Master STePE – M1 – UE Fonctionnement du système Terre
TD sur la conservation de la quantité de mouvement

Petites questions

1. **Nombre de Rossby**. Que représente le nombre Rossby (*Ro*) ? En vous donnant des échelles caractéristiques de longueur et de vitesse, calculez *Ro* pour différents phénomènes : petit tourbillon océanique, gyre océanique, dépression atmosphérique, cyclone tropical, tornade locale. On rappelle que le facteur de Coriolis s'écrit $f=2\Omega \sin(\phi)$. Dans quel(s) cas doit on prendre en compte la force de Coriolis ?

2. **Equilibre Géostrophique**. Une particule d'air de masse 1g se déplace horizontalement à la latitude ϕ=60°N et à la vitesse v=45km/h vers le nord-est. En supposant l'équilibre géostrophique, calculez et représentez graphiquement les forces en présences.

3. **Petits tourbillons dans l'eau et dans l'air**. Dans les océans et l'atmosphère, de petits tourbillons se développent (taille caractéristique L=0.1m). Déterminez le rapport entre forces visqueuses et force de Coriolis sur ces tourbillons dans les 2 milieux pour $\phi=45°$ et $\phi=0.5°$. Conclusion ? On donne $\nu_{air}=1.3 \times 10^{-5} m^2/s$, $\nu_{eau}=10^{-6} m^2/s$, U_{eau}=0.1cm/s, U_{air}=1m/s.

4. **Effet de Coriolis sur une distance courte**. Quelle est la déviation latérale d'un ballon tiré à 60m avec une vitesse de 15m/s à 45 degrés Nord ? On négligera tous les effets sauf Coriolis et on considèrera le mouvement horizontal.
   a. Ecrivez l'équation vérifiée par la composante latérale de la vitesse (v).
   b. Intégrez cette équation pour trouver l'expression de la position latérale du ballon $y(t)$.
   c. En déduire la déviation latérale à 60m.

5. **Angle de compensation**. Imaginez un avion supersonique volant à u=600m/s d'Ouest en Est sur un parallèle à la latitude ϕ=45°N. On se place dans un plan perpendiculaire à la direction de l'avion.
   a. Dessinez les forces en présence. Dans quelle direction est la force de Coriolis ?
   b. Expliquez pourquoi et comment le pilote (humain ou automatique) doit compenser Coriolis
   c. Calculez l'angle γ que doit faire l'avion pour contrebalancer la force de Coriolis.

6. **Forces visqueuses versus Coriolis**. En considérant les jets d'ouest de la figure ci-dessous vers 30°S, comparez l'impact de la force visqueuse par rapport à la force de Coriolis au centre du jet.

