Contrôle d'électromagnétisme

Les documents sont interdits. Les calculatrices sont autorisées. Beaucoup de questions sont indépendantes. Vous pouvez utiliser le résultat d'une question à laquelle vous n'avez pas répondu pour traiter les questions suivantes. Durée 1h30.
Les deux problèmes sont à rédiger sur des feuilles séparées.

1 Mise en mouvement d'un objet par induction

Rédigez vos réponses sur une autre copie que celle du problème 2.

On se propose de créer un dispositif permettant de mettre en mouvement un objet conducteur par induction. Le modèle extrêmement simplifié de ce dispositif est constitué d'un rail conducteur fixe situé dans le plan horizontal xOy sur lequel on place une tige mobile pouvant glisser sur le rail (figure 1). Au cours de son déplacement sans frottement selon l'axe Ox, la tige reste perpendiculaire au rail. La résistance électrique R du circuit est considérée comme constante au cours du mouvement de la tige. A $t = 0$, on applique un champ dépendant du temps $\vec{B} = At\vec{u}_z$, où A est une constante réelle.

1.1 Modèle qualitatif

1. Expliquer pourquoi il apparaît un courant induit dans le circuit formé par le rail et la tige.
2. Rappeler la loi de modération (ou loi de Lenz).
3. En déduire la direction du champ $\vec{B}_i$ et du courant i induits. Représenter sur les deux schémas de la figure 2 le champ induit $\vec{B}_i$, le courant induit i. On distinguera les cas $A > 0$ et $A < 0$.
4. Donner l'expression de la force de Laplace $\vec{F}_L$ s'exerçant sur la tige mobile en fonction de i, a, A, t et du vecteur unitaire adéquat. Représenter $\vec{F}_L$ sur chacun des schémas de la figure 2.

1.2 Expression de la force de Laplace

1. Orienter le circuit de la figure 1 et placer le vecteur unitaire $d\vec{S}$ normal à la surface du circuit. Donner l'expression du flux $\Phi(t)$ du champ appliqué $\vec{B}$ à travers le circuit fermé en fonction de A, a, de la position $x(t)$ du rail et du temps t.

Feuille à rendre avec votre copie Nom : Prénom :

