

## Examen d'électromagnétisme

Les documents sont interdits. Les calculatrices sont autorisées. Durée 1h30. On rédigera l'exercice 2 sur une feuille séparée de celle de l'exercice 1. Il y a 30 points au total et la note est sur 20.

**1 Détection d'une onde électromagnétique (15 pts)**

Loin d'une antenne émettrice (pour téléphone mobile par exemple), l'onde émise peut être assimilée à une onde plane dont le vecteur champ électrique est donné par l'expression suivante :

$$E_x(z, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} z\right)$$

$$E_y(z, t) = 0$$

$$E_z(z, t) = 0$$

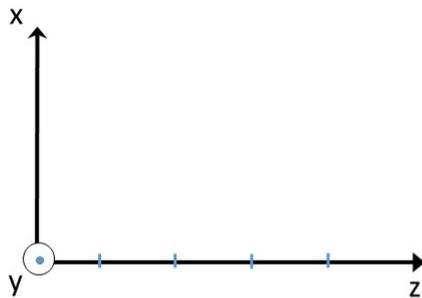


Fig. 1-a

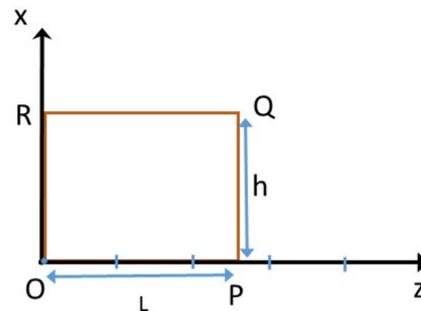


Fig. 1-b

## 1.1 Caractérisation de l'onde

1. Quelle est la direction et le sens de propagation de cette OEM. Quelle est l'expression de sa longueur d'onde  $\lambda$  en fonction de  $\omega$  et  $c$ ?
2. S'agit-il d'une onde plane homogène? Quelle est sa polarisation? Justifiez vos réponses.
3. Quelle est l'expression du vecteur d'onde  $\vec{k}$ ? Donner une relation entre  $\vec{B}$ ,  $\vec{k}$  et  $\vec{E}$ . Représenter ces trois vecteurs.
4. En déduire l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  de l'onde.
5. Représenter sur la figure 1-a le vecteur champ électrique  $E_x(z, t = 0)$  en fonction de  $z$  pour  $t = 0$  sur une période. On placera la longueur d'onde  $\lambda$  sur le schéma de la figure 1-a.

## 1.2 Interaction avec un cadre rectangulaire fermé

On cherche à détecter cette onde grâce au phénomène d'induction électromagnétique. On utilise pour cela un cadre conducteur rectangulaire  $O(0,0,0)$ ,  $P(0,0,L)$ ,  $Q(h,0,L)$ ,  $R(h,0,0)$  situé dans le plan  $xOz$  (voir figure 1-b). On propose pour cela de calculer la f.e.m. induite par l'onde.

1. Représenter le vecteur  $\vec{E}$  au milieu de chaque côté du cadre. Orientez le cadre et représentez sa normale  $\vec{n}$ .
2. Que vaut la circulation de  $\vec{E}$  sur les côtés  $OP$  et  $QR$ . Justifiez votre réponse.
3. Déterminer l'expression de la circulation  $\mathcal{C}_{PQ}$  et  $\mathcal{C}_{RO}$  de  $\vec{E}$  sur  $PQ$  et  $RO$ .
4. En déduire l'expression de la f.e.m.  $e$  induite par l'onde dans le cadre.
5. Pour quelle valeur de  $L$  la f.e.m.  $e$  est elle nulle? maximale?