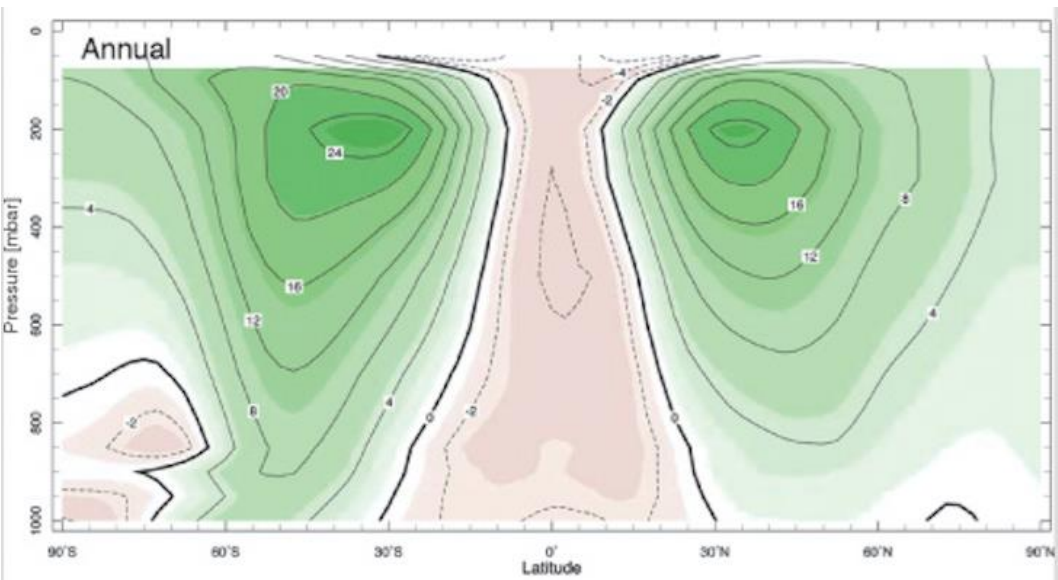


Figure : Vent zonal moyen annuel en m/s

7. **Cyclone en équilibre géostrophique ?** Les vents dans un cyclone typique à 30°N peuvent atteindre 50m/s sur un rayon de 50km. Est-on à l'équilibre géostrophique ? On donne la vitesse de rotation de la Terre Ω=7.27x10^{-5} s^{-1}

8. **Régions désertiques**. Expliquez pourquoi on trouve les régions les plus désertiques de la Terre vers 20-30° de latitude.

9. **Pression dans l'océan.** Considérons un océan de densité constante ρ=1000kg/m^3. En utilisant l'équilibre hydrostatique, calculez la pression à 1km de profondeur et à 5km de profondeur. On exprimera ces pressions par rapport à la pression atmosphérique de surface P_s=10^{5}Pa.

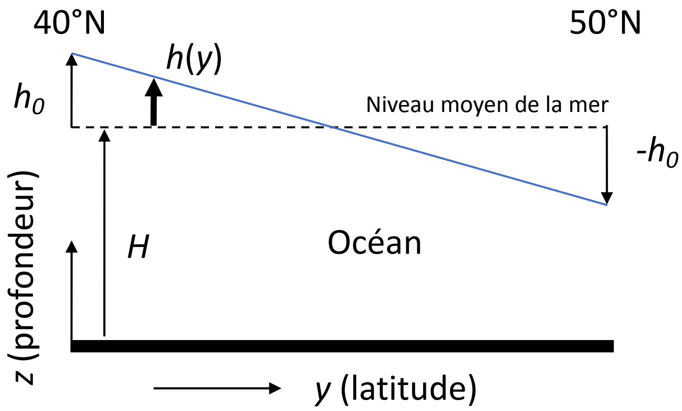
10. **Equilibre géostrophique**. Dessinez l'équilibre des forces et la vitesse autour d'une dépression et d'un anticyclone dans l'hémisphère sud (f<0).

université PARIS-SACLAY

Exercice 1 : Comment peut-on estimer la vitesse géostrophique dans l'océan ?

On considère un océan uniforme de masse volumique ρ=1000kg/m^3. Sa surface est horizontale en longitude mais varie linéairement en latitude en étant 0.1m au-dessus du niveau moyen de la mer (MSL) à 40°N et 0.1m en dessous du niveau moyen de la mer à 50°N (voir schéma). On note P_0 la pression atmosphérique à la surface de l'océan supposée constante. On appellera *h(y)* la hauteur de l'eau par rapport à MSL.

1. De quelles variables dépend la pression dans l'océan ?
2. En utilisant l'équilibre hydrostatique, trouvez la pression à une profondeur d sous le niveau de la mer
3. Exprimez $\partial P / \partial y$ et montrez qu'il est indépendant de la profondeur.
4. En déduire la composante longitudinale de la vitesse géostrophique (u).
5. Calculez u avec les données du problème.
6. Comparez la valeur trouvée avec des valeurs typiques dans l'atmosphère. Commentaire ?



Exercice 2 : Pourquoi le vent peut-il être plus fort dans une dépression que dans un anticyclone ?

