $z$ , d'origine le sommet du cône, avec  $z$  pointant dans le sens d'ouverture du cône. On pourra s'aider de la figure 21 pour visualiser la décomposition du cône en tranches d'épaisseur  $dz$  à  $z$  donné.

[**Corrigé :** L'intersection du cône par un plan perpendiculaire à l'axe  $z$ , à l'altitude  $z$ , forme un cercle de rayon  $\rho(z) = z \tan \alpha$ .

1. La surface externe d'une tranche d'épaisseur  $dz$  vaut

$$dS = 2\pi \rho(z) dz \frac{1}{\cos \alpha}$$

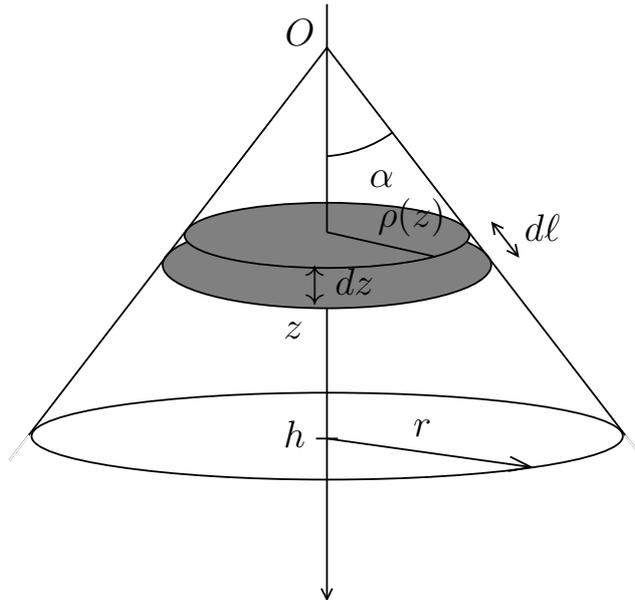


FIGURE 21 – Cône en coordonnées cylindriques.

puisque la largeur  $d\ell$  de cette bande extérieure vérifie  $d\ell \cos \alpha = dz$ . On a donc

$$S = 2\pi \int_0^h z dz \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} = \pi h^2 \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pi r^2}{\sin \alpha},$$

puisque  $\tan \alpha = \frac{h}{r}$ .

2. Le volume de cette tranche vaut

$$dV = \pi \rho(z)^2 dz = \pi z^2 dz \tan^2 \alpha$$

d'où

$$V = \pi \int_0^h z^2 dz \tan^2 \alpha = \frac{1}{3} \pi h^3 \tan^2 \alpha = \frac{h}{3} \pi r^2.$$

]

## 5.5 Coordonnées sphériques

Ce système de coordonnées est une extension naturelle à 3 dimensions du système de coordonnées polaires, utile dans le cas où le système étudié possède une symétrie sphérique, c'est-à-dire qu'il est symétrique par rapport à toute rotation d'axe arbitraire passant par un pôle fixe, que l'on choisira alors comme origine  $O$ .

### 5.5.1 Définition

Un pôle  $O$  servant d'origine du repère étant choisi (en lien avec la symétrie sphérique du système), et axe  $z$  orienté étant choisi arbitrairement (et donc un vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ ), on choisit un axe des  $x$  orienté (et donc un vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ ), dans le plan perpendiculaire à l'axe des  $z$ , contenant  $O$ .

La position d'un point  $M$  est alors repérée par la distance au pôle  $r = OM$ , par l'angle  $\varphi \in [0, 2\pi]$  entre  $\vec{u}_x$  et le vecteur  $\overrightarrow{OM'}$ , projection de  $\overrightarrow{OM}$  dans le plan contenant  $O$  et orthogonal à l'axe  $z$ , et enfin par l'angle  $\theta \in [0, \pi]$  entre  $\vec{u}_z$  et  $\overrightarrow{OM}$ , comme illustré sur la figure 22.

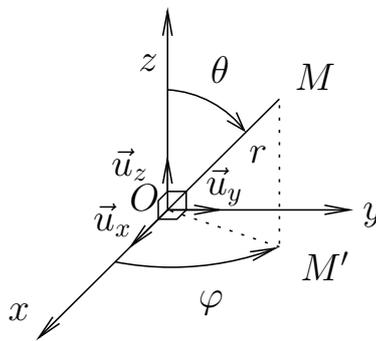


FIGURE 22 – Coordonnées sphériques.

#### Exercice :

Donner l'expression de  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction de  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

[Corrigé :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

]

### 5.5.2 Base locale

On construit une base locale  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$  en construisant les vecteurs unitaires obtenus par variation infinitésimale de  $\overrightarrow{OM}$  lorsqu'on augmente respectivement  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . Comme dans le cas des coordonnées cylindriques, cette base est locale : elle dépend des coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  du point  $M$ . Ceci est illustré par la figure 23. Dans cette base, on a en particulier  $\vec{r} = r \vec{u}_r$ .

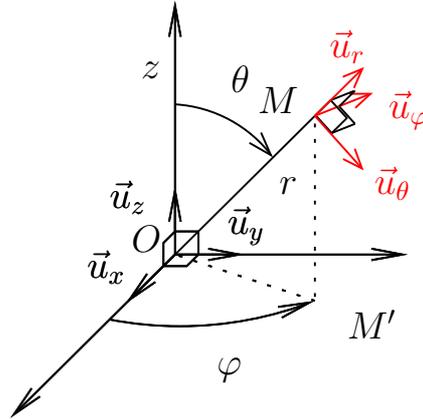


FIGURE 23 – Base locale en coordonnées sphériques.