## 1.3 Autre méthode

1. Donner l'expression du flux élémentaire  $d\Phi$  du champ  $\vec{B}$  à travers un élément de surface  $d\vec{S}$  que l'on exprimera en fonction de  $dx$ ,  $dz$  et un vecteur unitaire que l'on précisera.
2. Déterminer l'expression du flux  $\Phi$  du champ  $\vec{B}$  à travers le cadre  $OPQR$ .
3. En déduire l'expression de la f.e.m.  $e$  et conclure.
4. Que se passe-t-il si le cadre est situé dans le plan  $xOy$ ? Justifier votre réponse.
5. Le cadre est constitué d'un enroulement de  $N$  spires? Que devient l'expression de  $e$  aux bornes de cet enroulement? Quel dispositif doit-on brancher aux bornes de l'enroulement pour observer le signal?
6. Quelle est la valeur de  $e$  pour une fréquence de 2 GHz (norme GSM3), une valeur de  $L = \lambda/2$ ,  $N=100$  et  $E_0 = 30V/m$ . La disposition du cadre est celle de la figure 1-a. Conclure quant-à ce type de solution pour l'application de téléphonie mobile.

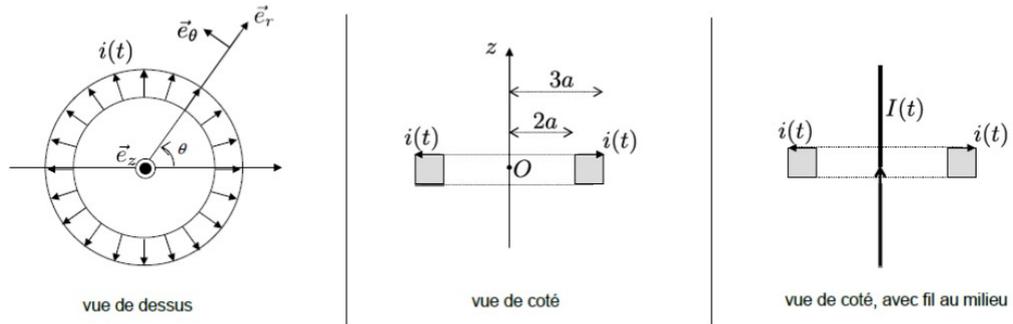
On donne :

$$\begin{aligned}\cos P - \cos Q &= -2 \sin\left(\frac{P+Q}{2}\right) \sin\left(\frac{P-Q}{2}\right) \\ \cos P + \cos Q &= 2 \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right) \cos\left(\frac{P-Q}{2}\right)\end{aligned}$$

## 2 Pince ampèremétrique (15 pts)



Une pince ampèremétrique sert à mesurer des courants sans intervenir physiquement sur le circuit. Il suffit en effet que la pince entoure le fil sur lequel on réalise la mesure pour qu'elle affiche l'intensité  $I$  qui parcourt le fil. On propose ici d'en comprendre le mécanisme, qui est basé sur des phénomènes d'induction. Une pince ampèremétrique à induction peut être décrite comme un tore de section carré, de côté  $a$  et d'axe  $Oz$  (figure ci-dessous), sur lequel est bobiné un fil, réalisant ainsi  $N$  spires carrées de côté  $a$  disposées en série. Ce circuit est de résistance totale  $R$ . Il est branché en série sur un ampèremètre interne à la pince (non représenté ci-dessous) qui permet d'en mesurer le courant  $i(t)$ . On utilise les coordonnées cylindriques. Le schéma de droite représente la situation considérée dans la suite, où la pince est disposée autour d'un fil parcouru par le courant  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ , dont on souhaite mesurer la valeur. Ce fil enserré par la pince est modélisé comme étant infini, de section nulle, confondu avec l'axe  $Oz$ . Les 3 sections sont indépendantes et vous pouvez traiter un certain nombre de questions sans avoir traité les précédentes.



## 2.1 Champ magnétique créé par le fil parcouru par un courant $I(t)$ .

1. Identifiez les plans de symétrie ainsi que les invariances de la distribution de courant du fil rectiligne infini parcouru par le courant  $I$ . Le fil est confondu avec l'axe Oz.
2. Montrer que l'expression réduite du champ magnétique en tout point s'écrit :  

