Contrôle d'électromagnétisme

Les documents sont interdits. Les calculatrices sont autorisées. Durée 1h30. Le barème est indicatif, il pourra être modifié après correction. Vous pouvez utiliser le résultat d'une question pour répondre aux questions suivantes.

1 Chauffage par induction (10 points)

On se propose de modéliser le chauffage par induction d'un barreau métallique cylindrique (Fig.1), de conductivité électrique γ, placé dans un solénoïde d'axe Oz et parcouru par un courant $i = i_0 \cos(\omega t)$. Le solénoïde constitué de n spires par unité de longueur et le barreau de longueur L et de rayon R sont coaxiaux. Pour simplifier, on supposera que le champ magnétique $\vec{B}$ dans le barreau est identique à celui créé par le solénoïde supposé infini $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$. Le solénoïde étant infini, le champ magnétique est nul à l'extérieur. On négligera les effets d'auto-induction dans le barreau.

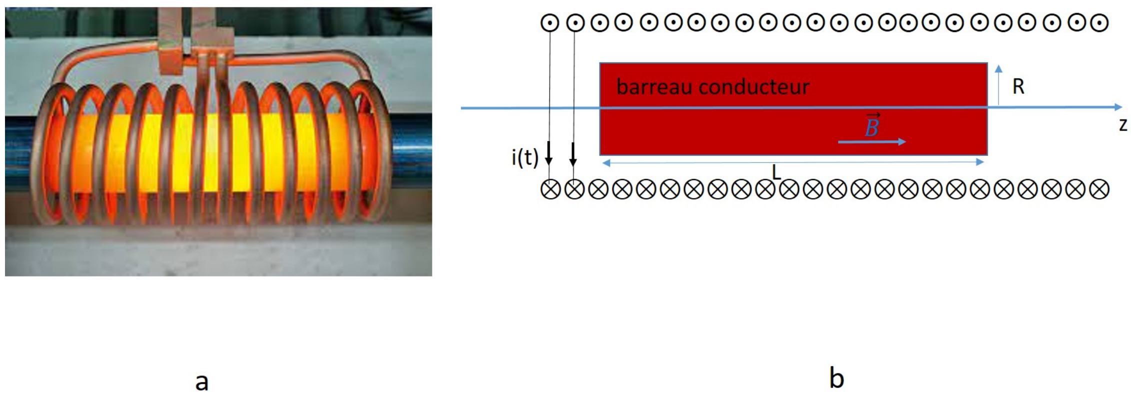

FIGURE 1 – chauffage par induction d'un barreau conducteur dans un solénoïde

1.1 Vecteur densité de courant électrique dans le barreau

1. Expliquez pourquoi un courant électrique apparaît dans le barreau.

2. En utilisant les propriétés de symétrie du champ magnétique et les invariances du système, montrez que le vecteur densité de courant dans le barreau s'écrit

$$\vec{j} = j(r)\vec{u}_\theta$$

On pourra supposer ici que le barreau est de longueur L infinie.
3. Montrer champ électromoteur $\vec{E}$ s'écrit $\vec{E} = E_\theta(r)\vec{u}_\theta$. Exprimez $E_\theta(r)$ en fonction de $J_\theta(r)$
4. Calculez l'expression de la circulation e du champ électromoteur $\vec{E}$ sur un cercle d'axe Oz et de rayon $r < R$ (Fig.2). On prendra soin d'orienter le contour et de préciser le sens de la normale $\vec{dS}$.
5. Calculez l'expression du flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers le cercle d'axe Oz et de rayon $r < R$.
6. Rappeler la loi de Faraday et en déduire l'expression de $\vec{E}(M,t)$ en fonction du courant $i(t)$ circulant dans le solénoïde.
7. Montrer que le vecteur densité de courant s'écrit $\vec{j} = \frac{\mu_0 \gamma \omega n r i_0}{2} \sin(\omega t)\vec{u}_\theta$.