Exercice :

1. Vérifier que l'expression de  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  dans la base  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ , en fonction de  $\theta$  et  $\varphi$  est donnée par

$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que

$$d\vec{u}_r = d\theta \vec{u}_\theta + \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \quad (167)$$

$$d\vec{u}_\theta = -d\theta \vec{u}_r + \cos \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \quad (168)$$

$$d\vec{u}_\varphi = -\sin \theta d\varphi \vec{u}_r - \cos \theta d\varphi \vec{u}_\theta. \quad (169)$$

3. En déduire que

$$\boxed{d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi.} \quad (170)$$

4. Montrer que le gradient s'écrit

$$\boxed{\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi.} \quad (171)$$

5. Montrer que la vitesse s'écrit

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi. \quad (172)$$

4. Calculer la différentielle de  $\vec{v}$  et en déduire l'expression de l'accélération

$$\begin{aligned} \vec{a} = & [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta] \vec{u}_r + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta] \vec{u}_\theta \\ & + [2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta + r\ddot{\varphi} \sin \theta] \vec{u}_\varphi. \end{aligned} \quad (173)$$

### 5.5.3 Éléments de surface élémentaires et élément de volume

L'élément de surface à  $r$  constant s'écrit

$$d^2 S_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (174)$$

et l'élément de volume s'écrira donc

$$d^3 V = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (175)$$

Exercice :

Retrouver la surface

$$S_{\text{sphère}} = 4\pi R^2 \quad (176)$$

et le volume

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (177)$$

d'une sphère de rayon  $R$  en utilisant les coordonnées sphériques.

[**Corrigé :** Il est évident qu'en raison des symétries de la sphère, utiliser un système de coordonnées sphériques d'origine le centre de la sphère va simplifier considérablement le problème, en comparaison du calcul mené en 5.2.4 pour le volume.

1. La surface d'une sphère vaut

$$S_{\text{sphère}} = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 [-\cos \theta]_0^\pi 2\pi = 4\pi R^2. \quad (178)$$

2. On décompose la sphère en pelures emboîtées, d'épaisseurs  $dr$  situés à la distance  $r$  de  $O$ . En utilisant le résultat précédent, le volume d'une de ces pelures est  $dV = S(r)dr$  donc  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Par intégration immédiate on a donc

$$V_{\text{sphère}} = \int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (179)$$

]

On notera que l'on a la relation  $dV(r) = S(r)dr$ . Cette relation est générale, puisqu'à 2d, on a pour le périmètre et la surface du disque,  $p_{\text{disque}}(r) = 2\pi r$  et  $S_{\text{disque}}(r) = \pi r^2$  et donc bien  $dS = p(r)dr$ . Cette relation est générale, et valable en toute dimension.

## 6 Circulation, flux et théorèmes fondamentaux

### 6.1 Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe

Nous avons plus haut, sur le cas (118) de la longueur d'une courbe, un exemple d'intégrale curviligne. Plus généralement, un champ vectoriel  $\vec{A}$  étant donné, la circulation élémentaire de  $A$  entre deux points infiniment voisins  $M$  et  $M'$  est donnée par

$$\delta\mathcal{C} = \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (180)$$

et la circulation entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  le long de la courbe  $\Gamma$  est alors par définition

$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}, \quad (181)$$

comme illustré dans la figure 24.

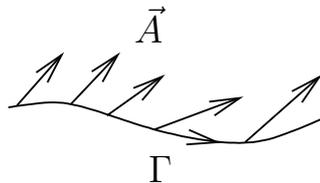


FIGURE 24 – Circulation d'un champ  $\vec{A}$  le long d'une courbe  $\Gamma$ .

Dans le cas où le chemin  $\Gamma$  est fermé, on utilisera en général la notation

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}. \quad (182)$$

Le lecteur attentif aura remarqué l'utilisation d'un  $\delta$  et non d'un  $d$  droit pour la circulation élémentaire (180). Cette notation est utilisée pour signifier le fait que la circulation  $\mathcal{C}$  dépend a priori du chemin suivi  $\Gamma$  pour aller de  $M_1$  à  $M_2$ , ce qui a une conséquence sur la nature même de la circulation élémentaire  $\delta\mathcal{C}$  sur laquelle nous allons revenir dans ce qui suit.

Une utilisation immédiate de ce concept est fourni par le travail d'une force  $\vec{F}$  a priori non constante, le long d'un chemin  $\Gamma$  permettant d'aller d'un point  $A$  à un point  $B$ . Dans de nombreux cas, ce travail dépend du chemin suivi (le contraire est l'exception!) : pensez par exemple au travail d'une force de frottement, et pour fixer la pensée, au travail de la force de frottement du tableau sur la craie. Suivre un chemin fermé en partant d'un point  $A$  pour y revenir peut se faire par exemple soit en ne bougeant pas la craie, soit en faisant un vague gribouillis donnant lieu à un important dépôt de craie : le travail n'est évidemment pas le même...

Une telle situation se rencontre en thermodynamique, où l'on prend bien garde de noter  $\delta W$  et  $\delta Q$  les quantités de travail et de chaleur reçues par un système.

## 6.2 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface

Passant d'une courbe à une surface, dans de nombreuses situations il est utile de calculer le *flux* d'un champ vectoriel à travers une surface  $S$ , qu'elle soit ouverte, avec un bord noté  $\partial D$ , ou fermée.

Deux exemples permettent de comprendre comment définir ce concept :

- lorsque la pluie tombe, vaut-il mieux s'allonger par terre ou de tenir droit comme un I pour être le moins mouillé possible ?
- pourquoi planter la vigne sur les coteaux exposés au sud, et pourquoi l'alternance des saisons ?

Dans les deux cas, il est clair que la réponse est liée à la notion de surface apparente par rapport à la direction de propagation, dans un cas des gouttes (techniquement, du vecteur densité de courant  $\vec{j} = \mu\vec{v}$ , voir cours de mécanique des fluides), dans l'autre du rayonnement solaire (techniquement, du vecteur de Poynting, voir cours d'électromagnétisme). Il est donc naturel de définir cette surface apparente comme le produit de la surface d'exposition par le cosinus de l'angle entre la normale à la surface et la direction du phénomène considéré (puisque ce cosinus vaut 1 quand la surface est normale à la direction du phénomène, et nul lorsqu'elle est tangentielle).

Un champ vectoriel  $\vec{A}$  étant donné, on définit donc le flux à travers une surface élémentaire  $d^2\vec{S} = d^2S \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface, d'aire  $d^2S$ , par

$$d^2\Phi = \vec{A} \cdot d^2\vec{S} = \|\vec{A}\| d^2S \cos \theta, \quad (183)$$

comme illustré sur la figure 25.