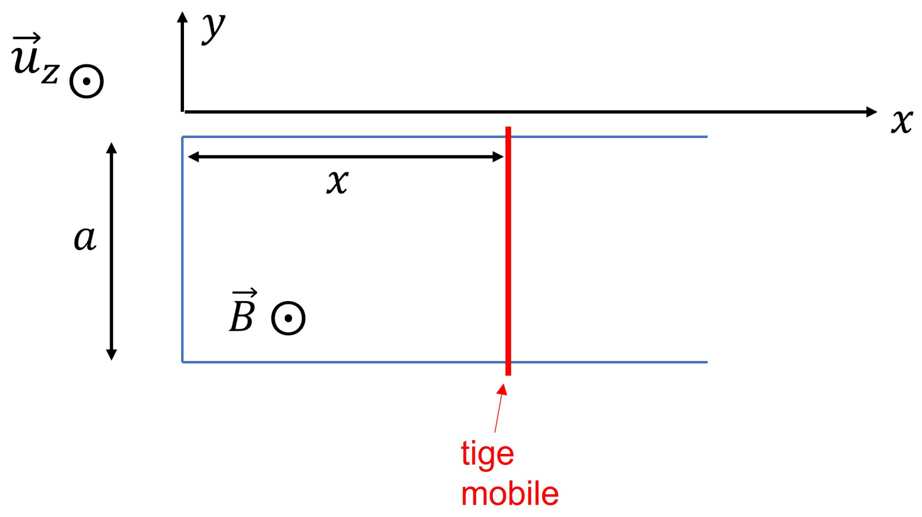

FIGURE 1 – Rail de Laplace

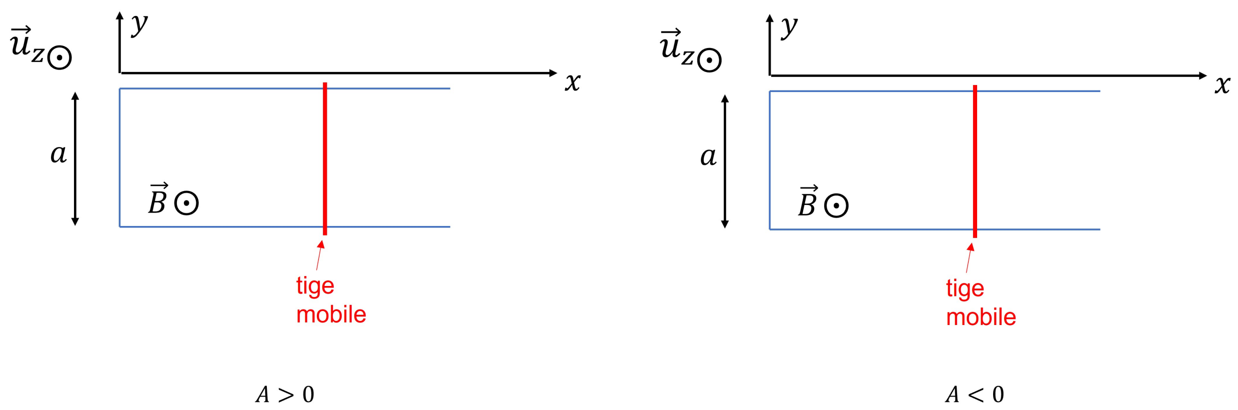

FIGURE 2 – Courant et champ induits, force de Laplace

2. En déduire l'expression de la force électromotrice $e(t)$ (ou tension) du circuit fermé puis celle du courant induit i en fonction de A, a, R, $x(t)$ et t.
3. En déduire l'expression de la force de Laplace $\vec{F}_L$.
4. Proposer une équation différentielle pour $x(t)$. On ne cherchera pas la solution de cette équation.

2 Modèle classique de l'électron

Rédigez vos réponses sur une autre copie que celle du problème 1.
On cherche à déterminer l'expression de l'énergie électrostatique de l'électron qu'on pourra assimiler à une sphère de rayon R et de centre $O(0,0,0)$ uniformément chargée en volume. On note ρ la densité de charge volumique de l'électron et ε_0 la permittivité du vide. On considèrera que la permittivité au sein de l'électron est celle du vide.

2.1 Relations locales pour le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$

Questions de cours : On considère le potentiel $V(M)$ et le champ électrique $\vec{E}(M)$ associés à une distribution volumique de charges $\rho(M)$ quelconque.

1. Rappeler le théorème de Gauss sous sa forme locale et intégrale. Quelle relation utilise t-on pour passer d'une forme à l'autre ?
2. Quelle est la relation entre le champ et le potentiel électrostatiques.
3. Etablir l'équation locale (équation de Poisson) reliant le potentiel électrostatique $V(x,y,z)$ et la densité volumique de charges $\rho(x,y,z)$.

2.2 Expression du potentiel électrostatique $V(M)$ de l'électron

On se place dans le système de coordonnées sphériques. En l'absence d'autres charges, on pourra annuler le potentiel V pour $r = \infty$.

1. Exprimer la charge Q de l'électron en fonction de ρ et R.
2. De quelle variable dépend le potentiel életrostatique V créé par l'électron (justifier votre réponse) ? En déduire l'expression du Laplacien $\Delta V(M)$ dans le système de coordonnées sphériques.
3. Résoudre l'équation de Poisson à l'extérieur de l'électron ($r > R$), c'est à dire dans le vide. On admettra que le potentiel à l'infini est nul ($V(r=\infty) = 0$) et que $V(r = R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$.
4. Résoudre l'équation de Poisson à l'intérieur de l'électron ($r \leq R$) de densité de charge ρ. Montrer que :
$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{C}{r} + D$$
où C et D sont des constantes d'intégration.
5. Justifier que $C = 0$. Pourquoi le potentiel est-il continu en $r = R$? En déduire l'expression de la constante D en fonction de ρ, ε_0 et R.

6. Donner l'expression du potentiel électrostatique $V(r)$ pour $r \leq R$

Expression du Laplacien dans le système de coordonnées sphériques :

$$\Delta V(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}$$

2.3 Energie électrostatique de l'électron

On rappelle que l'expression de l'énergie d'une distribution de charges $\rho(M)$ dans un potentiel $V(M)$ est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho(M)V(M)d\tau$$

où τ est le volume contenant la densité de charge ρ.

1. Montrer que l'énergie $\mathcal{E}_e$ de l'électron est donnée par l'expression :

$$\mathcal{E}_e = 2\pi\rho\int_0^R V(r)r^2dr$$

2. En déduire l'expression de l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_e$ de l'électron en fonction de Q, ε_0 et R.
3. En posant $\mathcal{E}_e = mc^2$ où m est la masse de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide, donner l'expression du rayon R de l'électron en fonction de m, c, Q et ε_0.
4. A.N. Estimer R, la valeur du rayon classique de l'électron. On utilisera :
c =3 10^8 ms^{-1}, m =9.1 10^{-31} kg, Q =1.6 10^{-19} C, ε_0 =8.85 10^{-12} Fm^{-1}