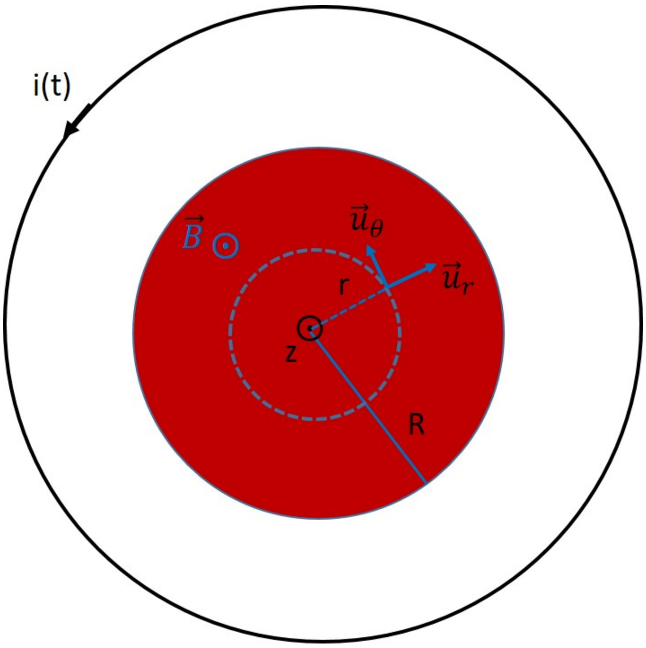

FIGURE 2 – Vue en coupe du système solénoïde barreau

1.2 Puissance électrique dissipée dans le barreau :

On rappelle que la puissance volumique instantanée dissipée dans un volume $d\tau$ est $dP = \vec{j}.\vec{E}d\tau = \gamma E(r,t)^2 d\tau$.

1. Donner l'expression de la puissance instantanée $P(t)$ dissipée dans le barreau.
2. En déduire l'expression de la puissance moyenne sur une période T : $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$.

2 Condensateur sphérique (14 points)

On considère le condensateur sphérique (vu au TD4) constitué d'une sphère conductrice pleine de centre O, de rayon R_1 entourée d'une sphère conductrice creuse de centre O, de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3 (Fig.3). Les deux sphères sont reliées à une pile qui impose une différence de potentiel $\Delta V = V_1 - V_2$. Le conducteur interne au potentiel V_1 porte la charge Q_1 et le conducteur externe au potentiel V_2 porte la charge Q_2. Le champ électrostatique à l'extérieur du condensateur ($r > R_3$) est nul. On considère que le condensateur est à l'équilibre électrostatique. Les 5 parties sont indépendantes. Il est possible de résoudre une partie en utilisant les résultats fournis par les précédentes.

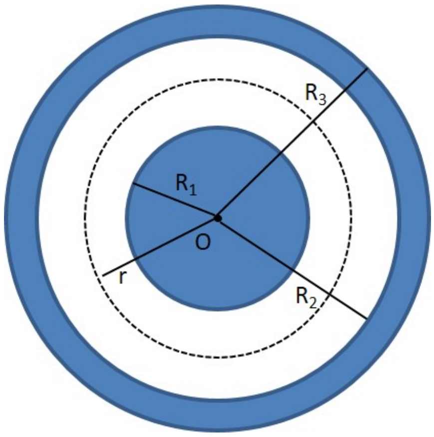

FIGURE 3 – Condensateur sphérique

2.1 Répartition des charges

1. De quelle manière les charges Q_1 et Q_2 se répartissent-elles ? Pourquoi n'y a t-il pas de charges à la surface externe de la sphère creuse (en $r = R_3$) ?
2. On appelle σ_1 la densité surfacique de charge en $r = R_1$ et σ_2 la densité surfacique de charge en $r = R_2$. Exprimer Q_1 en fonction de σ_1 ainsi que Q_2 en fonction de σ_2. Quelle est la charge totale du condensateur ? En déduire une relation entre σ_1 et σ_2.