Une bonne approximation des mouvements horizontaux dans l'atmosphère est donnée par l'équation dans le repère local :

$$\frac{d\vec{V}_h}{dt} = -f\vec{e}_z \wedge \vec{V}_h - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_h P \qquad (1)$$

où l'indice h se rapporte à l'horizontale, $\vec{e}_z$ est le vecteur définissant la verticale locale et f est le paramètre de Coriolis ($f = 2\Omega\sin(\varphi)$, où φ est la latitude). On se place dans le repère naturel constitué d'un trièdre direct $\{\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_z\}$ tel que $\vec{e}_t$ est parallèle et de même orientation que la vitesse horizontale $\vec{V}_{h'}$ et tel que $\vec{e}_z$ est orienté verticalement vers le haut. Dans ces conditions, on a la vitesse horizontale est $\vec{V}_h = V\vec{e}_t$ avec $V = \frac{ds}{dt} \geq 0$, où s est appelée abscisse curviligne de la parcelle d'air le long de sa trajectoire. On donne aussi la relation : $\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{\vec{e}_n}{R}$, où R est le rayon algébrique de courbure de la trajectoire (positif dans le sens trigonométrique).

1. Équations générales vérifiées par V.
   a. Exprimez les trois termes de l'équation (1) dans le repère naturel.
   b. En décomposant les trois termes dans le repère naturel, montrez que l'équation (1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial s} & (2) \\[2ex] \dfrac{V^2}{R} = -fV - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial n} & (3) \end{cases}$$

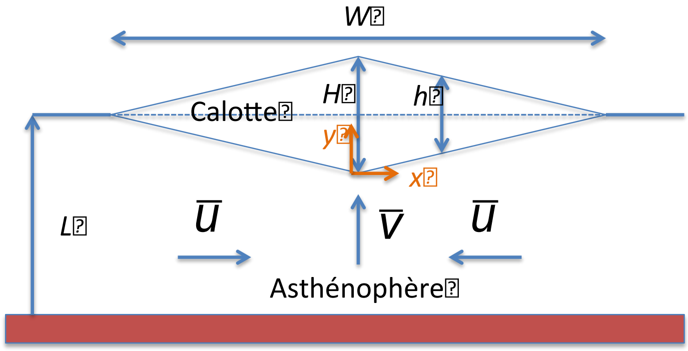
Vous supposerez que le gradient de pression s'exprime comme dans le repère cartésien.

2. On supposera dans la suite que le gradient de pression est nul dans la direction de l'écoulement et constant dans la direction perpendiculaire et de valeur *K*.
    a. Que peut-on en déduire pour V et R ? Que dire de la forme de la trajectoire. Comparez-la aux isobares.
    b. Quel équilibre retrouve-t-on pour $R \rightarrow +\infty$? Déduire du signe de V celui de K dans l'hémisphère nord. On suppose que ce signe est inchangé dans le cas général (R fini)
    c. Dans le cas général, écrivez l'équation du second degré vérifiée par *V*. Exprimez le discriminant Δ de cette équation. En déduire l'expression générale de V.
    d. Pour R>0. Y a t'il une condition pour avoir $\Delta>0$? Quel phénomène météorologique ce cas représente-il ? Faites un dessin résumant la situation
    e. Pour R<0. Y a t'il une condition pour avoir $\Delta>0$? Quel phénomène météorologique ce cas représente-il ? Faites un dessin résumant la situation
    f. Conclure sur la possibilité de vents plus forts dans les dépressions que dans les anticyclones.

Exercice 3 : Estimation de la viscosité du manteau (*D'après Mechanics in the Earth and Environmental Sciences, Par Gerard V. Middleton, Peter R. Wilcock, Cambridge, univ. Press*)

L'asthénosphère est la partie ductile du manteau supérieur de la Terre. Elle s'étend entre la lithosphère et le manteau inférieur sur une épaisseur encore discutée comprise entre L= 75 et L=500 km. Sa viscosité μ est supposée bien inférieure à celle du manteau inférieur mais dans des proportions encore incertaines. La viscosité μ du manteau supérieur ne peut pas être mesurée directement et il faut donc trouver une méthode indirecte, par exemple au travers des forces visqueuses s'exprimant lors de la fonte d'une calotte de glace posée sur la croûte continentale. Lorsqu'une calotte d'épaisseur *H* et d'extension horizontale W est à l'équilibre isostatique sur la croûte terrestre, elle exerce une pression $\rho g H$ contrebalancée par une pression de flottabilité identique exercée par l'asthénosphère en dessous. Quand la calotte fond, l'équilibre isostatique est rompu, et l'existence d'un gradient de pression longitudinal provoque la remontée de l'asthénosphère et une convergence horizontale de la vitesse horizontale dans l'asthénosphère. La mesure de la vitesse de remontée et la connaissance des caractéristiques du milieu (H, L, W) permettent d'estimer la viscosité de l'asthénosphère.