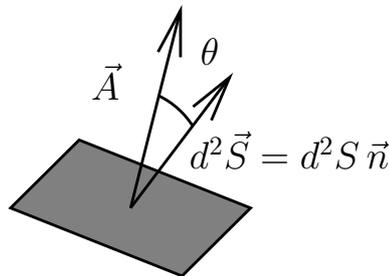


FIGURE 25 – Flux élémentaire d'un champ  $\vec{A}$  à travers une surface de d'aire  $d^2S$  et de normale  $\vec{n}$ .

### 6.3 Extensions du théorème fondamental du calcul intégral

Nous avons vu dans la partie 4.3 que l'intégrale d'une fonction sur un intervalle est égale à la différence des valeurs d'une primitive quelconque de cette fonction entre les deux bords de l'intervalle.

Plus généralement, la question se pose d'intégrer une fonction définie sur un ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ . La réponse générale est donnée par le théorème de Stokes, dont la formulation fait appel à la notion de différentielle extérieure (voir cours de math avancés). Nous nous contenterons de donner ici le résultat pour  $n = 2$  et  $n = 3$ .

#### Théorème de Green-Riemann

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy, \quad (184)$$

où  $D$  est une surface fermée de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\partial D$  sa frontière.

*Preuve :*

Considérons le cas d'une surface  $S \subset \mathbb{R}^2$  plane et compacte, de la forme

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\} \quad (185)$$

de bord  $\partial S = \gamma \cup \delta$  où

$$\gamma = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y = c(x)\} \quad \text{et} \quad \delta = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y = d(x)\}. \quad (186)$$

La même surface peut aussi être décrite comme

$$S = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\} \quad (187)$$

de bord  $\partial S = \alpha \cup \beta$  où

$$\alpha = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, x = a(y)\} \quad \text{et} \quad \beta = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, x = b(y)\}. \quad (188)$$

On se référera à la figure 26 pour ces deux descriptions.

Partons de

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (189)$$

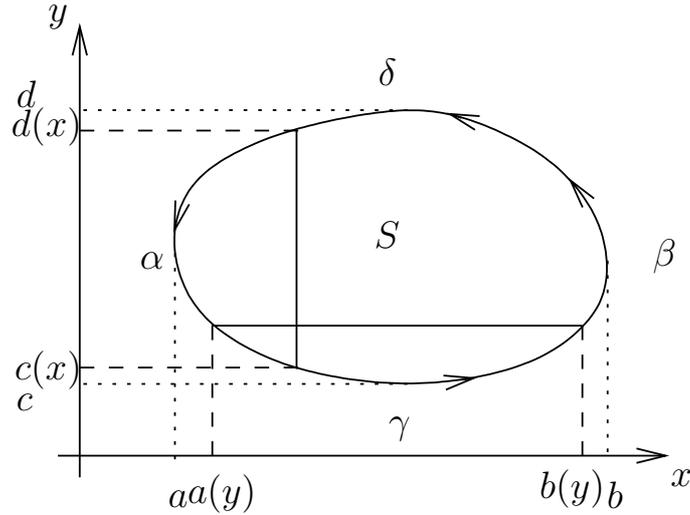


FIGURE 26 – Surface  $S$  pour le théorème de Green-Riemann.

En utilisant le théorème de Fubini on a

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (190)$$

$$= \int_c^d [Q(b(y), y) - Q(a(y), y)] dy \quad (191)$$

$$= \int_\beta Q(x, y) dy + \int_\alpha Q(x, y) dy = \oint_{\partial S} Q(x, y) dy. \quad (192)$$

En procédant de la même façon, on obtient

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \quad (193)$$

$$= \int_a^b [P(x, d(x)) - P(x, c(x))] dx \quad (194)$$

$$= - \int_\delta P(x, y) dx - \int_\gamma P(x, y) dx = - \oint_{\partial S} P(x, y) dx, \quad (195)$$

ce qui achève la preuve, en admettant que toute surface plane suffisamment régulière puisse s'écrire comme la réunion quasi-disjointe de surfaces du type  $S$ .

### Théorème de Kelvin-Stokes (appelé aussi théorème de Stokes) :

Le flux du rotationnel d'un champ à travers une surface  $D$  est égal à la circu-

lation du champ sur sa frontière  $\partial D$  :

$$\iint_D \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d^2 \vec{S} = \oint_{\partial D} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}, \quad (196)$$

où le *rotationnel* du champ  $\vec{A}$  est défini par

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (197)$$

et mesure le caractère tourbillonnant du champ  $\vec{A}$ .

Le choix d'orientation de la surface détermine le choix d'orientation de la frontière, suivant la règle de la main droite : le pouce pointant dans le sens choisi pour le flux à travers  $D$ , la frontière est orientée dans le sens indiqué par les quatre autres doigts.

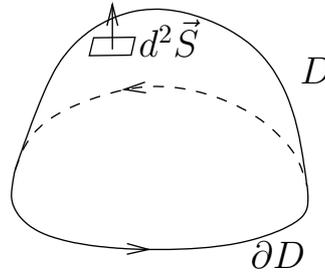


FIGURE 27 – Orientation de la surface  $D$  et de sa frontière  $\partial D$ .

Ce théorème est une conséquence du théorème de Green-Riemann. Il trouve de nombreuses applications en électromagnétisme (équation de Maxwell-Ampère, équation de Maxwell-Faraday et induction électromagnétique) et en mécanique des fluides.

Donnons ici les expressions du rotationnel dans les trois systèmes de coordonnées que nous avons décrits plus haut.

Rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left[ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] \vec{u}_x + \left[ \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right] \vec{u}_y + \left[ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right] \vec{u}_z, \quad (198)$$

qui s'obtient de façon immédiate en partant de la définition (197).

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_\rho + \left[ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \vec{u}_\theta + \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z, \quad (199)$$

qui s'obtient (le faire en exercice !) en partant de l'expression (160) du gradient.

Rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} \right] \vec{u}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \vec{u}_\theta \\ &+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (200)$$

qui s'obtient (le faire en exercice !) en partant de l'expression (171) du gradient.

