Corrigé DS2

1 Détection d'une onde électromagnétique

Loin d'une antenne émettrice (pour téléphone mobile par exemple), l'onde émise peut être assimilée à une onde plane dont le vecteur champ électrique est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= E_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \\ E_y(z,t) &= 0 \\ E_z(z,t) &= 0 \end{aligned}$$

1.1 Caractérisation de l'onde

1. Quelle est la direction et le sens de propagation de cette OEM. Quelle est l'expression de sa longueur d'onde λ en fonction de ω et c? L'onde se propage selon z. $\lambda = 2\pi c/\omega$

2. S'agit-il d'une onde plane homogène. Quelle est sa polarisation? Justifiez vos réponses.

   Il s'agit d'une onde plane et homogène . Elle est polarisée rectilignement selon Ox car $\vec{E}$ est selon l'axe Ox.

3. Quelle est l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$? Donner une relation entre $\vec{B}$, $\vec{k}$ et $\vec{E}$. Représenter ces trois vecteurs.

   $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z$. $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

   $\vec{k} \rightarrow$ $\vec{E} \uparrow$ $\vec{B} \odot$

4. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde.

   $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} z)\vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} z)\ \vec{u}_y$

5. figure de l'OEM et du champ électrique (fig.1-a)

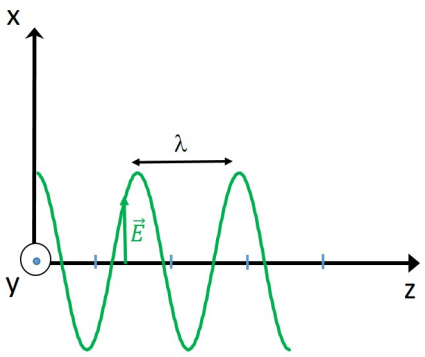

Fig. 1-a

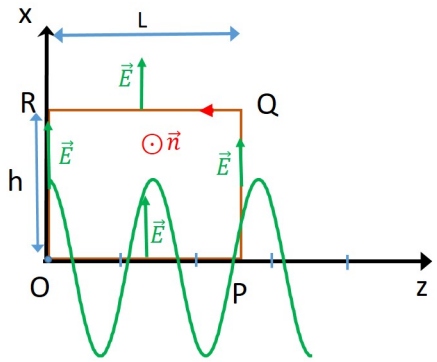

Fig. 1-b

1.2 Interaction avec un cadre rectangulaire fermé

On cherche à détecter cette onde grâce au phénomène d'induction électromagnétique. On utilise pour cela un cadre conducteur rectangulaire O(0,0,0), P(0,0,L), Q(h,0,L), R(h,0,0) situé dans le plan xOz (voir figure1-b). On propose pour cela de calculer la f.e.m. induite par l'onde.

1. Voir fig.1-b
2. Que vaut la circulation de $\vec{E}$ sur les côtés OP et QR. Justifiez votre réponse.

   La circulation de $\vec{E}$ est nulle sur ces deux côtés car $\vec{E}$ est perpendiculaire à OP et QR.
3. Déterminer l'expression de la circulation $\mathcal{C}_{PQ}$ et $\mathcal{C}_{RO}$ de $\vec{E}$ sur PQ et RO.

$$\mathcal{C}_{PQ} = \int_P^Q \vec{E}\ \vec{dl} = \int_P^Q E_x(z=L,t)\vec{u}_x\ .\ dx\vec{u}_x = hE_0\cos(\omega t - \frac{\omega L}{c})$$

$$\mathcal{C}_{RO} = \int_R^O \vec{E}\ \vec{dl} = \int_R^O E_x(z=0,t)\vec{u}_x\ .\ -dx\vec{u}_x = hE_0\cos(\omega t)$$

4. En déduire l'expression de la f.e.m. e induite par l'onde dans le cadre.

   $e = \mathcal{C}_{PQ} + \mathcal{C}_{PQ} = hE_0[\cos(\omega t - \frac{\omega L}{c}) - \cos(\omega t)] = -2hE_0[\sin(\omega t - \frac{\omega L}{2c})\sin(\frac{\omega L}{2c})]$
5. Pour quelle valeur de L la f.e.m. e est elle nulle? maximale?

   - La f.e.m est nulle si la dimension du cadre selon Oz est égale à un nombre entier de fois λ.

$$e = -2hE_0[\sin(\omega t - \frac{\pi L}{\lambda})\sin(\frac{\pi L}{\lambda})] = 0 \Rightarrow \frac{\pi L}{\lambda} = n\pi \Rightarrow L = n\lambda$$

- La f.e.m est maximale si la dimension du cadre selon Oz est égale $(n + 1/2)\lambda$.

$$e = -2hE_0[\sin(\omega t - \frac{\pi L}{\lambda})\sin(\frac{\pi L}{\lambda})] \text{ maximale} \Rightarrow \frac{\pi L}{\lambda} = (n+1)\pi/2 \Rightarrow L = (n+1/2)\lambda$$

