TD#4-5 : L'effet photoélectrique
CORRECTION

A. Calcul de l'élément de matrice de transition

1/ On sait que

$$E_g = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c\varepsilon_0}$$

On a donc

$$E_g = -\frac{1}{2}(mc^2\alpha^2) = -13.6 \text{ eV}$$

L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental est donc donnée par $E_I = -E_g$. Cette énergie correspond à l'énergie minimale qu'un photon incident devra avoir pour arracher l'électron au noyau et ainsi induire une transition vers le continuum. On écrit donc

$$\hbar\omega_0 = \frac{1}{2}(mc^2\alpha^2)$$

Or le rayon de Bohr est $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2)$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} mc^2\alpha^2 &= \frac{me^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \\ &= \frac{\hbar^2}{ma_0^2} \end{aligned}$$

On a enfin

$$\omega_0 a_0^2 = \frac{\hbar}{2m}$$

2/ L'hamiltonien d'interaction est donné par

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -\frac{e}{m}\hat{\mathbf{p}}.\mathbf{A}(t) \\ &= -\frac{\imath\hbar e}{m}\hat{\nabla}.\mathbf{A}(t) \\ &= -\frac{\imath\hbar e}{m}\mathbf{A}.\hat{\nabla} \qquad \rightarrow \qquad A.p = p.A \text{ dans la jauge de Coulomb} \end{aligned}$$

On sait aussi que

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{E}_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\hat{H}_I &= +\frac{\imath\hbar e}{\omega m}\left(\mathbf{E}_0.\hat{\nabla}\sin(\omega t)\right) \\
&= \frac{\hbar e}{2m\omega}\left(\mathbf{E}_0\hat{\nabla}\mathrm{e}^{\imath\omega t} - \mathbf{E}_0\hat{\nabla}\mathrm{e}^{-\imath\omega t}\right) \\
&= V_0\mathrm{e}^{\imath\omega t} + V_0^\dagger\mathrm{e}^{\imath\omega t}
\end{aligned}$$

avec

$$V_0 = -\frac{\hbar e}{2m\omega}\mathbf{E}_0.\hat{\nabla} \qquad \text{et} \qquad V_0^\dagger = -V_0 \text{car} \hat{\nabla}^\dagger = -\hat{\nabla}$$

et l'élément de matrice est donc donné par

$$\begin{aligned}
\langle e|\,\hat{H}_I\,|g\rangle &= \langle e|\,V_0\mathrm{e}^{\imath\omega t} + V_0^\dagger\mathrm{e}^{\imath\omega t}\,|g\rangle \\
&= \langle e|\,V_0\mathrm{e}^{\imath\omega t}\,|g\rangle + \langle e|\,V_0^\dagger\mathrm{e}^{\imath\omega t}\,|g\rangle \\
&= \langle e|\,V_0\,|g\rangle\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} + \langle e|\,V_0^\dagger\,|g\rangle\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} \\
&= W_{eg}\mathrm{e}^{\imath\omega t} + W_{eg}^*\mathrm{e}^{\imath\omega t}
\end{aligned}$$

avec $W_{eg} = \langle e|\,V_0\,|g\rangle$.

B. Calcul du taux d'ionisation différentiel

4/ $E_k = \hbar^2k^2/2m = \hbar(\omega - \omega_0)$

5/ Utiliser A.1

6/ $d^3\vec{k} = \frac{m}{\hbar^2}\ k\ dE_k\ d^2\Omega$

7/ En utilisant les expressions (13), (15) et (4), on obtient :

$$w_{100\to k} = \frac{4q^2E_0^2k^3a_0^3\cos(\theta)^2}{\hbar m\omega^2\pi(1+(ka_0)^2)^4}dE_kd^2\Omega\delta(E_k - E_i - \hbar\omega) \tag{1}$$

C. Calcul du taux d'ionisation

8/ La distribution de Dirac permet d'obtenir immédiatement le résultat de l'intégral en énergie. En remplaçant l'expression de k en fonction de ω, ω_0 et a_0, on obtient l'expression (16) avec $B = 16/\pi$. L'expression ne dépend pas de L ce qui signifie que ce résultat peut s'étendre à l'infini et correspond bien au cas du continuum d'état.

9/ $d^2\Omega = \sin(\Theta)d\Theta d\Phi$.
On pose $\beta(\omega) = B\left(\frac{eEa_0}{mc^2\alpha^2}\right)^2\left(\frac{\alpha c}{a_0}\right)\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^6\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)^{3/2}$ et on obtient :

$$w(\omega) = \int\int dw_{100\to k} = \frac{4\pi}{3}\beta(\omega) \tag{2}$$

10/ En utilisant $\frac{dw}{d\omega}|_{\omega_{\max}} = 0$, on obtient $\omega_{\max} = \frac{12\omega_0}{9}$.

11/ $w \approx 0.1\ \mathrm{s}^{-1}$

D. Section efficace d'ionisation

12/ L'intensité est donnée par la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$I = \langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$$

Le flux correspond au nombre de photons d'énergie $\hbar\omega$ par unité de surface et de temps. On l'obtient à partir de l'intensité en écrivant

$$F = \frac{I}{\hbar\omega} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{\hbar\omega}$$

13/ D'après les questions précédentes, la section efficace d'ionisation s'écrit

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{w}{F} \\ &= \frac{256\pi}{3} \alpha a_0^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^5 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)^{3/2} \end{aligned}$$

Pour $\omega \gg \omega_0$, la section efficace tend vers 0.

14/ La section efficace varie de la façon suivante en fonction ω. La valeur de ω pour laquelle

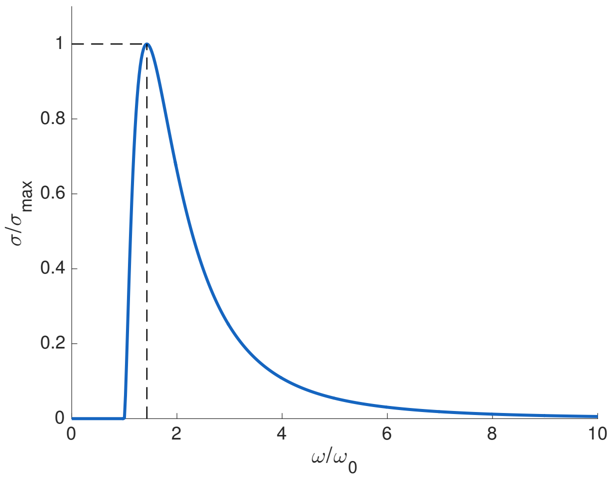

FIGURE 1 – Section efficace en fonction de la fréquence

la section efficace est maximale est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega} = 0$$

Ce qui donne $\omega'_{\max} = 10\omega_0/7$.

15/ $\sigma_{\mathsf{max}} = \sigma(\omega_{\mathsf{max}}) = 0.092 a_0^2$ à comparer avec la taille géométrique d'un atome ...