Exemple illustrant le fait que le rotationnel mesure la caractère tourbillonnant d'un champ : on vérifie facilement qu'en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\rho = 0 \quad (201)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_z}{\rho} \quad (202)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z = 0. \quad (203)$$

$$(204)$$

## Théorème de Green-Ostrogradsky

Le flux d'un champ à travers une surface fermée  $\partial V$  délimitant un volume  $V$  (la normale à chaque élément de surface infinitésimal de  $\partial V$  étant orientée vers l'extérieur) est égal à l'intégrale sur le volume  $V$  de la divergence de ce champ :

$$\iint_{\partial V} \vec{A} \cdot d^2 \vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} d^3 \vec{x}, \quad (205)$$

où la *divergence* du champ  $\vec{A}$  est définie par

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (206)$$

Ce théorème correspond au cas particulier  $n = 2$  du théorème de Stokes. Il trouve à nouveau de nombreuses applications en électromagnétisme (équation de Maxwell-Gauss donnant un lien entre flux du champ électrique à travers

une surface et charges entourées par la surface, équation de Maxwell-Thomson décrivant l'absence de monopôles magnétiques) et en mécanique des fluides.

Donnons ici les expressions de la divergence dans les trois systèmes de coordonnées que nous avons décrits plus haut.

Divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial A_y}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{u}_z,} \quad (207)$$

qui s'obtient de façon immédiate en partant de la définition (206).

Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (208)$$

qui s'obtient assez facilement (le faire en exercice!) en partant de l'expression (160) du gradient.

Divergence en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 A_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}, \quad (209)$$

qui s'obtient (le faire en exercice!) en partant de l'expression (171) du gradient.

## 6.4 Champ à circulation conservative

### 6.4.1 Le point de vue intégral

(1) Par définition, un champ  $\vec{A}$  est à circulation conservative si et seulement si pour tout couple de points  $M_1$  et  $M_2$ , sa circulation entre  $M_1$  et  $M_2$  ne dépend pas du chemin suivi.

(2) Définition équivalente : un champ  $\vec{A}$  est à circulation conservative si et seulement si sa circulation sur tout contour fermé est nulle.

*Preuve :*

Le sens (1)  $\Rightarrow$  (2) est immédiat puisque la circulation sur un chemin fermé de point de base  $M$  ne dépendant pas du chemin suivi, il suffit de considérer le contour ponctuel de longueur nulle de  $M$  à  $M$  pour conclure.

Dans le sens (2)  $\Rightarrow$  (1), soit  $\vec{A}$  un champ dont la circulation est nulle sur tout contour fermé. Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux points quelconques, et deux chemins  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  entre  $M_1$  et  $M_2$ . On a donc, en notant  $-\Gamma_1$  le chemin inverse au chemin  $\Gamma_1$  (i.e. parcouru dans le sens inverse)

$$\mathcal{C}_{M_1M_2}(\Gamma_1) + \mathcal{C}_{M_2M_1}(-\Gamma_1) = 0 \quad (210)$$

On en tire immédiatement le fait que

$$\mathcal{C}_{M_1M_2}(\Gamma_1) = \mathcal{C}_{M_1M_2}(\Gamma_1). \quad (211)$$

**Théorème :**

Dans un domaine connexe donné, un champ de vecteur est à circulation conservative si et seulement si cette circulation entre deux points quelconques  $M_1$  et  $M_2$  est égale à la différence des valeurs que prend une même fonction entre ces points.

*Preuve :*

S'il existe une fonction telle que pour tous points  $M_1$  et  $M_2$ , la circulation du champ de vecteur est égale à la différence de cette fonction entre ces deux points, elle est de façon évidente conservative, puisque le chemin suivi n'intervient pas dans cette différence.

Examinons à présent la réciproque. Choisissons donc un point  $O$  arbitraire dans le domaine. Par connexité, et par hypothèse de circulation conservative, on a donc

$$\mathcal{C}_{M_1M_2} = \mathcal{C}_{M_1O} + \mathcal{C}_{OM_2} \quad (212)$$

sans avoir à préciser les chemins entre  $M_1$  et  $O$  d'une part,  $O$  et  $M_2$  d'autre part. La circulation  $\mathcal{C}_{M_1O}$  ne dépendant que des coordonnées de  $M_1$  et  $O$ , on peut poser symboliquement

$$\mathcal{C}_{M_1O} = \Psi(M_1, O) \quad (213)$$

et de même

$$\mathcal{C}_{OM_2} = \Psi(O, M_2). \quad (214)$$

En fixant l'origine  $O$  une fois pour toutes, on peut poser  $\Psi(O, M) = \varphi(M)$ . D'autre part, comme  $\Psi(M_1, O) + \Psi(O, M_1) = 0$  (circulation sur un contour fermé revenant en  $M_1$ ), on a  $\Psi(M_1, O) = -\phi(M_1)$  et  $\Psi(O, M_2) = \phi(M_2)$  d'où finalement le résultat cherché, sous la forme

$$\boxed{\mathcal{C}_{M_1 M_2} = \phi(M_2) - \phi(M_1)} . \quad (215)$$

En physique, une telle situation arrive très fréquemment. Citons par exemple :

- champ électrique  $\vec{E}$  dans le cas où les charges sont fixes dans le référentiel d'étude : c'est le cadre de l'électrostatique. Dans ce cas, la circulation de  $\vec{E}$  est conservative.

- force  $\vec{F}$  dont le travail

$$W_{\vec{F}}(M_1 M_2) = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (216)$$

ne dépend pas du chemin suivi.

Dans ces deux situations,  $\phi$  est bien défini. Conventionnellement, dans le cas de l'électrostatique,  $U = -\phi$  (potentiel électrostatique), et donc

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = U(M_1) - U(M_2) . \quad (217)$$

Dans le cas de la mécanique,  $E_p = -\phi$  (énergie potentielle), et donc

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = E_p(M_1) - E_p(M_2) . \quad (218)$$

On notera le fait que la définition de  $\phi$  dépend du choix de l'origine  $O$ , de sorte que  $\phi$  est défini à une constante additive près, qui n'a pas de conséquences physiques.

#### 6.4.2 Le point de vue local : champ dérivant d'un potentiel

La discussion précédente peut être formulée entièrement localement.