Modèle proposé : On considère une calotte de glace en forme de losange (figure ci-dessous) d'épaisseur maximum *H* et d'extension horizontale *W* posée sur l'asthénosphère d'épaisseur *L* (on néglige la présence de la lithosphère entre les deux). On appelle $\overline{V}$ la vitesse moyenne verticale de remontée de l'asthénosphère et $\overline{U}$ la vitesse horizontale liée à la convergence associée. On prendra l'origine du repère (x,y) sous le centre de la calotte.



1. Calcul du gradient de pression longitudinal dû à la calotte de glace.
    a. En vous appuyant sur le théorème de Thales (si si), calculez *h(x)* en fonction de *H*, *x* et *W*.
    b. Calculer la pression *P(x)* à la base de la calotte en fonction de l'épaisseur *h(x)* et de la pression atmosphérique P_0.
    c. En déduire le gradient de pression longitudinal $\partial P / \partial x$ en fonction de ρ, *g, H et W*.

2. Équation vérifiée par la vitesse.

On assimile l'écoulement horizontal dans l'asthénosphère à l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de viscosité μ entre deux plaques horizontales fixes (lithosphère et manteau inférieur). On note *u* la composante de la vitesse selon (0x) et *v* celle selon (0y). On donne les conditions aux limites suivantes : u(*y=0*)=*0* et *du/dy(y=L/2)=0*. On négligera les termes d'advection dans la dérivée particulaire et on supposera que *u* ne dépend que de *y*.

a. Écrire et simplifiez l'équation de Navier Stokes pour *u* dans les conditions du problème : montrez qu'on peut écrire : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$

b. Intégrez cette équation et, en utilisant les conditions aux limites, montrez que la vitesse *u* vérifie : $u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}(y^2 - Ly)$

c. Calculez la valeur moyenne de u : $\bar{u} = \frac{1}{L}\int_0^L u\,dy$

d. Le fluide est supposé incompressible. Déduisez en une relation entre $\bar{U}$ et $\bar{V}$

e. Exprimez alors $\bar{V}$ en fonction de ρ, *g*, *H*, *L*, μ et *W*. En déduire l'expression de μ viscosité de l'asthénosphère.

f. Application numérique : Calculez μ.

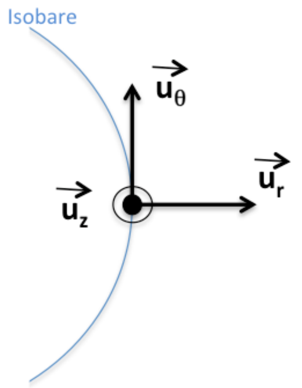
Données : *H*=5km, *L*=200km, *W*=1000km, g=9.81m/s^2, ρ=1000kg/m^3, $\bar{V}$ =3x10^{-9}m/s

Exercice 4 : Vitesse géostrophique maximale autour d'une dépression

On considère un système dépressionnaire atmosphérique centré sur la latitude φ=45° Nord. Dans cette dépression, dont la pression *P(r)* au niveau de la mer est donnée par :

$$P(r) = P_0 - \Delta P \exp(-r^2/R^2) \qquad (2)$$

avec P_0=1000 hPa, *r* la distance radiale au centre de la dépression (en km) , *R*=500 km. On donne ρ_{air}=1.3kg/m^3 et ΔP=20 hPa. On notera *f* le paramètre de Coriolis ($f=2\Omega\sin\varphi$). On se placera dans le repère local autour d'une isobare dans le plan horizontal :



1. On se place dans l'hypothèse de l'équilibre géostrophique où les forces de pression équilibrent la force de Coriolis. Ecrivez cet équilibre sous forme vectorielle à partir de l'équation (1) de la partie cours.

2. Dessinez les forces en présence et le vecteur vitesse en supposant que les isobares sont des cercles comme sur le schéma ci-dessus (pas de calcul).