1.3 Autre méthode

1. Donner l'expression du flux élémentaire $d\Phi$ du champ $\vec{B}$ à travers un élément de surface $d\vec{S}$ que l'on exprimera en fonction de dx, dz et un vecteur unitaire.

$$d\Phi = \vec{B}(x,z,t).d\vec{S} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}z)\ \vec{u}_y\ dx\ dz\ \vec{u}_y = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}z)\ dx\ dz$$

2. Déterminer l'expression du flux Φ du champ $\vec{B}$ à travers le cadre OPQR.

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int_0^h\int_0^L d\Phi = \frac{E_0}{c}\int_0^h\int_0^L \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}z)\ dx\ dz \\ &= \frac{E_0 h}{c}\int_0^L \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}z)\ dz \\ &= \frac{E_0 h}{\omega}\ [\sin(\omega t) - \sin(\omega t - \frac{\omega L}{c})]\end{aligned}$$

3. En déduire l'expression de la f.e.m. e et conclure.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = hE_0[\cos(\omega t - \frac{\omega L}{c}) - \cos(\omega t)]$$

On retrouve l'expression précédente obtenue par le calcul de la circulation du champ $\vec{E}$.

4. Que se passe t-il si le cadre est situé dans le plan xOy? Justifier votre réponse.

Le fux du champ magnétique Φ est nul. On en déduit que $e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$.

5. Le cadre est constitué d'un enroulement de N spires? Que devient l'expression de e aux bornes de cet enroulement? Quel dispositif doit-on brancher aux bornes de l'enroulement pour observer le signal?

La f.e.m. de N cadres en série est la somme des f.e.m. aux bornes d'un cadre.

$$e = NhE_0[\cos(\omega t - \frac{\omega L}{c}) - \cos(\omega t)]$$

On doit brancher un oscilloscope avec (si nécessaire) un amplificateur.

6. Quelle est la valeur de e pour une fréquence de 2 GHz (norme GSM3), une valeur de $L = \lambda/2$, N=100 et $E_0 = 30$V/m. La disposition du cadre est celle de la figure 1-a. Conclure quant-à ce type de solution pour l'application de téléphonie mobile.

   On choisit $h = L = \lambda/2$

$$e = -2\frac{\lambda}{2}E_0[\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})] = -\frac{c}{\nu}E_0[\sin(2\pi\nu t - \frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})]$$

$$\text{tension efficace : } e_{eff} = \frac{cE_0}{\sqrt{2}\nu} = 3.2\ V$$

2 Pince ampèremétrique

2.1 Champ magnétique créé par le fil parcouru par un courant $I(t)$.

1. Tout plan passant par l'axe Oz est plan de symétrie Π de la distribution de courants. La distribution de courants est invariante par translation selon Oz et rotation selon θ.

2. Le champ magnétique $\vec{B}_f(M)$ est normal au plan Π passant par M et contenant l'axe $Oz \Rightarrow \vec{B}_f(M) = B_\theta(M)\ \vec{u}_\theta$. Les invariances de la distribution de courant indiquent que B_θ ne dépend que de r:

$$\vec{B}_f(M,t) = B_\theta(r,t)\ \vec{u}_\theta$$

3. Théorème d'Ampère sous sa forme intégrale:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I(t)\ \Rightarrow\ 2\pi r B_\theta(r,t) = \mu_0 I(t)\ \Rightarrow\ \vec{B}_f(M,t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\ \vec{u}_\theta$$

   Le contour d'Ampère est un cercle d'axe Oz et de rayon r. Si on choisit d'orienter le contour dans le sens direct, la normale à la surface s'appuyant sur le contour (par exemple un disque) sera $+\vec{u}_z$.

2.2 Champ magnétique du tore parcouru par un courant $i(t)$ (TD6 d'électromagnétisme (S3)).

1. Tout plan passant par l'axe Oz est plan de symétrie Π de la distribution de courants. La distribution de courants est invariante par rotation selon θ.

2. Le champ magnétique $\vec{B}_t(M)$ est normal au plan Π passant par M et contenant l'axe Oz. $\Rightarrow \vec{B}_t(M,t) = B_\theta(M,t)\ \vec{u}_\theta$. Les invariances de la distribution de courant indiquent que B_θ ne dépend pas de θ:

$$\vec{B}_t = B_\theta(r,z,t)\ \vec{u}_\theta$$

3. Le contour d'Ampère est un cercle de rayon r et d'axe Oz. On distingue deux cas:

   - Le cercle est à l'intérieur du tore:

   $$\oint \vec{B}_t \cdot \vec{dl} = \mu_0 N i(t) \ \Rightarrow\ 2\pi r B_\theta(r,t) = \mu_0 N i(t) \ \Rightarrow\ \vec{B}_t(M,t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi r}\ \vec{u}_\theta$$

   - Le cercle est à l'extérieur du tore:

   $$\oint \vec{B}_t \cdot \vec{dl} = 0 \ \Rightarrow\ 2\pi r B_\theta(r,t) = 0 \ \Rightarrow\ \vec{B}_t(M,t) = \vec{0}$$