En premier lieu, si le champ  $\vec{A}$  est à circulation conservative, l'existence d'un potentiel  $\phi$  s'écrit dans la limite  $M_2 \rightarrow M_1$ , i.e. en notant  $d\vec{\ell} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ ,

$$\delta\mathcal{C}_{M_1 M_2} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} \quad (219)$$

et donc, puisque par définition  $\delta\mathcal{C}_{M_1 M_2} = \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ ,

$$\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi , \quad (220)$$

où l'on a utilisé le fait que par hypothèse, on peut s'approcher du point  $M_1$  suivant n'importe quelle direction. On peut ainsi affirmer que le champ  $\vec{A}$  dérive d'un potentiel (au sens où la relation (220) permet de passer de  $\phi$  à  $\vec{A}$  par action de l'opérateur différentiel  $\text{grad}$ ). Par ailleurs, en utilisant la relation (108), on en déduit que la forme différentielle  $\delta\mathcal{C}$  est une différentielle : c'est la différentielle de  $\phi$  :

$$d\mathcal{C} = d\phi = \overrightarrow{\text{grad}}\phi \cdot d\vec{\ell}. \quad (221)$$

Conclusion :

Un champ  $\vec{A}$  est à circulation conservative si et seulement si c'est un champ de gradient, i.e. s'il existe  $\phi$  tel que  $\vec{A} = \text{grad}\phi$ .

### 6.4.3 Forme différentielle et différentielle : lemme de Poincaré et intégration des formes différentielles

Nous sommes à présent en mesure de répondre à la question dans quel cas, une forme différentielle  $\delta F$  étant donnée, il existe une fonction  $\phi$  telle que  $\delta F$  soit égale à la différentielle de  $\phi$ . Au vu de ce qui a été expliqué ci-dessus, ce problème est équivalent à tenter de trouver, pour un champ  $\vec{A}$  donné, un potentiel dont il dérive.

Pour fixer les idées, plaçons-nous en deux dimensions, avec

$$\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y \quad (222)$$

où  $A_x(x, y)$  et  $A_y(x, y)$  sont deux fonctions données, a priori quelconques, ou de façon équivalente,

$$\delta F = A_x dx + A_y dy. \quad (223)$$

Nous cherchons à quelle condition il existe  $\Phi$  telle que  $\vec{A} = \text{grad}\phi$  ou de façon équivalente telle que  $\delta F = d\phi$ . D'après le théorème de Schwarz (99), une condition nécessaire est que les dérivées croisées soient identiques, c'est-à-dire dans le cas présent :

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} \quad (224)$$

ou encore

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0. \quad (225)$$

Si l'on considère un champ tridimensionnel, on aura alors deux conditions supplémentaires d'annulation pour les couples de variables  $(y, z)$  et  $(x, z)$ , qui

ne sont rien d'autre qu'une condition d'annulation du rotationnel de  $\vec{A}$ , d'après l'expression (198).

Lorsque les conditions imposées par le théorème de Schwarz sont satisfaites par la forme différentielle  $\delta F$ , on dit que la forme est **fermée**.

S'il existe une fonction  $\phi$  telle que  $\delta F = d\phi$ , on dit que  $\delta F$  est **exacte**. On utilise souvent également en physique la terminologie de « différentielle totale exacte ». De façon évidente, une différentielle totale est fermée.

Avant d'examiner la réciproque, nous devons introduire quelques notions élémentaires de topologie.

### **Connexité :**

Un ensemble  $E$  est connexe (par arc) si l'on peut tracer un arc continu formé de points de  $E$  joignant deux points de cet ensemble (on peut définir en topologie la notion un peu plus générale de connexité, sans référence à la notion d'arc et donc de points, voir cours de math).

*Exemples :*  $\mathbb{R}^n$ , une sphère, une boule, un tore (i.e. la surface d'une chambre à air) sont connexes par arc. En revanche l'ensemble constitué de deux sphères disjointes n'est pas connexe.

### **Simple connexité :**

Cette notion est plus fine : un espace  $E$  sera simplement connexe si et seulement si tout chemin fermé (boucle dans  $E$  allant d'un point  $A$  à  $A$  : on parle de lacet en mathématiques) peut être contracté en un lacet constant (c'est à un point).

*Exemples :*  $\mathbb{R}^n$ , une sphère, une boule, un pavé, sont simplement connexes. En revanche, un tore (voir figure 28), ou la surface d'une tasse à café avec son anse, ou encore le plan  $\mathbb{R}^2$  privé d'un point ne sont pas simplement connexes. Dans l'exemple du plan privé d'un point, tout lacet faisant au moins un tour de ce point n'est pas contractile, alors que tout lacet n'en faisant pas le tour est contractile (l'ensemble de ces notions entre dans le cadre de l'homotopie, très importante en mathématiques comme en physique théorique ; vous aborderez cela... dans longtemps!).

Revenons à notre problème : montrons qu'une forme fermée sur un domaine simplement connexe définit via des composantes un champ à circulation conser-

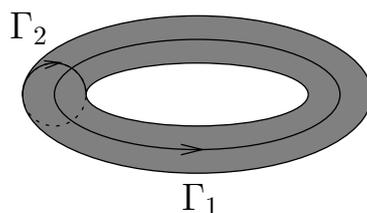


FIGURE 28 – Le tore  $\mathbb{T}^2$  à un trou n'est pas simplement connexe : par exemple les lacets  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ne sont pas contractiles en un lacet constant, et ne sont d'ailleurs pas contractiles l'un en l'autre.

vative.

Les versions bidimensionnelles (théorème de Green-Riemann (184)) ou tridimensionnelle (théorème de Kelvin-Kelvin-Stokes (196)) du théorème général de Stokes permettent alors de conclure, en supposant que le domaine sur lequel le champ (ou la forme différentielle) est simplement connexe. En effet, voir (184) ou (196), on constate immédiatement que la circulation du champ sur tout chemin fermé arbitraire est nulle, en passant du membre de droite au membre de gauche de ces deux résultats :

- dans le cas 2d, voir (184), le membre de gauche s'annule puisque la différence des termes croisés est nulle.
- dans le cas 3d, voir (196), le flux à travers toute surface s'appuyant sur le lacet considéré s'annule, par annulation du rotationnel. Il suffit en effet de considérer une surface quelconque s'appuyant sur le lacet.

La seule difficulté est de pouvoir considérer l'ensemble du domaine  $D$  entouré par le lacet (cas 2d) ou (cas 3d) d'appuyer une surface sur le lacet sur laquelle le champ est défini partout : il ne doit donc pas y avoir de trou dans ces deux surfaces, d'où l'exigence de simple connexité.