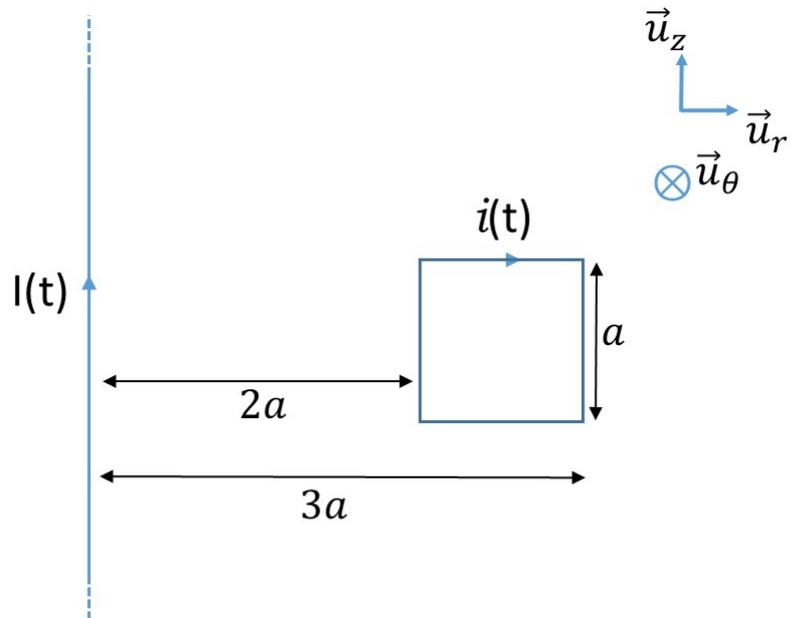
$$\vec{B}_f = B_\theta(r, t) \vec{u}_\theta$$
3. En utilisant le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale, déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_f$  créé par le fil en tout point de l'espace. Décrire et représenter le contour d'Ampère choisi. Orienter et placer la normale du contour d'Ampère.

## 2.2 Champ magnétique du tore parcouru par un courant $i(t)$ ( TD6 d'électromagnétisme (S3)).

1. Identifiez les plans de symétrie ainsi que les invariances de la distribution de courant.
2. Montrer que l'expression réduite du champ magnétique en tout point s'écrit :  

$$\vec{B}_t = B_\theta(r, z, t) \vec{u}_\theta$$
3. En utilisant le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale, déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_t$  créé par le tore à l'intérieur et à l'extérieur du tore. Décrire le contour d'Ampère choisi et le placer sur la figure 1. On orientera le contour et précisera le sens de sa normale.

## 2.3 Flux à travers une spire carrée du tore



1. Montrer que l'expression du champ total  $\vec{B}$  créé par l'ensemble fil + tore s'écrit  $\vec{B} = \frac{\mu_0(I(t)+Ni(t))}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
2. On considère une spire du tore. L'orientation de la spire est donnée par le sens du courant  $i$  sur la figure. Selon quel vecteur est orienté la normale  $d\vec{S}$  à la spire ? Exprimez  $d\vec{S}$  en fonction de  $dr$ ,  $dz$  et le vecteur unitaire adéquat.
3. Montrer que le flux  $\Phi$  du champ magnétique total  $\vec{B}_T$  à travers une seule spire est donné par :

$$\Phi = \frac{\mu_0(I + Ni)}{2\pi} a \ln \frac{3}{2} \quad (1)$$

4. En déduire l'expression du flux total  $\Phi_T$  à travers tout le bobinage constitué par les  $N$  spires du tore.

## 2.4 Mesure du courant $I(t)$

1. Quel est le phénomène physique à l'origine de l'apparition du courant  $i(t)$  dans le tore ?
2. Donner l'expression de la f.e.m.  $e$  aux bornes du tore en fonction de  $N$ ,  $a$ ,  $\frac{di}{dt}$  et  $\frac{dI}{dt}$  et des constantes du problème.
3. Réaliser un schéma électrique équivalent du circuit de la pince ampèremétrique. En déduire une équation différentielle portant sur  $i(t)$ , dont le second membre comprend la dérivée par rapport au temps du courant à mesurer  $\frac{dI(t)}{dt}$ .

4. On suppose que l'utilisation de la pince se fait à des fréquences suffisamment élevées pour pouvoir négliger le terme en  $i(t)$  dans l'équation précédente. Donner alors le lien entre  $i(t)$  et  $I(t)$ .
5. Une pince ampèremétrique peut-elle mesurer un courant continu ? Pourquoi ?