2.3 Flux à travers une spire carrée du tore

1. Le champ total créé par le fil et le tore est: $\vec{B} = \vec{B}_f + \vec{B}_t = \frac{\mu_0(I(t)+Ni(t))}{2\pi r}\ \vec{u}_\theta$

2. $\vec{dS}$ est orienté selon $+\vec{u}_\theta$. Avec cette convention, on a: $\vec{dS} = dr\ dz\ \vec{u}_\theta$

3. Montrer que le flux Φ du champ magnétique total $\vec{B}_T$ à travers une seule spire est donné par:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} \\
&= \int_{2a}^{3a} \int_0^a \frac{\mu_0(I(t)+Ni(t))}{2\pi r}\ \vec{u}_\theta \cdot dr\ dz\ \vec{u}_\theta \\
&= \mu_0(I(t)+Ni(t)) \int_{2a}^{3a} \frac{dr}{2\pi r} \int_0^a dz \\
&= \frac{\mu_0(I+Ni)}{2\pi}\ a\ \ln\frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{1}$$

4. Le flux total à travers tout le bobinage s'écrit $\Phi_T = N\Phi = \frac{\mu_0(NI+N^2 i)a}{2\pi}\ \ln\frac{3}{2}$. On peut écrire $\Phi_T = Li + MI$ avec le coefficient d'induction $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ \ln\frac{3}{2}$ et d'induction mutuelle $M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi}\ \ln\frac{3}{2}$.

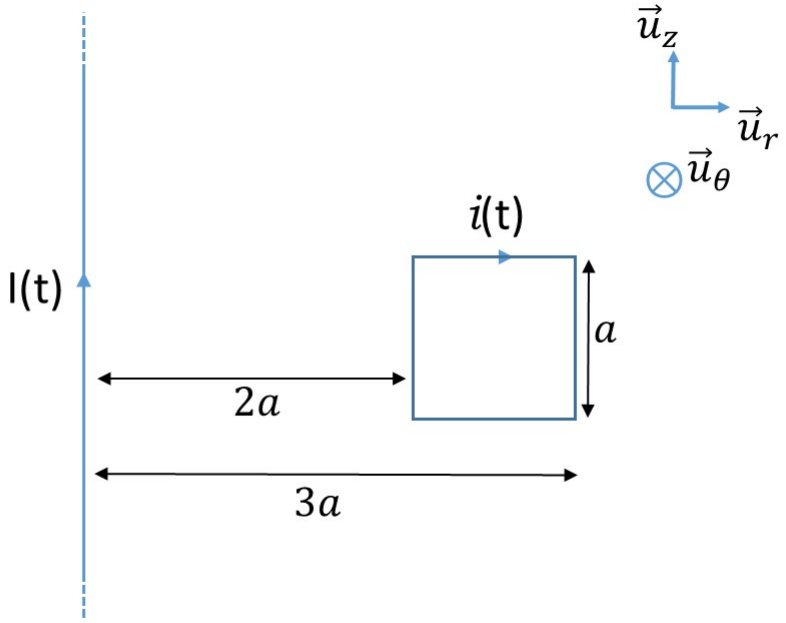

Figure 1:

2.4 Mesure du courant I(t)

1. L'induction électromagnétique est à l'origine de l'apparition du courant $i(t)$ dans le tore.

2. Loi de faraday donnant la f.e.m. aux bornes du tore $e = -\frac{d\Phi_T}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt} - M\frac{dI(t)}{dt}$

3. $e = Ri$. Schéma électrique équivalent: générateur de tension e en série avec une résistance R. On obtient l'équation différentielle :

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = -M\frac{dI(t)}{dt}$$

4. On injecte les expressions de $\bar{i}$ et $\bar{I}$ dans l'équation différentielle, ce qui donne $Lj\omega\bar{i} + R\bar{i} = -Mj\omega\bar{I}$, ou encore:

$$\bar{H} = \frac{\bar{i}}{\bar{I}} = \frac{-j\omega M}{R + j\omega L}$$

5. Module : $\left|\bar{H}\right| = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$. Il s'ensuit $\lim_{\omega\to+\infty}\left|\bar{H}\right| = \frac{M}{L} = 1/N$ et $\lim_{\omega\to 0}\left|\bar{H}\right| = 0$

   On peut mesurer de manière fiable un courant lorsque $\left|\bar{H}\right|$ ne dépend pas de ω, c'est à dire $\omega >> \frac{R}{L}$ ou encore la fréquence $f >> \frac{R}{2\pi L}$ A basse fréquence, la mesure est plus complexe et demande un étalonnage précis de la pince.

6. Une pince ampèremétrique classique ne peut pas mesurer un courant continu car le champ créé par ce courant est constant. Il n'y a donc pas de phénomène d'induction ($e = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow \left|\bar{H}\right| = 0$). Certaines pinces ampèremétriques équipées de capteurs à effet Hall peuvent mesurer des courants I indépendants du temps. L'avantage de cet outil de mesure par rapport à un ampèremètre classique est qu'il permet de réaliser une mesure directe sans perturber le circuit (maintenance, réparations....)