Le champ est donc à circulation conservative, et il existe donc, d'après le résultat établi plus haut, un gradient dont dérive ce champ. Ce résultat important se résume ainsi :

### Lemme de Poincaré :

Si une forme différentielle définie sur un domaine simplement connexe est fermée, alors elle est exacte.

Il est instructif de démontrer directement ce résultat sans passer par le concept de circulation conservative. Afin d'alléger les notations, on écrira génériquement

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Considérons une forme différentielle

$$\delta F = p dx + q dy \quad (226)$$

définie sur  $[a, b] \times [c, d]$ , fermée, qui vérifie donc  $p_y = q_x$ . La fonction  $\phi$  telle que  $d\phi = \delta F$  doit donc vérifier  $\phi_x = p$  et  $\phi_y = q$ .

Par intégration immédiate, on a donc

$$\phi(x, y) = \int_{\alpha}^x p(t, y) dt + h(y). \quad (227)$$

Puis

$$q(x, y) = \phi_y(x, y) = \int_{\alpha}^x p_y(t, y) dt + h'(y) = \int_{\alpha}^x q_x(t, y) dt + h'(y) = q(x, y) - q(\alpha, y) + h'(y) \quad (228)$$

et donc  $q(\alpha, y) = h'(y)$  soit

$$h(y) = \int_{\beta}^y q(\alpha, u) du \quad (229)$$

d'où finalement

$$f(x, y) = \int_{\alpha}^x p(t, y) dt + \int_{\beta}^y q(x, u) du, \quad (230)$$

où l'on a arbitrairement choisi un point  $M_0(\alpha, \beta) \in [a, b] \times [c, d]$  où  $f(x, y)$  s'annule.

La généralisation à un domaine simplement connexe se fait par continuité. Le point clef est de pouvoir définir la valeur de  $\phi$  en tout point  $M$  en fonction d'une valeur arbitraire fixée en un point quelconque  $M_0$  du domaine, en suivant un chemin arbitraire joignant  $M_0$  à  $M$ . La différentielle de la fonction ainsi construite est alors bien égale à  $\delta F$  en tout point  $M$  car le fait que le domaine soit simplement connexe permet d'explorer le voisinage de ce point  $M$  et d'appliquer le théorème de Green pour extraire les dérivées partielles dans les différentes directions.

Exercices :

Déterminer, lorsqu'elles existent, les fonctions dont dérivent les champs suivants :

1.

$$\vec{E} = 2xy \vec{u}_x + (x^2 - y^2) \vec{u}_y.$$

[Corrigé :  $f(x, y, z) = xyz + \text{constante}$ .]

2.

$$\vec{E} = y \vec{u}_x + z \vec{u}_y + y \vec{u}_z.$$

[Corrigé : Ce n'est pas un champ de gradient, car les conditions de Schwarz ne sont pas satisfaites.]

3.

$$\vec{E} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z.$$

[Corrigé :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \text{constante} = \frac{1}{2}r^2 + \text{constante}$$

correspondant à  $\vec{E} = r \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques.]

4.

$$\vec{E} = \frac{x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

[Corrigé :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \text{constante} = \ln r + \text{constante}$$

dont l'obtention directe est facile en utilisant les coordonnées sphériques.]

*Remarques :*

On prendra garde à l'utilisation du Lemme de Poincaré, qui peut être subtile :

- dans certains cas (comme on le voit dans l'exercice 4. ci-dessus, où le champ est singulier en  $r = 0$ ), le domaine peut n'être pas simplement connexe, ce qui n'interdit pas pour autant que le champ puisse être à circulation conservative et donc dériver d'un potentiel (toujours dans l'exemple 4. ci-dessus, ce champ dérive d'un potentiel, lui-même singulier en  $r = 0$ ).

- le rotationnel d'un champ peut être nul, tout en n'assurant pas l'existence qu'un potentiel dont dériverait ce champ, le domaine considéré n'étant pas simplement connexe.

Exemple : en coordonnées cylindriques, le champ

$$\vec{A} = \frac{\vec{u}_\theta}{\rho} \quad (231)$$

a pour rotationnel, en tout point de  $\mathbb{R}^2$  distinct de l'origine,

$$\text{rot } \vec{A} = 0. \quad (232)$$

Sur un domaine ne contenant pas l'origine, et simplement connexe, le lemme de Poincaré assure l'existence d'un potentiel dont dérive ce champ.

En effet, en utilisant la fonction

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos x \end{aligned} \quad (233)$$

dérivable sur  $] - 1, 1[$ , dont la dérivée est

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (234)$$

on peut définir, sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , l'angle polaire usuel par la relation

$$\theta(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pour } y \leq 0 \quad (235)$$

$$\theta(x, y) = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pour } y > 0, \quad (236)$$

qui définit une fonction sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , à valeur dans  $] - \pi, \pi]$ . Elle est continue sur  $\mathbb{R}^2$  privé de l'axe  $] - \infty, 0]$ . Sur l'axe  $] - \infty, 0]$ , elle est continue à droite par rapport à la variable  $y$ , mais discontinue à gauche.

On vérifie alors facilement que sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (237)$$

$$\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (238)$$

Comme par ailleurs

$$\vec{A} = \frac{\vec{u}_\theta}{\rho} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{u}_x + \frac{\vec{u}_z}{\rho} = \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{u}_y, \quad (239)$$

on a donc localement

$$\frac{\vec{u}_z}{\rho} = \text{grad } \theta(x, y) \quad (240)$$

D'après ce qui précède, l'angle polaire constitue un potentiel dont dérive le champ  $\vec{A}$ , dans tout domaine ne contenant pas l'origine. En revanche, si l'on cherche à construire un potentiel dont dériverait le champ  $\vec{A}$ , on constate immédiatement que son existence n'est plus assurée par le lemme de Poincaré qui n'est plus applicable, puisque pour un lacet donné entourant l'origine, le flux de  $\text{rot } \vec{A}$  à travers une surface s'appuyant sur ce lacet est nul partout sauf en l'origine où il est singulier. Ayant néanmoins construit un potentiel (l'angle polaire  $\theta$ ) dont le gradient est égal localement au champ  $\vec{A}$ , on pourrait penser que l'on dispose néanmoins par continuité d'un potentiel dans tout le plan privé de l'origine. Ce n'est évidemment pas le cas puisque si l'on fait circuler le champ  $\vec{A}$  sur un lacet orienté circulaire entourant l'origine dans le sens trigonométrique, on obtient  $2\pi$  et non 0, en accord avec le fait que l'angle polaire ne peut être continu et monovalué dans ce plan privé de l'origine.

