Polarisation TD3 : Correction

7 avril 2021

Méthode 1 : formalisme de Jones

Rappels

On considère deux repères orthonormés $\mathcal{A} = (Oxy)$ et $\mathcal{B} = (OXY)$ tels que $\mathcal{B}$ se déduit de $\mathcal{A}$ par une rotation d'angle θ (cf. Fig. 1).

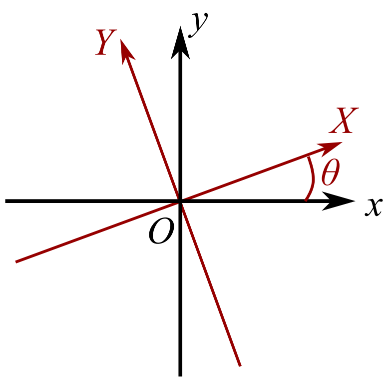

FIGURE 1 – Géométrie des repères considérés

On rappelle que la matrice de changement de base associée est

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1}$$

et que si $\mathbf{u}_{\mathcal{A}}$ est un vecteur donné dans la base $\mathcal{A}$ alors son expression dans la base $\mathcal{B}$ se déduit de :

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \mathbf{R}(\theta)^{\dagger}\mathbf{u}_{\mathcal{A}}$$

Par exemple le vecteur $\mathbf{u}_{\mathcal{A}} = [\cos\theta,\ \sin\theta]^T$ correspond en fait au vecteur (OX) et donc doit avoir pour coordonnées $(1, 0)$ dans le base $\mathcal{B}$. Verifions cela :

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \mathbf{R}(\theta)^{\dagger}\mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{CQFD}$$

Soit $\mathbf{J}_{\mathcal{A}}$ la matrice de Jones d'un composant dans le repère $\mathcal{A}$. Son expression dans le repère $\mathcal{B}$ tourné d'un angle θ sera donnée par $\mathbf{J}_{\mathcal{B}} = \mathbf{R}(\theta)^{\dagger}\mathbf{J}_{\mathcal{A}}\mathbf{R}(\theta)$ et donc $\mathbf{J}_{\mathcal{A}} = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{J}_{\mathcal{B}}\mathbf{R}(\theta)^{\dagger}$.

Question 1

On considère d'abord la lame $\lambda/2$. Celle-ci étant tournée d'un angle α, sa matrice de Jones dans le repère correspondant à ses axes propres (c'est à dire le repère tourné d'un angle α par rapport à (Ox)) est

$$\mathbf{J}_{\mathcal{B}}^{\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathcal{A}}^{\lambda/2}(\alpha) &= \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{J}_{\mathcal{B}}^{\lambda/2}\mathbf{R}(\alpha)^{\dagger} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire permet de trouver que pour une lame $\lambda/4$ tournée d'un angle β on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathcal{A}}^{\lambda/4}(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos^2\beta - i\sin^2\beta & (1+i)\cos\beta\sin\beta \\ (1+i)\cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta - i\cos^2\beta \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1-i)+(1+i)\cos 2\beta & (1+i)\sin 2\beta \\ (1+i)\sin 2\beta & (1-i)-(1+i)\cos 2\beta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc, suivant la configuration donnée dans l'énoncé, que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \mathbf{J}_{\mathcal{A}}^{\lambda/4}(\beta)\mathbf{J}_{\mathcal{A}}^{\lambda/2}(\alpha)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\mathcal{A}}^{\lambda/4}(\beta)\begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1-i)\cos 2\alpha + (1+i)\cos 2\beta\cos 2\alpha + (1+i)\sin 2\beta \sin 2\alpha \\ (1+i)\sin 2\beta\cos 2\alpha + (1-i)\sin 2\alpha - (1+i)\cos 2\beta\sin 2\alpha \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1-i)\cos 2\alpha + (1+i)\cos(2\beta - 2\alpha) \\ (1-i)\sin 2\alpha + (1+i)\sin(2\beta - 2\alpha) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Question 2

Pour avoir une polarisation linéaire selon (Oy) :