3. Projetez l'équilibre géostrophique dans le repère local ci-dessus. On admettra pour cela que les différents vecteurs s'écrivent :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{gradP} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\cos\varphi \\ \Omega\sin\varphi \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}$$

4. Exprimez alors *v(r)*, composante de la vitesse selon $\vec{u}_\theta$

5. En dérivant l'expression de *v(r)*, trouver à quelle distance r_0 la vitesse *v(r)* est maximum (v_{max}). On rappelle que la dérivée du produit fg de deux fonctions f et g s'écrit : (fg)' = f 'g + fg '

6. Exprimez v_{max}, puis calculez v_{max} en km/h

Exercice 5. Différences de température dans un courant géostrophique marin

Ob considère un courant marin de largeur L dans la direction Oy et s'écoulant dans la direction Ox. Dans la région $-L < y < L$, la vitesse de ce courant est donnée par la relation :

$$u = U_0 \cos(\frac{py}{2L})\exp(\frac{z}{d})$$

où z représente la profondeur (0 en surface et négatif quand on descend dans la colonne d'eau), *L*=100km largeur caractéristique du courant, *d*=400m profondeur caractéristique, U_0=1.5 m/s vitesse maximale du courant. On notera *h* la hauteur d'eau en surface par rapport à *z=0* et P_s la pression de surface *à z=0.*

1. Représentez l'allure du courant en surface (*u (y,0)*)
2. En utilisant l'équilibre hydrostatique, donnez la relation entre *P* et *h*.
3. En écrivant l'équilibre géostrophique, exprimez la dérivée de *h* par rapport à *y*. On se placera en *z=0*.
4. En déduire l'expression de *h(y)*. Calculez la valeur numérique de *h(L)*.
5. En utilisant l'équation du « vent » thermique : $f\frac{\P u}{\P z} = \frac{g}{r_0}\frac{\P r}{\P y}$, exprimez $\frac{\P r}{\P y}$ en fonction des données du problème.

   En déduire l'expression de $r(y,z) - r(0,z)$
6. On introduit le coefficient de dilatation isobare $a = \frac{1}{r_0}\left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)_P$. Exprimez $T(y,z) - T(0,z)$ en fonction des données du problème et de a. En déduire la différence de température maximale à 500 m de profondeur à la distance L du centre du courant. Comparez cette valeur à celle du courant représenté dans la figure ci-dessous (Atlantique Nord) :

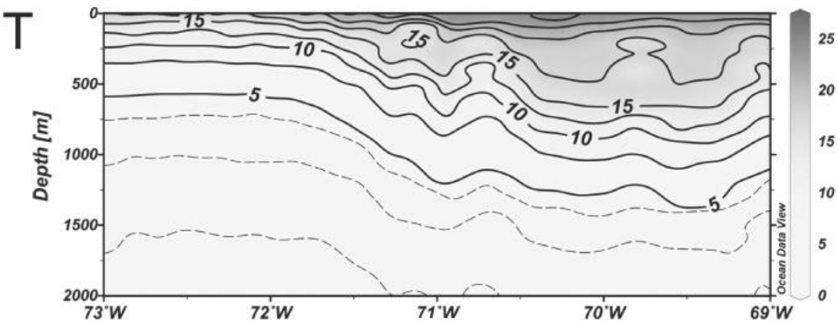


Figure : Température (°C) pour un transect Longitude /profondeur dans l'Atlantique Nord

Exercice 6 : Décantation dans une station d'épuration

Dans une station d'épuration, une des étapes du traitement des boues est la décantation. Pour déterminer combien de temps on va devoir attendre pour que les particules de diamètre D =10 µm soient déposées au fond du bassin, l'ingénieur doit faire au préalable le calcul de la sédimentation de ces particules. Les particules ont une masse volumique ρ=2650 kg/m^3, elles sédimentent dans de l'eau (ρ_f=1000 kg/m^3, viscosité cinématique ν =10^{-6} m^2/s). On suppose le régime d'écoulement laminaire.