Comme nous l'avons souligné déjà plus haut, dans de nombreuses situations en physique, formes différentielles et différentielle exactes doivent être distinguées. Pour revenir à l'exemple de la thermodynamique, le premier principe s'écrit, dans le cas d'une transformation quasi-statique (réversible ou non), en ne prenant en compte que les degrés de libertés microscopiques,

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (241)$$

soit encore, dans le couple de variables  $(S, V)$ ,

$$dU = T dS - P dV. \quad (242)$$

Dans le cas d'une transformation réversible, le facteur  $1/T$  joue le rôle de *facteur intégrant* puisque suivant le second principe de la thermodynamique,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Big|_{\text{réversible}} \quad (243)$$

où  $dS$  est une différentielle, alors que  $\delta Q$  n'est pas une différentielle : la variation de  $S$ , qui joue le rôle de potentiel (appelée fonction d'état en thermodynamique, tout comme  $U$  ou encore l'enthalpie  $H$ , l'énergie libre  $F$  ou l'enthalpie libre  $G$ ) ne dépend pas du chemin suivi, alors que  $Q$ , ou  $\delta Q$  de façon infinitésimale, en dépend :  $\delta Q$  ne sera pas a priori le même dans une transformation irréversible quelconque menant du même état initial au même état final, alors que  $dS$  est identique.

## 6.5 Champ à flux conservatif

Le champ de champ à flux conservatif est l'analogie bidimensionnel du concept de champ à circulation conservative.

### 6.5.1 Le point de vue intégral

Un champ  $\vec{B}$  est dit à flux conservatif si son flux sortant à travers toute surface fermée est nul :

$$\iint_{S \text{ fermée}} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = 0. \quad (244)$$

comme illustré sur la figure 29.

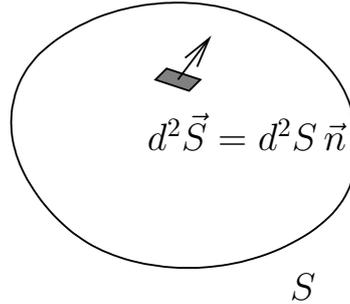


FIGURE 29 – Le flux d’un champ conservatif est nul à travers une surface fermée.

De façon équivalente, on voit facilement qu’un champ est à flux conservatif si et seulement si le flux à travers une surface s’appuyant sur un contour donné  $\Gamma$  ne dépend pas de la surface considérée. Ceci est illustré par la figure 30.

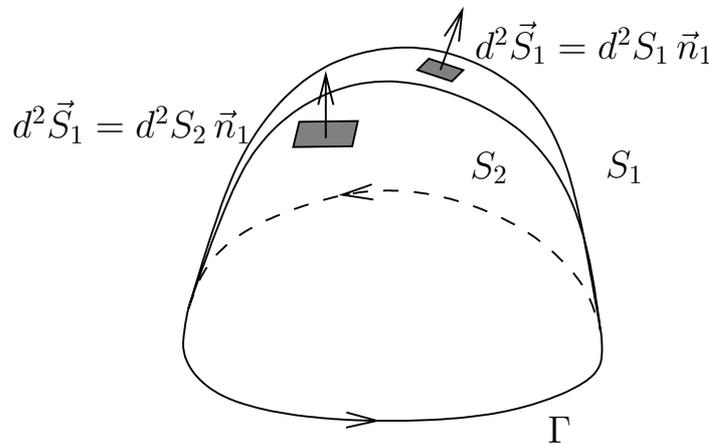


FIGURE 30 – Le flux d’un champ conservatif est indépendant de la surface s’appuyant sur un contour  $\Gamma$  donné.

En effet, si le flux est conservatif, considérons un contour  $\Gamma$  et deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  s’appuyant sur  $\Gamma$ . La surface  $S = S_1 \cup S_2$  définit une surface fermée. Le champ  $\vec{A}$  étant à flux conservatif, son flux à travers  $S$  est donc nul :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 d^2S + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_2) d^2S_2 = 0, \quad (245)$$

et donc

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 d^2S = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 d^2S, \quad (246)$$

et le flux ne dépend donc pas de la surface s'appuyant sur  $\Gamma$ .

Réciproquement, une surface fermée  $S$  peut toujours être décomposée en deux surfaces ouvertes  $S_1$  et  $S_2$  telles que  $S = S_1 \cup S_2$ . Les flux à travers  $S_1$  et  $S_2$  étant par hypothèse identiques, les relations ci-dessus permettent immédiatement de conclure que le flux à travers  $S$  est nul.

### 6.5.2 Le point de vue local

De façon analogue au fait que les champs de gradients sont à circulation conservative, on a le résultat important suivant :

Si  $\vec{B}$  est un champ qui peut s'exprimer comme le rotationnel d'un champ, i.e.  $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$ , alors ce champ est à flux conservatif.

*Preuve :*

Ceci est une conséquence immédiate du théorème de Stokes (196) puisque si l'on considère une surface  $S$  de bord  $\partial S$ , le flux de  $\vec{B}$  est alors égal à la circulation de  $\vec{A}$  sur le lacet  $\partial S$ , et ne dépend donc pas de la surface  $S$ .

Ce résultat possède une réciproque. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à flux conservatif est qu'il s'exprime comme le rotationnel d'un champ :

Un champ  $\vec{B}$  est à flux conservatif si et seulement si il existe un champ de vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ .

La réciproque repose sur le fait qu'en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky à une surface arbitraire fermée, on obtient immédiatement que la divergence du champ est nul. Le lemme de Poincaré qui suit permet alors de conclure que ce champ est un rotationnel (la condition plus forte, voir plus loin, sur la nature contractile de l'espace, est inutile grâce à l'hypothèse forte de flux conservatif).

La condition se pose maintenant de savoir à quelle condition locale un champ peut s'écrire comme un rotationnel. Examinons tout d'abord une condition nécessaire.