On veut $\mathbf{v} = [0,\ 1]^T$. C'est à dire, notamment, $\cos 2\alpha = \cos(2\beta - 2\alpha) = 0$. Et donc par exemple, $2\alpha = \pi/2$ et $2\beta - 2\alpha = \pi/2$. Ce qui amène à choisir $\alpha = \pi/4$ et $\beta = \pi/2$. Ce qui amène $\sin 2\alpha = \sin(2\beta - 2\alpha) = 1$. On a alors

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ (1-i)+(1+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour avoir une polarisation circulaire gauche :

On veut $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$. C'est à dire $\cos 2\alpha = \cos(2\beta - 2\alpha)$ et $\sin 2\alpha = -\sin(2\beta - 2\alpha)$. Ce qui amène par exemple à prendre $\beta = 0$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (1-i)\cos 2\alpha + (1+i)\cos(2\alpha) \\ (1-i)\sin 2\alpha - (1+i)\sin(2\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ -i\sin 2\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Il faut donc choisir α tel que $\cos 2\alpha = -\sin 2\alpha = 1/\sqrt{2}$ soit $\alpha = -\pi/8$. On obtient alors l'état voulu.

Pour avoir une polarisation elliptique droite dazimut nul et dellipticité égale à 30° :

On veut $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\chi \\ -i\sin\chi \end{bmatrix}$ avec $\chi = 30°$. Un raisonnement similaire à la question précédente amène à choisir $\beta = 0$ puis $\alpha = 15°$.

Méthode 2 : raisonnement graphique

Pour obtenir un état elliptique d'azimut nul et d'ellipticité ϵ. Il faut placer la $\lambda/2$ à $\epsilon/2$ de l'horizontale puis la $\lambda/4$ avec son axe lent horizontal (cf Fig. 2).

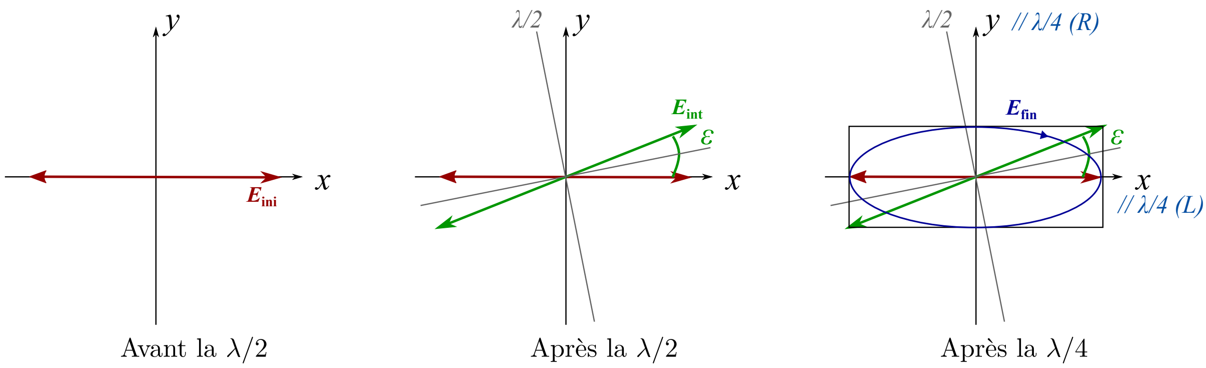

FIGURE 2 – Génération de l'état elliptique

Par rapport à la méthode 1, cela revient à prendre $\alpha = \epsilon/2$ et $\beta = 0$. On trouve alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(1-i)\cos\epsilon + (1+i)\cos(\epsilon)\\(1-i)\sin\epsilon + (1+i)\sin(-\epsilon)\end{bmatrix}\\&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\cos\epsilon\\-2i\sin\epsilon\end{bmatrix}\\&= \begin{bmatrix}\cos\epsilon\\-i\sin\epsilon\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien au vecteur de Jones d'un état elliptique droit d'ellipticité égale à ϵ.

Si on tourne la $\lambda/2$, on fait tourner la polarisation $\mathbf{E}_{\text{int}}$ ce qui fait changer l'ellipticité et le sens de rotation de l'état de polarisation en sortie de la lame $\lambda/4$.