2.2 Etude du champ électrostatique

1. Quels sont les plans de symétrie et les invariances de la distribution de charges ? Quel est le système de coordonnées adapté au problème ?
2. En déduire l'expression générale du champ $\vec{E}$ en tout point de l'espace en fonction des vecteurs unitaires du système de coordonnées choisi et des variables d'espace (on ne demande pas de calculer le champ).
3. A l'aide de la forme locale du théorème de Gauss, montrer qu'entre les armatures ($R_1 < r < R_2$) le champ s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r$$

4. On rappelle qu'à la surface d'un conducteur portant une densité surfacique de charge σ, le champ $\vec{E}$ s'écrit $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface. Donner l'expression du champ $\vec{E}(r = R_1)$ à la surface du conducteur interne. Montrer que $K = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0}$.
5. Montrer que le champ $\vec{E}$ s'écrit $\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
6. Pourquoi le champ $\vec{E}$ est-il nul dans les conducteurs ($r < R_1$ et $R_3 > r > R_2$) ? Exprimez le champ $\vec{E}(r = R_2)$ à la surface du conducteur externe en $r = R_2$ en fonction de σ_2 et ε_0
7. Que valent les discontinuités du champ en $r = R_1$ et $r = R_2$. Etait-ce prévisible ?

2.3 Capacité du condensateur

Vous pouvez répondre aux questions de cette partie en utilisant directement l'expression du champ $\vec{E}$ donnée en 2.2.5.

1. Calculer la circulation $\mathcal{L}$ du champ $\vec{E}$ entre les deux conducteurs : $\mathcal{L} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\vec{dl}$. Exprimer $\mathcal{L}$ en fonction de R_1, R_2 , ε_0 et $Q = Q_1$.
2. Montrer que la capacité C du condensateur sphérique s'écrit : $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

2.4 Résistance de fuite

Vous pouvez répondre aux questions de cette partie en utilisant directement l'expression du champ $\vec{E}$ donnée en 2.2.5. et celle de la capacité C donnée en 2.3.2. Dans le cas où le vide entre les conducteurs est remplacé par un isolant de conductivité électrique γ faible, il apparaît un courant faible appelé courant de "fuite" responsable de la décharge du condensateur. On remplacera la permittivité du vide ε_0 par la permittivité de l'isolant ε dans l'expression du champ électrique et de la capacité C. On cherche à déterminer la résistance de fuite $\mathcal{R}$ du condensateur.

1. Donner l'expression du vecteur densité de courant $\vec{J}$ en fonction de γ et $\vec{E}$. En déduire l'expression de $\vec{J}$ en fonction de Q, ε, r et γ.
2. Exprimer le flux $\Phi(\vec{J})$ du vecteur densité de courant à travers une sphère de rayon r ($R_1 < r < R_2$) et de centre O (voir figure). En déduire l'expression de l'intensité du courant I traversant cette sphère de rayon r en fonction de γ, Q et ε.
3. Etablir une relation entre la tension ΔV, le courant I, la capacité C , γ et ε. En déduire l'expression de la résistance électrique $\mathcal{R}$ de l'isolant. Donner l'expression du produit $\mathcal{R}C$.

2.5 Décharge du condensateur

Le courant de fuite est à l'origine de la diminution de $Q(t)$ en fonction du temps. On cherche à déterminer τ, le temps de décharge du condensateur.

1. Quelle est la relation existant entre I et $Q(t)$? Montrer que la charge $Q(t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dQ}{dt} = AQ(t)$ où A est une constante à déterminer.
2. Résoudre cette équation et déterminer $Q(t)$ en fonction de $Q_0 = Q(t = 0)$ et des variables pertinentes. Donner l'expression du temps de décharge τ du condensateur en fonction de ε et γ
3. Calculer τ dans le cas d'un isolant dont les caractéristiques sont :
   $\varepsilon = 2.6\varepsilon_0$, $\gamma = 10^{-17}\ (\Omega m)^{-1}$

On donne : $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ Fm^{-1}$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi})$$