Une condition nécessaire pour qu'un champ  $\vec{B}$  puisse être un rotationnel dans un domaine  $D$  est qu'il soit à divergence nulle sur ce domaine.

*Preuve :*

Ceci est une conséquence immédiate du fait que

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0.} \quad (247)$$

En effet,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad (248)$$

par application des propriétés du produit vectoriel. Ceci peut s'établir également à partir du théorème de Green-Ostrogradsky : soit  $V$  un volume arbitraire du domaine  $D$ . Alors

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, d^3V &= \iint_{\partial V} \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{\partial V \text{ fermée}} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d^2\vec{S} \\ &= \iint_{\partial V \text{ fermée}} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d^2\vec{S} = \oint_{\Gamma \text{ ponctuel}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0, \end{aligned} \quad (249)$$

ce qui conduit à  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  puisque le résultat doit être valable pour tout  $V$ .

Venons-en maintenant à la réciproque. Avant cela, nous avons besoin d'une nouvelle notion de topologie.

### Espace contractile :

Un espace  $E$  est contractile s'il peut être ramené continûment à un point (on dit en math « homotope » à un point).

On remarquera qu'un espace peut être simplement connexe sans être contractile. Ainsi la sphère  $S^n$  pour  $n > 1$  est simplement connexe (le cercle  $S^1$  est un cas particulier : il n'est ni contractile ni simplement connexe) mais n'est pas contractile. En revanche tout espace contractile est simplement connexe.  $\mathbb{R}^n$  est contractile.

### Lemme de Poincaré :

Si un champ possède une divergence nulle sur un domaine contractile, alors il peut s'écrire comme le rotationnel d'un champ.

*Preuve partielle :*

Considérons un champ  $\vec{B}$  défini sur un domaine  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ , de la forme

$$\vec{B} = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y + \gamma \vec{u}_z, \quad (250)$$

de divergence nulle par hypothèse, i.e.

$$\alpha_x + \beta_y + \gamma_z = 0. \quad (251)$$

On cherche à déterminer un champ  $\vec{A} = a \vec{u}_x + b \vec{u}_y + c \vec{u}_z$  tel que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , i.e

$$\alpha = c_y - b_z \quad (252)$$

$$\beta = a_z - c_x \quad (253)$$

$$\gamma = b_x - a_y. \quad (254)$$

Le champ  $\vec{A}$  n'étant pas unique, fixons par exemple  $b = 0$ . L'équation (252) conduit alors à

$$c(x, y, z) = \int_{y_0}^y \alpha(x, t, z) dt \quad (255)$$

où l'on a fixé arbitrairement  $c(x, y_0, z) = 0$  pour un  $y_0$  donné. On peut également imposer  $c_x(x, y_0, z) = 0$ . On a alors

$$a_z(x, y, z) = \beta(x, y, z) + c_x(x, y, z) = \beta(x, y, z) + \int_{y_0}^y \alpha_x(x, v, z) dv \quad (256)$$

soit, encore, en utilisant l'eq. (251),

$$a_z(x, y, z) = \beta(x, y, z) - \int_{y_0}^y \beta_y(x, v, z) dv - \int_{y_0}^y \gamma_z(x, v, z) dv \quad (257)$$

$$= \beta(x, y_0, z) - \int_{y_0}^y \gamma_z(x, v, z) dv \quad (258)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} a(x, y, z) &= \int_{z_0}^z \beta(x, y_0, w) dw - \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \gamma_z(x, v, w) dv dw + f(x, y) \quad (259) \\ &= \int_{z_0}^z \beta(x, y_0, w) dw - \int_{y_0}^y \gamma(x, v, z) dv + \int_{y_0}^y \gamma(x, v, z_0) dv + f(x, y), \end{aligned}$$

où  $f$  est une fonction arbitraire. La dernière contrainte (254) s'écrit alors

$$\gamma(x, y, z) = -a_y(x, y, z) = \gamma(x, y, z) - \gamma(x, y, z_0) - f_y(x, y) \quad (260)$$

et donc  $f_y(x, y) = -\gamma(x, y, z_0)$ , soit par intégration, en fixant arbitrairement la fonction de  $x$  indéterminée à 0, ce qui revient à fixer  $a(x, y_0, z_0) = 0$ ,

$$f(x, y) = - \int_{y_0}^y \gamma(x, v, z_0) dv. \quad (261)$$

Finalement, on obtient la solution

$$a(x, y, z) = \int_{z_0}^z \beta(x, y_0, w) dw - \int_{y_0}^y \gamma(x, v, z) dv. \quad (262)$$

Cette preuve peut être étendue à un domaine  $D$  étoilé par rapport à un point  $M_0$  (ce qui signifie que pour tout point  $M$  de  $D$ , le segment  $[M_0, M]$  est inclus dans  $D$ ), puis par déformation continue à tout domaine contractile.

*Remarque :*

Comme dans le cas du lemme de Poincaré pour les formes différentielles, l'application du présent lemme peut être subtile.

Ainsi en coordonnées sphériques, le champ

$$\vec{E} = \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad (263)$$

qui est un singulier en  $r = 0$  possède une divergence nulle partout sauf en 0. Il ne peut s'écrire comme le rotationnel d'un champ sur tout  $\mathbb{R}^3$ , et n'est pas à flux conservatif. Un calcul facile montre qu'effectivement, son flux à travers une sphère de centre 0 et de rayon quelconque vaut  $4\pi$ . En revanche, son flux à travers une surface fermée entourant un volume ne contenant pas 0 est nul.

En coordonnées cylindriques, le champ

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{\rho} \quad (264)$$

est singulier en  $\rho = 0$  et il n'est pas possible de se retrendre à un domaine contractile. Il est cependant à flux conservatif, et s'exprime comme un rotationnel :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{\rho} = \text{rot } \vec{u}_\theta. \quad (265)$$

Toujours en coordonnées cylindriques, le champ

$$\vec{B} = -\frac{\vec{u}_\theta}{\rho^2} \quad (266)$$

est singulier en  $\rho = 0$  et il n'est pas possible de se retrendre à un domaine contractile. Il est néanmoins à flux conservatif, et s'exprime comme un rotationnel :

$$\vec{B} = -\frac{\vec{u}_\theta}{\rho^2} = \vec{\text{rot}} \frac{\vec{u}_z}{\rho}. \quad (267)$$