1. Que représente la poussée d'Archimède ? Donnez son expression.
2. Quelles sont les autres forces s'exerçant sur les particules ? Donnez leur expression.
3. Ecrivez la conservation de la quantité de mouvement pour une particule.
4. On suppose un régime stationnaire et un écoulement unidirectionnel. En déduire l'expression de la vitesse de sédimentation u_p en fonction de ρ, ρ_f, D, g, et ν.
5. Calculez le nombre de Reynolds. Dans quel régime d'écoulement est-on ? Est-il compatible avec les hypothèses de départ ?
6. Combien de temps faut-il attendre pour que les particules tombent au fond sachant que le bassin a une profondeur de H=1.5m ?

Données :

-Conservation de la quantité de mouvement : $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = somme\ des\ forces$

-Volume V d'une sphère de diamètre D : $V = \frac{\pi D^3}{6}$

-Viscosité cinématique (m^2/s) : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

-Force visqueuse pour une particule sphérique de diamètre D : $F_v=3\pi\mu D u_p$ où u_p représente la vitesse de sédimentation

Exercice 7 : Vitesse du vent zonal en altitude à 45°N (d'après l'examen 2018)

On cherche à estimer la vitesse du vent zonal (vent longitudinal ouest vers est) à 45°N et à la pression P_{top}=200 hPa. Dans l'équation de Navier Stokes, on suppose les termes d'accélération nuls et on néglige la viscosité de l'air et sa vitesse verticale.

1. Ecrivez l'équation de Navier-Stokes dans les conditions du problème.
2. Que pouvez-vous dire de la valeur de $2\Omega\cos(\varphi)\,u$ par rapport à g pour u=20m.s^{-1} et $\varphi = 45°$?
3. On se place dans le repère local $Oxyz$ (longitude, latitude, altitude). En utilisant les vecteurs et les formules données en fin de sujet, montrez que : $\begin{cases} fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ -g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$, avec $f = 2\Omega\sin(\varphi)$, facteur de Coriolis
4. On assimile l'air à un gaz parfait $P = \rho RT$, avec R constante des gaz parfaits, T température de l'air, P pression et ρ masse volumique. Ré-écrivez l'équilibre hydrostatique sur l'axe (Oz) et montrez que :

$$dz = -\frac{RT}{g}\frac{dP}{P} \quad (2)$$

université
PARIS-SACLAY

5. On suppose que la température de l'air T est constante sur la verticale entre la surface (z=0, P_{surf}=1000 hPa) et P_{top} ($z=z_{top}$, P_{top}=200 hPa), mais que T varie avec la latitude, soit $T=T(\varphi)$. Intégrez alors la relation (2) entre la surface et le niveau « top » , et exprimez z_{top} en fonction de R, g, $T(\varphi)$, P_{surf} et P_{top}. On rappelle qu'une primitive de $1/x$ est $ln(x)$.
6. Exprimez z_{top} pour φ =30°N ($z_{top,30°N}$) et pour φ =60°N ($z_{top,60°N}$). En déduire que la différence d'altitude de la pression P_{top} entre φ =30°N et φ =60°N vaut :
$$\Delta z_{top} = z_{top,30°N} - z_{top,60°N} = \frac{R}{g}\left(T(30) - T(60)\right)\ln\left(\frac{P_{surf}}{P_{top}}\right)$$
7. Calculez Δz_{top}.
8. Quelle est la relation entre dy (distance sur un méridien) et $d\varphi$ (variation de latitude correspondante) ?
9. En déduire que la vitesse zonale moyenne u_{top} à 45°N peut s'écrire $u_{top} \approx \frac{g}{f}\frac{\Delta z_{top}}{a\Delta\varphi}$ avec a rayon de la terre.
10. Calculez u_{top}. L'hypothèse faite au 2) est-elle valable ?

Données :

- a=6375km, Ω=7.27x10^{-5}s^{-1}, g=9.81m.s^{-2}, $T(30)$=265°K et $T(60)$=235°K, R=287 J.kg^{-1}.K^{-1}.
- Attention la latitude φ est à exprimer en radians dans les applications numériques.
- Vous assimilerez les dérivées partielles à des dérivées droites quand cela est nécessaire.
- $\vec{V} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{Bmatrix}, \overrightarrow{grad}(P) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{Bmatrix}, \vec{g} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{Bmatrix}$, et $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\cos\varphi \\ \Omega\sin\varphi \end{pmatrix}$

avec $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}$